



Learning and Labor.

LIBRARY

OF THE

University of Illinois.

CLASS.

510.5

BOOK

JR

VOLUMES

3+4

Books are not to be taken from the Library.

Accessions No.

B 1677

~~READING ROOM~~

MATHEMATICS LIBRARY

31961



Journal

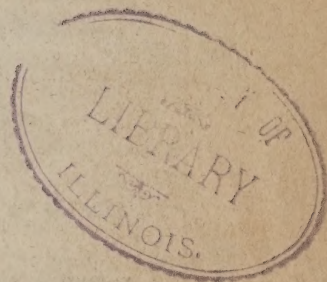
für die
reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. C r e l l e.



Mit thätiger Beförderung hoher Königlich - Preussischer Behörden.

Dritter Band,

In 4 Heften.

Mit 4 Kupfertafeln.

Berlin,
bei G. Reimer.

1828.

Inhaltsverzeichnis

des dritten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung	Heft	Seite
1. Beweis eines algebraischen Lehrsatzes. Von Herrn Hofrath und Professor Dr. <i>Gauß</i> zu Göttingen.	I.	1
3. Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré. Par M. <i>G. Lejeune-Dirichlet</i> , prof. d. math. à Breslau.	I.	35
4. Ueber Reihen, durch welche höhere Potenzen des Bogens durch den Sinus ausgedrückt werden. Von Herrn. Dr. <i>E. J. Scholtz</i> in Breslau.	I.	70
5. Note sur le mémoire de Mr. <i>L. Olivier</i> No. 4. du second tome de ce journal, ayant pour titre „remarques sur les séries infinies et leur convergence.” Par Mr. <i>N. H. Abel</i>	I.	79
Remarque de Mr. <i>L. Olivier</i> sur le même objet.	I.	82
8. Addition au Mémoire de M. <i>Abel</i> sur les fonctions elliptiques, inséré dans le vol. II. de ce journ., cah. 2. p. 101. Par Mr. <i>C. G. J. Jacobi</i> à Königsberg.	I.	86
9. Die Function $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots$ durch die Anzahl der a ausgedrückt. (In Folge der Aufgabe 40. S. 193. im zweiten Bande dieses Journals.) Von Herrn <i>Th. Clausen</i> zu Altona.	I.	87
10. Ueber die Fälle, wenn die Reihe von der Form $y = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta \cdot \beta + 1}{\gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \text{etc.}$ ein Quadrat von der Form $z = 1 + \frac{\alpha'}{1} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} \cdot \frac{\delta'}{\varepsilon'} x + \frac{\alpha' \cdot \alpha' + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta' + 1}{\gamma' \cdot \gamma' + 1} \cdot \frac{\delta' \cdot \delta' + 1}{\varepsilon' \cdot \varepsilon' + 1} x^2 + \text{etc.}$ hat. Von Herrn <i>Th. Clausen</i> zu Altona.	I.	89
11. Beitrag zur Theorie der Reihen. Von Herrn <i>Th. Clausen</i> zu Altona.	I.	92
13. Ueber die Integration logarithmisch-rationaler Differentiale. Von Herrn Prof. Dr. <i>C. J. Hill</i> zu Lund.	II.	101
14. Recherches sur les fonctions elliptiques. Par Mr. <i>N. H. Abel</i> . (Suite du mémoire Nr. 12. Tom. II. cah. 2. de ce journal.)	II.	160
15. Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés. Par Mr. <i>C. G. J. Jacobi</i> , prof. en phil. à Königsberg.	II.	191
16. Note sur les fonctions elliptiques. Par Mr. <i>C. G. J. Jacobi</i> , prof. en phil. à Königsberg. (Extrait d'une lettre de l'auteur au rédacteur de ce journal sous le date de 2. Avril 1828.)	II.	192
26. Beantwortung der Aufgabe S. 212. dieses Bandes: „Kann $a^{\mu-1} - 1$, wenn μ eine Primzahl und a eine ganze Zahl und kleiner als μ und größer als 1 ist, durch $\mu\mu$ theilbar sein?” Von Hrn. Prof. <i>C. G. J. Jacobi</i>	III.	301
27. Suite des notices sur les fonctions elliptiques (Voy. p. 192). Par Mr. <i>C. G. J. Jacobi</i> , prof. en phil. à Königsberg. (Extrait d'une lettre de l'auteur au redacteur de ce journal, du 21. Juillet 1828.	III.	303
28. Demonstratio duarum celeb. Gaussii propositionum. (Disqu. arithm. p. 17.) Auct. <i>Theod. Clausen</i>	III.	311
30. Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendentes. Par Mr. <i>N. H. Abel</i> de Christiania.	IV.	313
33. Auflösungen der Aufgabe No. 19. S. 99. im 1. Hefte des II. Bandes d. Journ.	IV.	347
34. Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré. Par Mr. <i>Lejeune-Dirichlet</i> , prof. de mathématiques.	IV.	354
36. Démonstrations nouvelles de quelques théorèmes relatifs aux nombres. Par Mr. <i>Lejeune-Dirichlet</i> , prof. de mathém.	IV.	390
37. Sur le nombre des transformations différentes, qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donnée e premier degré. Par Mr. <i>N. H. Abel</i>	IV.	394

Abhandlung	Hft	Seite
38. Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce. Par Mr. N. H. Abel.	IV.	402
39. Suite des notices sur les fonctions elliptiques. Par M. C. G. J. Jacobi. prof. en phil. à Königsberg.	IV.	403
2. Geometrie.		
2. Ueber die Gleichungen, mittelst welcher aus den Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks der Halbmesser des Kreises und die Fläche des Vielecks gefunden werden. Von Herrn A. F. Möbius, Professor zu Leipzig.	I.	5
6. Annäherungs-Construction des Kreis-Umfangs und Flächen-Inhalts. Vom Herrn Cand. phil. Specht zu Berlin.	I.	83
7. Beweis zweier Lehrsätze im zweiten Bande dieses Journals, Hft. I. S. 97. No. 7. und Hft. III. S. 292. No. 64. Von Herrn Remy, Stud. phil. zu Berlin.	I.	84
17. Geometrische Sätze. Von Herrn Th. Clausen zu Altona.	II.	196
18. Bemerkung über ein Polyëder. Von einem Ungenannten.	II.	199
19. Bemerkungen zu der zweiten Aufgabe in der Abhandlung No. 17. in diesem Hefte. Von Herrn J. Steiner zu Berlin.	II.	201
20. Anmerkungen zu dem Aufsätze No. 18. Von Hr. J. Steiner zu Berlin.	II.	205
22. Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques; pour faire suite au traité des propriétés projectives des figures, et servir d'introduction à la Théorie générale des propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques. (Présenté à l'Académie royale des Sciences de l'institut de France le 8. Mars 1824, et approuvé le 22. Janvier 1826, par une commission composée de M. M. Legendre, Ampère et Cauchy rapporteur.) Par Mr. J. V. Poncelet, Capitaine au corps Royal du Génie.	III.	213
23. Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- u. eingeschrieben zugleich heißen? Von Hr. Prof. Möbius zu Leipz.	III.	273
24. Beweise des Lehrsatzes No. 16. im 2. Hefte des 3. Bandes dieses Journals.	III.	279
25. Auflösung der Aufgaben und Beweis der Lehrsätze 5. 6. 7. 8. 9. im 1sten Hefte S. 96, und 29. 30. 31. 32. 33. im 2ten Hefte S. 191 des 2ten Bandes dieses Journals. Von Herrn Stud. math. Heinen zu Bonn.	III.	285
31. Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Punkte. Von Herrn Dr. Plücker zu Bonn.	IV.	324
35. Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie: „Die Relation zwischen der Distanz der Mittelpunkte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmäßigen Polygon eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist.“ Von Hr. Prof. Dr. C. G. J. Jacobi zu Königsberg in Pr.	IV.	376
40. Zweite Annäherungs-Construction des Kreis-Umfanges. Von Hr. C. G. Specht zu Berlin.	IV.	405
II. Angewandte Mathematik.		
32. Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendarographie. Von Hr. W. Matzka, Ober-Feuerwerker im K. K. Bombardier-Corps zu Wien.	IV.	337
Aufgaben und Lehrsätze.		
12. Lehrsätze über den Zusammenhang von Combinationen mit Variationen und jener unter einander, von Herrn Prof. Scherk zu Halle.	I.	96
Aufgaben von Anderen.	I.	97
21. Aufgaben und Lehrsätze. Von Herrn J. Steiner zu Berlin.	II.	207
Aufgabe von Herrn N. H. Abel zu Christiania in Norwegen.	II.	212
29. Lehrsatz. Von Herrn Dr. Hellerung zu Wismar.	III.	312
41. Aufgaben. Question d'analyse indéterminée. Par Mr. Lejeune-Dirichlet, prof. en mathématiques.	IV.	407
Von Anderen.	IV.	408
42. Einige Nachrichten von Büchern.	IV.	410

1.

Beweis eines algebraischen Lehrsatzes.

(Von Hrn. Hofrath u. Professor, Dr. *Gauß* zu Göttingen.)

Der Gegenstand dieses Aufsatzes ist der Cartesische, gewöhnlich nach Harriot benannte, Lehrsatz über den Zusammenhang der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit der Anzahl der Abwechslungen und Folgen in den Zeichen der Coëfficienten. Man vermißt an den von verschiedenen Schriftstellern versuchten Beweisen dieses Theorems die Klarheit, Kürze und umfassende Allgemeinheit, die man bei einem so elementarischen Gegenstande mit Recht verlangen kann, und eine neue Behandlung desselben scheint daher nicht überflüssig zu sein.

Es sei X eine algebraische ganze Function von x von der Ordnung m , nach absteigenden Potenzen von x geordnet. Wir nehmen an (ohne Nachtheil für die Allgemeinheit), daß das höchste Glied x^m sei, und das niedrigste von x freie Glied nicht fehle; bloß die wirklich vorhandenen Glieder sollen aufgestellt, also nicht die etwa fehlenden mit dem Coëfficienten 0 angesetzt sein.

Wenn nicht alle Coëfficienten positiv sind, so werden sie einen oder mehrere Zeichenwechsel darbieten. Es sei $-Nx^n$ das erste negative Glied, das erste hierauf folgende positive $+Px^p$, das erste hierauf folgende negative $-Qx^q$ u. s. w. Es sind mithin m, n, p, q u. s. w. abnehmende ganze Zahlen; N, P, Q u. s. w. positiv, und X erscheint so dargestellt:

$$X = x^m + + \dots - Nx^n - - \dots + Px^p + + \dots - Qx^q - \text{u. s. w.}$$

Es werde X mit dem einfachen Factor $x - \alpha$ multiplicirt, wo α positiv vorausgesetzt wird. Man sieht leicht, daß in dem Producte, x^{n+1}

einen negativen, x^{p+1} einen positiven, x^{q+1} einen negativen Coëfficienten u. s. w., also das Product diese Form erhalten wird:

$$\|X(x-\alpha) = x^{m+1} \dots - N' x^{n+1} \dots + P' x^{p+1} \dots - Q' x^{q+1} \dots$$

so daß N' , P' , Q' u. s. w. positiv werden. Die Zeichen zwischen den aufgestellten Gliedern bleiben zwar unentschieden: allein es ist klar, daß vom höchsten Gliede bis zur Potenz x^{n+1} wenigstens ein Zeichenwechsel, bis x^{p+1} wenigstens zwei, bis x^{q+1} wenigstens drei u. s. w. statt finden. Ist der letzte Zeichenwechsel in X bei dem Gliede $\pm U x^u$, und bezeichnet man den Coëfficienten von x^{n+1} in $X(x-\alpha)$ durch $\pm U'$, so wird U' positiv sein, und bis zum Gliede $\pm U' x^{u+1}$ haben dann wenigstens eben so viele Zeichenwechsel, wie in X sind, statt gefunden. Das letzte Glied in $X(x-\alpha)$ wird aber das Zeichen $\mp$ haben; es muß also bis dahin wenigstens noch ein Zeichenwechsel hinzugekommen sein. Wir schließen also, daß $X(x-\alpha)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr hat als X .

Es sei nun X das Product aller einfachen Factoren, die den negativen und imaginären Wurzeln einer Gleichung $y=0$ entsprechen, also, wenn α , β , γ u. s. w. die positiven Wurzeln derselben Gleichung sind,

$$y = X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \dots$$

Es finden sich also nach vorstehendem Satze, in $X(x-\alpha)$ wenigstens ein Zeichenwechsel, in $X(x-\alpha)(x-\beta)$ wenigstens zwei, in $X(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ wenigstens drei u. s. w. mehr als in X ; folglich werden, auch wenn in X gar kein Zeichenwechsel vorkommt, in y wenigstens so viele Zeichenwechsel sein, wie positive Wurzeln. Man sieht von selbst, daß wenn die Gleichung weder negative, noch imaginäre Wurzeln hat, man $X=1$ zu setzen hat, und dieser Schluss seine Gültigkeit behält.

Es gehe y , wenn den Coëfficienten der Potenzen x^{m-1} , x^{m-3} , x^{m-5} u. s. w. die entgegengesetzten Zeichen beigelegt werden, in y' über; sämtliche Wurzeln der Gleichung $y'=0$ werden dann den Wurzeln der Gleichung $y=0$ entgegengesetzt sein. Es wird daher in y' wenigstens eben so viele Zeichenwechsel geben, als die Gleichung $y=0$ negative Wurzeln hat.

Wir haben daher folgenden Lehrsatz:

Die Gleichung $y=0$ kann nicht mehr positive Wurzeln haben, als es Zeichenwechsel in y giebt, und nicht mehr negative Wurzeln, als Zeichenwechsel in y' sind.

Diese Einkleidung des Theorems scheint die zweckmässigste zu sein, da sie die größte Einfachheit mit der umfassendsten Allgemeinheit vereinigt, und alle Gestalten des Satzes, die nur unter besondern Bedingungen gelten, von selbst daraus fließen.

Will man die Grenze der Anzahl der negativen Wurzeln unmittelbar an den Zeichen der Coëfficienten von y erkennen, so wird es nothwendig, die unmittelbaren Zeichenwechsel und Zeichenfolgen (bei Gliedern, wo die Exponenten von x um eine Einheit verschieden sind), von den durch fehlende Glieder unterbrochenen zu unterscheiden. Offenbar wird jeder unmittelbare und jeder durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenwechsel in y' zu einer ähnlichen Zeichenfolge in y , während ein durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochener Zeichenwechsel in y' auch in y ein ähnlicher Zeichenwechsel bleibt. Der zweite Theil des Theorems läßt sich daher auch so ausdrücken:

Die Anzahl der negativen Wurzeln der Gleichung $y=0$ kann nicht größer sein, als die Anzahl der unmittelbaren und der durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolgen, addirt zu der Anzahl der durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel in y .

Fehlt in y gar kein Glied, so ist die Anzahl der negativen Wurzeln nicht größer, als die Anzahl der Zeichenfolgen.

Bezeichnet man durch A die Anzahl der unmittelbaren Zeichenwechsel, und durch B die Anzahl der unmittelbaren Zeichenfolgen in y , so wird, wenn kein Glied fehlt, $A+B=m$ sein, also der Anzahl aller Wurzeln gleich. Insofern diese Zeichen also bloß lehren, daß die Anzahl der positiven Wurzeln nicht größer als A , und die der negativen nicht größer als B sein kann, bleibt es unentschieden, ob oder wie viele imaginäre Wurzeln vorhanden sind. Weiß man aber anders woher, daß die Gleichung keine imaginäre Wurzeln hat, so muß nothwendig A der Anzahl der positiven, und B der Anzahl der negativen Wurzeln gleich sein.

Anders aber verhält es sich, wenn in y Glieder fehlen. Um mit Klarheit zu übersehen, was sich daraus in Beziehung auf die imaginären Wurzeln schliessen läßt, bezeichnen wir durch a die Anzahl der durch eine gerade, durch c die Anzahl der durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel; durch b und d resp. die Anzahl der durch eine gerade und ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolgen in y . Man sieht leicht, daß $m - A - B - a - b - c - d$ der Anzahl sämtlicher fehlender Glieder, die wir durch e bezeichnen wollen, gleich sein werde. Nun ist nach unserm Lehrsatz die Anzahl der positiven Wurzeln höchstens $A + a + c$, die Anzahl der negativen höchstens $B + b + c$, also die Anzahl aller reellen Wurzeln höchstens

$$A + B + a + b + 2c = m + c - d - e.$$

Es muß daher die Anzahl der imaginären Wurzeln wenigstens $e - c + d$ sein.

Zählt man also alle fehlenden Glieder zusammen, jedoch so, daß man in jeder Lücke zwischen einem Zeichenwechsel eine Einheit weniger, zwischen einer Zeichenfolge aber eine Einheit mehr rechnet, als Glieder fehlen, so oft deren Anzahl ungerade ist, so erhält man eine Zahl, der die Anzahl der imaginären Wurzeln wenigstens gleich kommen muß.

2.

Ueber die Gleichungen, mittelst welcher aus den Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks der Halbmesser des Kreises und die Fläche des Vielecks gefunden werden *).

(Von Herrn *A. F. Möbius*, Professor zu Leipzig.)

Die Gleichungen, mit Hülfe deren man aus den Seiten eines in einen Kreis beschriebenen Dreiecks oder Vierecks den Halbmesser des Kreises und die Fläche des Drei- oder Vierecks findet, sind allgemein bekannt. Von der Entwicklung derselben Gleichungen für Vielecke mit mehreren Seiten, mag bis jetzt theils ihr seltenes Bedürfniss, theils aber und vorzüglich der Umstand abgehalten haben, daß diese Gleichungen bei wachsender Seitenzahl in hohem Grade immer zusammengesetzter werden. Denn die Analysis ist hier, auf ähnliche Art, wie bei der Dreitheilung des Winkels und in vielen anderen Fällen, genöthigt, auch diejenigen Vielecke mit anzugeben, bei welchen der Perimeter, bevor er in sich zurückkehrt, sich selbst ein oder mehrere Male schneidet, und welche man, da sie im Practischen keinen besonderen Nutzen haben, nur als Abarten von Vielecken zu betrachten pflegt. Die Mannigfaltigkeit solcher Vielecke wird aber bei zunehmender Seitenzahl immer größer, und eben so muß auch die Anzahl der Kreise zunehmen, in denen sich die nemlichen Seiten zu Vielecken zusammensetzen lassen. Uebrigens leuchtet ein, daß bloß die verschiedene Aufeinanderfolge der Seiten zur Vermehrung der Kreise nichts beitragen kann.

Der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist eine nähere Untersuchung der Beschaffenheit der gedachten Gleichungen. Ich habe darin, wenn auch nicht sie selbst entwickelt, doch einen einfachen Weg zu ihrer Entwicklung nachgewiesen, und hoffe, daß dieser Weg, so wie die Bestimmung des Grades der Gleichungen, die Betrachtung der Natur jener

*) Diese Abhandlung ist, wie der Herr Verfasser dem Herausgeber meldet, durch die Aufgabe No. 21. Heft 1. Band 2. dieses Journals veranlaßt worden.

sternartigen Vielecke, und noch einiges Andere für den Geometer nicht ganz ohne Interesse und für die Wissenschaft von einigem Nutzen sein werde.

Sei A ein Punct in der Peripherie eines Kreises, B ein zweiter Punct in derselben, den man sich anfangs mit A zusammenfallend denke. B trenne sich hierauf von A , und bewege sich immerfort nach derselben Richtung, etwa von der Linken nach der Rechten, wenn man sich selbst innerhalb des Kreises befindet.

Während auf diese Weise der Bogen AB ohne Ende wächst, und der Punct B jedesmal, wenn der Bogen einem Vielfachen der Peripherie gleich geworden ist, mit dem Puncte A von Neuem zusammenfällt, wird die Sehne AB , deren anfänglicher Werth $= 0$ ist, so lange zunehmen, bis der Bogen $AB = 180^\circ$ geworden, wo sie die GröÙe des Durchmessers erreicht hat. Sie wird hierauf eben so abnehmen, verschwinden, wenn der Bogen bis zu 360° angewachsen ist, und alsdann durch 0 in das Entgegengesetzte übergehen, so dafs, wenn man die Sehne anfänglich positiv annimmt, sie nunmehr negativ wird, und während der Punct B den zweiten Umkreis beschreibt, die Sehne, eben so, wie beim ersten, nur negativ, zu und abnimmt. Kommt hierauf B von Neuem nach A , wird also der Bogen $= 2.360^\circ$, so geht die Sehne aus dem Negativen in das Positive zurück, und so wieder umgekehrt, aus dem Positiven in das Negative, wenn der Bogen 3.360° geworden. u. s. f.)

Bezeichnet daher n irgend eine positive ganze Zahl, und ϕ einen Bogen $< 360^\circ$, so ist die Sehne des Bogens $n.360^\circ + \phi$ positiv oder negativ, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Der absolute Werth der Sehne aber ist der Sehne von ϕ selbst gleich. Auch wird man sich leicht durch ähnliche Betrachtungen überzeugen, dafs dieser Satz seine Gültigkeit behält, auch wenn n negativ genommen wird.

Seien nun $A, B, C, \dots M$ die Spitzen eines in einen Kreis beschriebenen Vielecks, in der Ordnung, in welcher sie im Perimeter auf einander folgen, und daher $AB, BC, \dots MA$ die auf einander folgenden Seiten des Vielecks, deren Anzahl $= m$. Dafs die Puncte $A, B, C, \dots$ auch in der Peripherie des Kreises nach dieser Ordnung fortgehen, ist deshalb keinesweges nothwendig. Vielmehr ist dieser Fall nur als ein specieller und zugleich als der einfachste zu betrachten, indem alsdann keine Seite von der anderen innerhalb ihrer Endpunkte geschnitten wird.

Man lasse nun von A einen Punkt im Kreise nach der einen oder anderen Richtung, die man für die positive nehme, im Kreise fortgehen, bis er nach B , und zwar zum erstenmale kommt, d. h. nicht noch einen ganzen Umkreis weiter, wo er wieder in B eintreffen würde; hierauf von B weiter, bis er zum erstenmale nach C kommt, u. s. w., endlich von der letzten Spitze M bis zum erstenmale wieder zu der ersten A . Die Summe der so zurückgelegten Bogen wird offenbar entweder 360° selbst oder ein gewisses Vielfache davon, z. B. $n \cdot 360^\circ$ sein.

Die diesen Bogen zugehörigen Sehnen aber, oder die Vielecks-Seiten, sind nach dem vorhin Gesagten insgesamt als positiv zu betrachten, so wie man auch, ohne die positive Beschaffenheit aufzuheben, zu jedem einzelnen Bogen irgend ein gerades Vielfache von 360° hinzufügen oder davon wegnehmen, und daher die Summe aller $= n \cdot 360^\circ \pm 2p \cdot 360^\circ$ setzen kann.

Man nehme jetzt bei demselben Vieleck die der vorigen entgegengesetzte Richtung im Kreise für die positive, und bestimme danach, wie vorhin, die Bogen $AB, BC \dots MA$. Jeder derselben wird offenbar die Ergänzung des vorigen zu 360° , d. h. $= (m - n) 360^\circ$ sein, zu welcher Summe man aus gleichem Grunde wie vorhin, das Glied $\pm 2p \cdot 360^\circ$ setzen kann.

Allgemein wird man daher bei einem m Eck die Summe der Bogen $AB, BC \dots MA$, wenn die ihnen zugehörigen Sehnen oder Vielecks-Seiten ins gesamt positiv sein sollen, zu setzen haben

$$= (n \pm 2p) 360 \text{ oder } = (m - n \pm 2p) 360^\circ,$$

wo m die Seitenzahl des Vielecks, n eine von der Aufeinanderfolge der Spitzen im Kreise nach einer festgesetzten Richtung abhängige, p aber eine beliebige ganze Zahl ist.

Hier zeigt sich sogleich ein merkwürdiger Unterschied zwischen den Vielecken mit gerader und denen mit ungerader Seitenzahl, oder, wie wir uns der Kürze wegen in der Folge ausdrücken wollen, zwischen geraden und ungeraden Vielecken. Findet sich z. B. bei einem vorgegebenen ungeraden Vieleck n gerade (ungerade), so stellt $n \pm 2p$ jede andere gerade (ungerade) und $m - n \pm 2p$ jede ungerade (gerade) Zahl vor.

Bei einem ungeraden Vieleck kann daher die Bogensumme einem geraden sowohl, als ungeraden Vielfachen von 360° gleich gesetzt werden.

Bei einem geraden Vieleck hingegen ist, wenn n gerade (ungerade) sich ergibt, $n \pm 2p$ sowohl als $m - n \pm 2p$ der Ausdruck jeder anderen geraden (ungeraden) Zahl.

Alle geraden Vielecke zerfallen daher in zwei verschiedene Klassen. Bei den Vielecken der einen Klasse ist die Bogensumme einem ungeraden Vielfachen von 360° gleich; und diese Klasse heiße die erste, weil darin auch die einfachsten Vielecke, wo keine Seite der anderen innerhalb ihrer Endpunkte begegnet, begriffen sind. Bei den ungeraden Vielecken der zweiten Klasse kann die Bogensumme bloß geraden Vielfachen von 360° gleich gesetzt werden.

So ist z. B. bei dem Viereck $ABCD$, wenn B und D auf entgegengesetzten Seiten der Diagonale AC liegen, die Bogensumme $AB + BC + CD + DA = 360^\circ$, oder 3.360° etc.; liegen aber B und D auf einerlei Seite von AC , so ist dieselbe Bogensumme $= 2.360^\circ$, 4.360° etc., nach welcher Richtung man auch bei diesem, so wie beim vorigen Viereck im Kreise fortgehen mag. Mithin gehört jenes Viereck zur ersten, und dieses zur zweiten Klasse. Dagegen ist bei einem und demselben Dreieck ABC , die Bogensumme $AB + BC + CA$, nach der einen Richtung gezählt, $= 360^\circ$, oder 3.360° etc., nach der entgegengesetzten Richtung, $= 2.360^\circ$ oder 4.360° etc.

Man kann auch immer schon aus der niedergeschriebenen Reihe der Buchstaben, nach welcher die damit bezeichneten Spitzen eines geraden Vielecks in der Peripherie auf einander folgen, beurtheilen, ob das Vieleck zur ersten oder zweiten Klasse gehört. Vergleicht man nemlich mit dieser Reihe die Ausdrücke für die einzelnen Seiten $AB, BC, CD \dots MA$, und finden sich in der Reihe bei einer ungeraden (geraden) Zahl der Seiten die zwei, jede Seite bezeichnenden Buchstaben, in derselben Folge, als wie in jenen Ausdrücken, also auch bei einer ungeraden (geraden) Anzahl in umgekehrter Folge, so gehört das Vieleck der ersten (zweiten) Klasse an.

So ist z. E. bei dem Sechseck (Fig. 1.) die Reihe der Spitzen in der Peripherie: $ABCDEF$, und darin nur der Seitenausdruck FA in umgekehrter Folge (AF) anzutreffen. Mithin ist es ein Sechseck der ersten Klasse.

Bei dem Sechseck (Fig. 2.) ist die Reihe der Spitzen $ABEDCF$, worin AB, BC, EF in directer, und CD, DE, FA in umgekehrter Folge sich

sich finden, und das Sechseck gehört daher ebenfalls zur ersten Klasse, so wie auch (Fig. 3.) mit der Reihe $ABDFEC$.

Dagegen sind (Fig. 4. u. 5.) zur zweiten Klasse zu rechnen, indem in der Reihe des erstern Sechsecks $ABCFDE$ die zwei Ausdrücke EF und FA , in der Reihe des letzteren $ABEFCD$ die zwei Ausdrücke DE und FA , umgekehrt anzutreffen sind.

Die oben entwickelten Sätze lassen sich sehr einfach durch trigonometrische Functionen darstellen. Setzen wir nemlich die Bogen $AB, BC \dots MA$ resp.

$$= 2\alpha, 2\beta \dots 2\mu,$$

so ist bei ungeraden Vielecken

$$2\alpha + 2\beta + \dots + 2\mu = p \cdot 360^\circ,$$

also

$$\alpha + \beta + \dots + \mu = p \cdot 180^\circ,$$

oder, was dasselbe ausdrückt:

$$\text{I. } \sin(\alpha + \beta + \dots + \mu) = 0.$$

Ferner ist bei den geraden Vielecken der ersten Klasse

$$2\alpha + 2\beta + \dots + 2\mu = (2p + 1)360^\circ,$$

folglich

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \dots) = (2p + 1)90^\circ,$$

oder

$$\text{II. } \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \dots + \mu) = 0,$$

und bei geraden Vielecken der zweiten Klasse

$$2\alpha + 2\beta + \dots = 2p \cdot 360^\circ,$$

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \dots) = p \cdot 180^\circ,$$

oder

$$\text{II}^*. \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \dots + \mu) = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen I. II. II*, können wir nun ohne Weiteres an die Lösung der Haupt-Aufgabe gehen: Aus den gegebenen Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks den Halbmesser des Kreises zu finden.

Bezeichnen wir die Seiten des Vielecks, $AB, BC \dots MA$ mit $2a, 2b, \dots 2m$, und den Halbmesser mit r , so ist einleuchtend, daß

$$\sin \alpha = \frac{a}{r}, \sin \beta = \frac{b}{r}, \dots \sin \mu = \frac{m}{r},$$

und die gesuchte Gleichung zwischen den Seiten und dem Halbmesser wird gefunden sein, wenn man mittelst der letzteren Gleichungen aus I. oder II. die Hülfswinkel $\alpha, \beta \dots \mu$ eliminirt hat.

Zu diesem Zwecke wird man die Sinus und Cosinus der Bogen-
summen in I. und II. als Functionen der Sinus der einzelnen Bogen α ,
 β , ... darzustellen haben, und zwar als rationale Functionen dieser Si-
nus, wenn die Gleichung zwischen r , a , b , c , wie wohl immer ge-
fordert wird, rational sein soll.

Um den hierbei zu nehmenden Gang mit möglichster Deutlichkeit
vorzulegen, machen wir mit dem Dreieck den Anfang. Für dieses ist
die Gleichung

$$a) \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Damit sie zuerst nach $\sin \alpha$ rational werde, erwäge man, daß das We-
sentliche der Function $\sin \alpha$, und jeder rationalen Function von $\sin \alpha$
überhaupt darin bestehet, daß eine solche Function sich nicht ändert,
wenn man statt α , $\alpha + 2p \cdot 180$, oder $-\alpha + (2p + 1)180$ substituirt. Nun
bleibt $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ durch erstere Substitution ungeändert, verwandelt
sich aber durch letztere Substitution in $\sin(\alpha - \beta - \gamma)$. Mithin wird
die nach $\sin \alpha$ rationalisirte Gleichung (a) sein:

$$b) \sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin(-\alpha + \beta + \gamma) = 0,$$

als welche bei der einen sowohl, als bei der anderen Substitution für α
unverändert bleibt.

Um jetzt diese Gleichung (b) nach $\sin \beta$ rational zu machen, so
kommt, wenn man auf der rechten Seite von (b) für β ,
 $-\beta + (2p + 1)180^\circ$ setzt:

$$\sin(-\alpha + \beta - \gamma) \sin(\alpha + \beta - \gamma);$$

mithin ergibt sich die nach $\sin \beta$ rationalisirte Gleichung, wenn man
das zuletzt Erhaltene in (b) multiplicirt:

III. $\sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin(-\alpha + \beta + \gamma) \sin(\alpha - \beta + \gamma) \sin(\alpha + \beta - \gamma) = 0$.
Zugleich aber erkennt man, daß diese Gleichung III. nach $\sin \gamma$ schon
rational ist, und es daher wegen $\sin \gamma$ keiner neuen Multiplication be-
darf. Es bleibt daher nur die wirkliche Entwicklung der Gleichung
III. vorzunehmen übrig. Diese giebt, wie man bald findet:

$$\sin \alpha^4 + \sin \beta^4 + \sin \gamma^4 - 2(\sin \beta^2 \sin \gamma^2 + \sin \gamma^2 \sin \alpha^2 + \sin \alpha^2 \sin \beta^2) \\ + 4 \sin \alpha^2 \sin \beta^2 \sin \gamma^2 = 0,$$

und wenn man $\sin \alpha = \frac{a}{r}$ etc. setzt:

$$[a^4 + b^4 + c^4 - 2(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2)] r^2 + 4 a^2 b^2 c^2 = 0,$$

oder

$$(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c) r^2 - 4 a^2 b^2 c^2 = 0,$$

die bekannte Gleichung zwischen den halben Seiten eines Dreiecks und dem Halbmesser des umschriebenen Kreises.

Auf ähnliche Weise wollen wir die Gleichung für das nächst folgende ungerade Vieleck, das Fünfeck, abzuleiten suchen.

Die ursprüngliche Gleichung für dasselbe ist:

$$a) \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 0.$$

Verwandelt man darin α in $-\alpha$, und multiplicirt das Ergebniss in (a), so kommt die nach $\sin \alpha$ rationalisirte Gleichung:

$$b) \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) \sin(-\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 0.$$

Um (b) nach $\sin \beta$ rational zu machen, verändere man in (b) das Zeichen von β in das entgegengesetzte, und man erhält, wenn man das so veränderte (b) in das vorige multiplicirt:

$$c) \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) \sin(-\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$

$$\times \sin(\alpha - \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) \sin(-\alpha - \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) = 0,$$

eine Gleichung, welche nach $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ zugleich rational ist.

Hierin wird noch

$$\sin(\alpha + \beta - \gamma + \delta + \varepsilon) \sin(-\alpha + \beta - \gamma + \delta + \varepsilon)$$

$$\times \sin(\alpha - \beta - \gamma + \delta + \varepsilon) \sin(-\alpha - \beta - \gamma + \delta + \varepsilon)$$

multiplicirt werden müssen, um eine auch nach $\sin \gamma$ rationale Gleichung zu erhalten, und dieses neue Product noch mit

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma - \delta + \varepsilon) \sin(-\alpha + \beta + \gamma - \delta + \varepsilon)$$

$$\times \sin(\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon) \sin(-\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon)$$

$$\times \sin(\alpha + \beta - \gamma - \delta + \varepsilon) \sin(-\alpha + \beta - \gamma - \delta + \varepsilon)$$

$$\times \sin(\alpha - \beta - \gamma - \delta + \varepsilon) \sin(-\alpha - \beta - \gamma - \delta + \varepsilon),$$

damit die Gleichung auch nach $\sin \delta$ rational werde.

Dieses ganze, aus 16 Factoren bestehende Product läßt sich zur Uebersicht am bequemsten auf folgende Weise darstellen. Man bezeichne das Product aus den 5 Factoren, welche man erhält, wenn man in α , von den 5 Bogen, nur einen auf einmal negativ setzt, durch $\Sigma \sin(-\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$, und eben so das Product aus den 16 Factoren, welche entstehen, wenn man in α , zwei Bogen immer zugleich negativ nimmt, durch $\Sigma \sin(-\alpha - \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$. Alsdann ist das Product aus allen 16 Factoren:

$$V. \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) \Sigma \sin(-\alpha + \beta + \dots) \Sigma \sin(-\alpha - \beta + \gamma + \dots),$$

und dieses, gleich Null gesetzt, wird zur unmittelbaren Entwicklung der rationalen Gleichung für das Fünfeck dienen. Denn daß auch $\sin \varepsilon$

rational darin vorkomme, folgt sogleich daraus, daß die nach $\sin \alpha, \dots \sin \delta$ rational gemachte Gleichung nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ zugleich symmetrisch ist.

Es ist nun nicht schwer auf diesem Wege weiter fortzugehen, und die Gleichungen für ungerade Vielecke von noch mehreren Seiten zu entwickeln. So wird mit Anwendung der vorigen Bezeichnungsart für das Siebeneck die Gleichung sein:

$$\text{VII. } \sin(\alpha + \beta + \dots + \eta) \Sigma \sin(-\alpha + \beta + \dots) \Sigma \sin(-\alpha - \beta + \gamma \dots) \\ \times \Sigma \sin(-\alpha - \beta - \gamma + \delta + \dots) = 0,$$

wo von den drei durch Σ angedeuteten Producten das erste aus 7, das zweite aus 21, das dritte aus 35 Factoren besteht. Daß aber alle diese Factoren, und außer diesen keine anderen nöthig sind, um $\sin(\alpha + \beta + \dots + \eta)$ nach $\sin \alpha, \sin \beta, \dots \sin \eta$ rational zu machen, läßt sich folgendergestalt übersehen.

Zuerst ist klar, daß, weil $\sin(\alpha + \beta + \dots + \eta)$ eine symmetrische Function von $\alpha, \beta, \dots \eta$ ist, auch P nach diesen Größen symmetrisch sein muß, wenn wir, der Kürze willen, durch $P = 0$ die rationalisirte Gleichung vorstellen.

2) Aus der bei dem Drei- und Fünfeck angewandten Methode erhellet, daß P ein Product von m Factoren von der Form $\sin(\pm \alpha \pm \beta \pm \dots \pm \eta)$ sein muß.

3) Jeder dieser Factoren an sich ist irrational, giebt aber in Verbindung mit den jedesmal $m-1$ übrigen das rationale P .

4) Es ist gewiß, daß $\sin(-\alpha + \beta + \dots + \eta)$ einer der m Factoren ist. Mithin kann man P auch, als durch Rationalisirung dieses Factors hervorgehend betrachten. Ursprünglich aber entsteht P durch Rationalisirung von $\sin(\alpha + \beta + \dots + \eta)$. P wird sich folglich nicht ändern, wenn man darin $-\alpha$ für α , und der symmetrischen Form wegen, überhaupt irgend ein Element in jedem der m Factoren mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt; d. h. es müssen durch diese Aenderung des Zeichens dieselben Factoren, nur in anderer Ordnung, zum Vorschein kommen.

5) Hieraus folgt nun leicht, daß in den Sinussen $\sin(\pm \alpha \pm \beta \pm \dots)$, woraus P zusammengesetzt, alle möglichen und absolut verschiedenen Combinationen der Bogen $\alpha, \beta, \dots$ durch $+$ und $-$ vorkommen müs-

sen, so wie auch, daß jeder Sinus auf gleiche Art da sein muß, d. h. jeder entweder in der ersten oder in der zweiten oder dritten etc. Potenz.

6) Es reicht aber hin, alle die verschiedenen Sinus, welche man p, q, r, s nenne, nur in der ersten Potenz zu nehmen. Denn gesetzt, daß durch Vertauschung des α mit $-\alpha$, p in q und q in p , r in s und s in r übergehe, so werden schon die einzelnen Producte $pq, rs, \dots$ rationale Functionen von $\sin \alpha$, also auch das ganze $pqrs, \dots$ eine rationale Function desselben Sinus sein. Eben so ist klar, daß durch Zeichen-Aenderung des β von allen den verschiedenen Sinussen $p, q, r, s, \dots$, die eine Hälfte in die andere, und umgekehrt, übergehen muß, und daß schon die einzelnen Producte je zweier sich gegenseitig in einander verwandelnder Sinus nach $\sin \beta$ rational sein müssen. Dasselbe gilt von der Rationalität nach $\sin \gamma$ u. s. w. Folglich wird schon das einfache Product $pqrs, \dots$ selbst, nicht erst eine höhere Potenz desselben, nach allen den einzelnen $\sin \alpha, \sin \beta, \dots$, rational sein.

Da nun in der That die linke Seite der obigen Gleichung alle Sinus enthält, die aus der Form $\sin(\pm \alpha \pm \beta \pm \dots \pm \eta)$ durch alle möglichen Combinationen der Vorzeichen entstehen, und auch jeder Sinus nicht mehr als einmal vorkommt, so muß durch diese Gleichung die ursprüngliche, $\sin(\alpha + \dots + \eta) = 0$, und zwar auf die einfachste Weise, rational gemacht sein.

Nach denselben Schlüssen wird allgemein in der rational gemachten Gleichung für das $(2n+1)$ Eck auf der einen Seite Null und auf der anderen ein Product aus folgenden Factoren stehen:

- 1) der Sinus f der Summe aller $2m+1$ Bogen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$;
- 2) die $2m+1$ Sinus, welche hervorgehen, wenn man in f einen der $2m+1$ Bogen negativ nimmt;
- 3) die $\frac{(2m+1)2m}{1.2}$ Sinus, die aus f erhalten werden, wenn man 2 Bogen zugleich negativ nimmt;
- 4) die $\frac{(2m+1)2m(2m-1)}{1.2.3}$ Sinus, wenn man 3 Bogen zugleich negativ setzt; u. s. w.

und endlich die $\frac{(2m+1)2m\dots(m+2)}{1.2\dots m}$ Sinus mit m negativen Bogen.

Die Anzahl aller dieser Sinus ist $= 2^{2m}$.

Wir gehen nunmehr zu den Vielecken von gerader Seitenzahl fort. Sie zerfallen, wie oben gezeigt wurde, in zwei Klassen, von denen wir aber nur die eine, — es sei die erste, — einer umständlicheren Betrachtung zu unterwerfen nöthig haben.

Für das Viereck der ersten Klasse ist die zu rationalisirende Gleichung

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0.$$

Dieser Cosinus wird, wenn man für α , $-\alpha + (2p+1)180^\circ$ substituirt,

$$\cos[2p+1)90^\circ + \frac{1}{2}(-\alpha + \beta \dots)] = -\sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta \dots) \sin(2p+1)90^\circ;$$

ferner wird $\sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta \dots)$ durch die nemliche Substitution

$$\sin[\frac{1}{2}(\alpha + \beta \dots) - (2p+1)90^\circ] = -\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta \dots) \sin(2p+1)90^\circ;$$

mithin wird bei dieser Substitution, weil $[\sin(2p+1)90^\circ]^2 = 1$, das Product $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta \dots) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta \dots)$ ungeändert bleiben. Es findet sich aber eben so leicht, daßs dieses Product sich nicht ändert, wenn man α mit $\alpha + 2p.180^\circ$ vertauscht, indem dadurch

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta \dots) \text{ in } \cos[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + p.180^\circ] = \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos(p.180^\circ),$$

$$\sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta \dots) \text{ in } \sin[\frac{1}{2}(-\alpha + \beta) - p.180^\circ] = \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta) \cos(p.180^\circ)$$

übergeht, und

$$[\cos(p.180^\circ)]^2 = 1 \text{ ist.}$$

Es mußt folglich

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta \dots) \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta \dots)$$

nach $\sin \alpha$ rational sein, so wie es auch in der That $= \frac{1}{2} \sin(\beta \dots) - \frac{1}{2} \sin \alpha$ ist. Da nun ebenso, wenn man $-\alpha$ für α setzt, auch $\cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta \dots) \times \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta \dots)$ nach $\sin \alpha$ rational sein muß, so entspringt daraus die Regel, daßs, um $\cos$ oder $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta \dots)$ nach $\sin \alpha$ rational zu machen, man darin $\sin$ oder $\cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta \dots)$ multipliciren muß.

Die nach $\sin \alpha$ rationalisirte Gleichung für das Viereck ist daher:

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0.$$

Um sie nach $\sin \beta$ rational zu machen, wird in sie nach jener Regel

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma + \delta)$$

zu multipliciren sein. In dieses, jetzt aus vier Factoren bestehende Product multiplicire man

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta - \gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma + \delta) \sin \frac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma + \delta),$$

um es nach $\sin \gamma$ rational zu machen. Hiernach ist die nach $\sin \alpha$, $\sin \beta$, $\sin \gamma$ rationalisirte Gleichung des Vierecks:

$$\text{IV. } 0 = \begin{cases} \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma + \delta) \\ \times \cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta - \gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma - \delta) \\ \times \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma + \delta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma + \delta) \\ \times \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma + \delta) \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \delta). \end{cases}$$

Da aber $\cos \frac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma + \delta) = \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma - \delta)$ etc., so leuchtet ein, daß diese Gleichung nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ symmetrisch, mithin auch nach $\sin \delta$ rational, folglich die gesuchte Gleichung ist.

Hieraus läßt sich endlich die Gleichung zwischen r, a, b, c, d etwa auf folgende Weise am kürzesten ableiten. Multiplicirt man je zwei unter einander geschriebene Factoren, so kommt:

$$[\sin \alpha - \sin(\beta + \gamma + \delta)][\sin \alpha + \sin(-\beta + \gamma + \delta)]$$

$$\times [\sin \alpha + \sin(\beta - \gamma + \delta)][\sin \alpha + \sin(\beta + \gamma - \delta)] = 0,$$

welche vier Factoren man der Reihe nach f, g, h, i setze. Man hat weiter:

$$fg = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\gamma + \delta) - \frac{1}{2} \cos 2\beta + \frac{1}{2} \cos 2(\gamma + \delta),$$

$$hi = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\gamma - \delta) - \frac{1}{2} \cos 2\beta + \frac{1}{2} \cos 2(\gamma - \delta).$$

Man setze nun einstweilen $r = 1$ und hiernach $\sin \alpha = a, \sin \beta = b$ etc., so wird

$$\cos(\gamma \pm \delta) = \cos \gamma \cos \delta \mp cd,$$

$$\cos 2\beta = 1 - 2b^2,$$

$$\cos 2(\gamma \pm \delta) = (1 - 2c^2)(1 - 2d^2) \mp 2cd \cos \gamma \cos \delta,$$

und hiernach:

$$fg = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2c^2d^2 + 2abcd - 2(ab + cd) \cos \gamma \cos \delta,$$

$$hi = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2c^2d^2 + 2abcd + 2(ab + cd) \cos \gamma \cos \delta,$$

folglich:

$$fghi = 0 = [a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2cd(ab + cd)]^2 - 4(ab + cd)^2(1 - c^2)(1 - d^2)$$

$$= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4cd(ab + cd)(a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 4(ab + cd)^2(1 - c^2 - d^2)$$

und wenn man jetzt noch r hinzufügt, so daß alle Glieder einerlei Dimension erhalten:

$$[4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2]r^2 = 4(ab + cd)[ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2)],$$

welche Gleichung sich ohne Schwierigkeit auf die bekannte Form bringen läßt:

$$\begin{aligned} &(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)r^2 \\ &= 4(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc). \end{aligned}$$

Bedeutend a, b, c, d nicht, wie oben angenommen wurde, die halben, sondern die ganzen Seiten, so fällt der Factor 4 weg.

Um jetzt die rationale Gleichung für das Sechseck und die höheren geraden Vielecke überhaupt zu finden, wird es genug sein, zu überlegen

1) daß diese Gleichung nach allen den darin vorkommenden $2m$ Bogen (wenn $2m$ die Seitenzahl ist) symmetrisch sein muß;

2) daß, indem man in $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots)$ nach und nach einen, zwei, drei Bogen etc. negativ nimmt, der cosinus in sinus, hierauf wieder in cosinus und so fort, abwechselnd, zu verwandeln ist, wie dies unmittelbar aus obiger Regel folgt: daß man also überhaupt cos oder sin vorzusetzen hat, nachdem die Anzahl der negativen Bogen, und folglich auch der positiven (weil die Anzahl aller $= 2m$), gerade oder ungerade ist;

3) daß höchstens nur m Bogen negativ zu nehmen sind, indem die cosinus oder sinus bei $m+n$ negativen Bogen mit den cos. oder sin. bei $m-n$ negativen, die Cosinus ganz, die Sinus doch ihrem absoluten Werth nach, identisch sind;

4) daß man aus eben dem Grunde von den Factoren mit m negativen Bogen nur die eine Hälfte beizubehalten hat; z. B. alle diejenigen, worin α negativ vorkommt, wie in IV.

Nach diesen Betrachtungen wird die rationalisirte Gleichung für das Sechseck sein:

$$\begin{aligned} \text{VI. } 0 &= \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) \\ &\times \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \dots + \zeta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma + \dots + \zeta) \dots \sin \frac{1}{2}(\alpha + \dots + \varepsilon - \zeta) \\ &\times \cos \frac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma + \dots + \zeta) \cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta - \gamma + \delta + \dots + \zeta) \dots \cos \frac{1}{2}(\alpha + \dots + \delta - \varepsilon - \zeta) \\ &\times \sin \frac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) \dots \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma + \delta - \varepsilon - \zeta). \end{aligned}$$

Die Anzahl sämmtlicher Factoren ist

$$1 + 6 + \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 32.$$

Daß aber dieses Product nach allen $\sin \alpha, \sin \beta, \dots, \sin \zeta$ rational ist, ergibt sich leicht daraus, daß für jeden dieser Sinus je 2 Factoren zusammengehören, die ein nach demselben rationales Product mit einander bilden. So gehört z. B. nach $\sin \delta$ zu dem Factor $\sin \frac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta)$ der Factor $\cos \frac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma - \delta + \varepsilon + \zeta) = \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta - \varepsilon - \zeta)$, und umgekehrt zu letzterem der erstere, indem ihr Product $= \frac{1}{2} \sin \delta - \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta + \gamma - \varepsilon - \zeta)$ ist.

Auf gleiche Art wird überhaupt die rationalisirte Gleichung für das $2m$ Eck der ersten Klasse sein:

$$0 = \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \dots) \sum \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \dots) \sum \cos \frac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma + \dots) \\ \times \sum \sin \frac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma + \delta + \dots),$$

und so fort, bis zu dem Product aus allen den Cosinussen (wenn m gerade), oder Sinussen (wenn m ungerade), bei welchen nebst einem und demselben Bogen, z. B. α , noch $m - 1$ andere negativ, die m übrigen aber positiv sind.

Die Anzahl sämmtlicher Factoren ist:

$$1 + 2m + \frac{2m(2m-1)}{1.2} + \frac{2m(2m-1)(2m-2)}{1.2.3} + \dots \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{2m \cdot (2m-1) \dots (m+1)}{1.2 \dots m} = 2^{2m-1}.$$

Was die geraden Vielecke der zweiten Klasse anbelangt, so hat die hierbei rational zu machende Gleichung die Form:

$$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \dots) = 0.$$

Nach der oben gegebenen Regel wird diese Gleichung nach $\sin \alpha$ rational gemacht, wenn man sie mit $\cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \dots)$ multiplicirt, und dieses nach $\sin \alpha$ rationale Product wird auch nach $\sin \beta$ rational werden, wenn man es mit $\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma + \dots) \sin \frac{1}{2}(-\alpha - \beta + \dots)$ multiplicirt etc. Die rationalisirte Gleichung eines geraden Vielecks der 2ten Klasse erhält man also unmittelbar aus der Gleichung desselben Vielecks der ersten Classe, wenn man in letzterer Gleichung die Wörter sinus und cosinus mit einander verwechselt. So wird z. B. die rational gemachte Gleichung für das Viereck der zweiten Klasse sein:

$$\text{VI}^*. \quad 0 = \begin{cases} \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \sin \frac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma + \delta) \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta - \gamma + \delta) \\ \quad \times \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma - \delta), \\ \cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma + \delta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma + \delta) \\ \quad \times \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \delta). \end{cases}$$

Hier ist also bei den Cosinussen die Anzahl der negativen Bogen ungerade und bei den Sinussen gerade, während daß bei der ersten Klasse das Gegentheil Statt fand. Daraus ergiebt sich ferner, daß IV. in IV*, VI. in VI*. etc., und umgekehrt, auch dann sich verwandelt, wenn man irgend einen der $2m$ Bogen, z. B. α , oder auch irgend drei, fünf etc. Bogen negativ nimmt, daß aber die Gleichungen IV., VI. etc. sowohl als IV*, VI*. etc. unverändert bleiben, wenn man irgend eine gerade Anzahl der $2m$ Bogen mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt. Es wird folglich auch die daraus abgeleitete Gleichung zwischen $r, a, b, c \dots$

eines geraden Vielecks der einen Klasse in die Gleichung des der anderen Klasse zugehörigen Vielecks sich verwandeln, oder sich nicht ändern, je nachdem man einer ungeraden oder geraden Anzahl der Seiten entgegengesetzte Werthe giebt.

Die Gleichung zwischen $r, a, b, \dots$ für das Viereck der zweiten Klasse wird daher sein:

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(-a+b+c-d)r^2 \\ = -4(ab-cd)(ac-bd)(ad-bc).$$

Diese Gleichung, so wie die vorige für das Viereck der ersten Klasse, besitzen demnach die Eigenschaft, daß die eine in die andere übergeht, wenn man irgend eine der vier Größen negativ nimmt, daß also jede derselben für sich auf gleiche Art sich ändert, man mag a in $-a$, oder b in $-b$ etc. verwandeln, und dabei in dem ersten Zustande sowohl, als in dem geänderten, nach a, b, c, d symmetrisch ist. Wir schließen hieraus, daß jede der beiden Gleichungen, in einzelne Glieder aufgelöst, außer symmetrischen Functionen von a^2, b^2, c^2, d^2 , als welche bei jedem Zeichenwechsel der Elemente $a, b, \dots$ dieselben bleiben, noch das Product $abcd$ enthalten werde, welches die einfachste symmetrische Function von a, b, c, d ist, die sich bei dem Zeichenwechsel eines jeden ihrer vier Elemente auf gleiche Art ändert. Und in der That lassen sich die Gleichungen IV. und IV*. in folgender Form darstellen:

$$[-a^2 - \dots - d^2 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + \dots + c^2d^2) \pm 8abcd]r^2 \\ = 4(a^2b^2c^2 + \dots + b^2c^2d^2) \pm 4abcd(a^2 + \dots + d^2),$$

wo das obere Zeichen für die erste, das untere für die zweite Klasse gilt. Auf ähnliche Art wird die Gleichung für das Sechseck aus symmetrischen Functionen von $a^2, b^2, \dots, f^2$ und aus dem Producte $abcdef$ zusammengesetzt sein, u. s. w.

Die Gleichungen für ungerade Vielecke dagegen enthalten nur symmetrische Functionen von $a^2, b^2, c^2, \dots$ und bleiben daher bei jedem Zeichenwechsel ihrer Elemente unverändert.

Noch kann man bemerken, daß die zwei rationalisirten Gleichungen der ersten und zweiten Klasse eines geraden Vielecks, in einander multiplicirt, ein Product geben, welches die Form der rationalisirten Gleichung eines ungeraden Vielecks hat, nemlich:

$$\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \dots) \sum \sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \dots) \dots \\ \times \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \dots) \sum \cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \dots) = 0,$$

einerlei mit

$$\sin(\alpha + \beta + \dots) \Sigma \sin(-\alpha + \beta + \dots) \dots = 0;$$

und daß, wenn man auch bei einem ungeraden Vielecke als rational zu machende Gleichung eine Gleichung von derselben Form, wie bei geraden Vielecken, zum Grunde legen wollte, man dennoch zu derselben rationalisirten Gleichung wie vorhin, gelangen würde. Setzte man z. B. für das Dreieck die Gleichung $\cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 0$, so müßte man sie, um sie nach $\sin \alpha$ rational zu machen, mit $\sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma)$, und wegen $\sin \beta$ noch mit $\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(-\alpha - \beta + \gamma)$ multipliciren. Dieses Product ist aber noch nicht nach $\sin \gamma$ rational, sondern wird es erst durch Multiplication mit

$\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \cos \frac{1}{2}(-\alpha + \beta - \gamma) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(-\alpha - \beta - \gamma)$,
wodurch man auf die obige Gleichung III. zurück kommt.

Das Bisherige wird genug sein, um zu sehen, wie man aus der Seitenzahl irgend eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks die Gleichung zwischen den Seiten und dem Halbmesser des Kreises finden könne, zugleich aber auch um einzusehen, daß diese Gleichungen, die bereits entwickelten für das Dreieck und Viereck ausgenommen, schon vom Fünfeck an sehr zusammengesetzt sein müssen. Ohne daher im Gegenwärtigen diese Entwicklung selbst vorzunehmen, will ich jetzt nur die hierbei gewiß noch am meisten interessirende Frage zu beantworten suchen, bis auf welchen Grad eine solche, nach den Potenzen von r geordnete Gleichung steige, wie viel also verschiedene Kreise existiren, in denen aus einer gegebenen Anzahl von Seiten ein Vieleck zusammengesetzt werden kann.

Weil in der Gleichung zwischen $r, a, b, c \dots$ nur die Quadrate von $a, b \dots$, und bei geraden Vielecken noch das Product aus allen Seiten vorkommen, so ersieht man zuerst, daß die Gleichung nur gerade Potenzen von r enthalten könne, und daß sie mithin, nach ihnen geordnet, von der Form sein werde:

$$\Theta) 0 = A + Br^2 + Cr^4 + \dots + Pr^{2p},$$

wo $A, B, C \dots$ rationale, ganze, symmetrische Functionen von $a^2, b^2 \dots$ (und $abc \dots$) sind, und p eine ganze, von der Seitenzahl m abhängige, jetzt eben zu bestimmende Zahl ist. Diese Gleichung läßt sich nemlich in p Factoren von der Form $r^2 - q$ auflösen, deren jeder, wenn anders q eine mögliche und positive Gröfse ist, einen besonderen Kreis, dessen

Halbmesser $= \pm \sqrt{q}$, zu erkennen giebt, in welchen das Vieleck beschrieben werden kann. Das Doppelzeichen $\pm$, womit hiernach jeder Halbmesser behaftet erscheint, rührt daher, daß die Richtung des Halbmessers, nach welcher er als positiv oder negativ bestimmt wird, hierbei nicht in Betracht kommen kann.

Um nun den Grad der Gleichung, oder $2p$ für ein gegebenes m zu bestimmen, wird es hinreichen, das erste und letzte Glied der Gleichung zu entwickeln, worauf dann der Unterschied zwischen den Dimensionen dieser Glieder dem gesuchten $2p$ gleich sein wird. Um die dabei anzuwendende Methode zuerst am Dreieck darzulegen, so ist in der rationalisirten Gleichung III. der erste Factor des $= 0$ gesetzten Products: $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, den man jetzt unter folgender Form darstelle:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} [\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma)] - \frac{1}{2i} [\cos(\alpha + \beta + \gamma) - i \sin(\alpha + \beta + \gamma)] \\ &= \frac{1}{2i} (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) (\cos \gamma + i \sin \gamma) \\ & - \frac{1}{2i} (\cos \alpha - i \sin \alpha) (\cos \beta - i \sin \beta) (\cos \gamma - i \sin \gamma) = a, \end{aligned}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist; und auf gleiche Weise

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha + \beta + \gamma) = b &= \frac{1}{2i} (\cos \alpha - i \sin \alpha) (\cos \beta + i \sin \beta) (\cos \gamma + i \sin \gamma) \\ & - \frac{1}{2i} (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta - i \sin \beta) (\cos \gamma - i \sin \gamma) \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es ist aber, wenn man einstweilen $r = 1$ nimmt:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \pm i \sin \alpha &= \sqrt{1 - a^2} \pm i a, \\ \cos \beta \pm i \sin \beta &= \sqrt{1 - b^2} \pm i b \text{ etc.} \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in $a, b, \dots$, so werden sich in dem Producte $abcd$ die Wurzelzeichen gegenseitig vernichten, und dieses Product $= 0$ gesetzt, und mit Hinzufügung der Potenzen von r die Dimensionen überall gleich gemacht, wird die gesuchte Gleichung für das Dreieck erhalten werden.

Zu demselben Resultate wird man nothwendig auch gelangen, wenn man statt der Wurzelgrößen $\sqrt{1 - a^2}$ etc., ihre Entwicklungen in unendliche Reihen: $1 - \frac{1}{2}a^2 - \dots$ etc. substituirt. Zugleich aber bieten diese, nach aufsteigenden Potenzen von $a, \dots$ geordneten Entwicklungen ein einfaches Mittel dar, um von der Gleichung $abcd = 0$ das Glied von der niedrigsten Dimension separat darzustellen, dadurch nemlich,

dass man von jeder Reihe ebenfalls nur das niedrigste Glied, welches überall = 1 ist, beibehält. Hierdurch wird

$$\cos \alpha \pm i \sin \alpha = 1 \pm i \alpha, \text{ etc. und}$$

$$a = \frac{1}{2i}(1+ia)(1+ib)(1+ic) - \frac{1}{2i}(1-ia)(1-ib)(1-ic),$$

und wenn man diese Producte entwickelt, und dabei gleichfalls nur die niedrigste Dimension von a, b, c stehen lässt:

$$a = a + b + c, \text{ und eben so } b = -a + b + c \text{ u. s. w.,}$$

folglich das niedrigste Glied in $abcd$, =

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

So wie das niedrigste Glied durch Auflösung der Wurzelgrößen $\sqrt{1-a^2}$ etc. in Reihen, nach aufsteigenden Potenzen von $a, \dots$ erhalten wurde, eben so wird sich das Glied ergeben, welches die höchsten Dimensionen von a, b, c in sich faßt, wenn man die Wurzelgrößen nach absteigenden Potenzen entwickelt, und von diesen Reihen gleichfalls nur den Anfang beibehält. Alsdann ist

$$\sqrt{1-a^2} = i\sqrt{a^2-1} = ia - \frac{i}{2a} - \dots,$$

folglich

$$\sqrt{1-a^2} + ia = 2ia,$$

$$\sqrt{1-a^2} - ia = -\frac{i}{2a} = \frac{1}{2ia} \text{ u. s. w., und}$$

$$a = \frac{1}{2i} \cdot 2ia \cdot 2ib \cdot 2ic - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2ia} \cdot \frac{1}{2ib} \cdot \frac{1}{2ic} = -4abc,$$

weil das zweite Glied, wo a, b, c im Nenner vorkommen, gegen das erste wegzulassen ist. Aus eben dem Grunde hat man

$$b = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{2ia} \cdot 2ib \cdot 2ic - \frac{1}{2i} \cdot 2ia \cdot \frac{1}{2ib} \cdot \frac{1}{2ic} = \frac{bc}{a},$$

$$c = \frac{ac}{b}, \quad d = \frac{ab}{c},$$

folglich das höchste Glied in $abcd = -4abc \cdot \frac{bc}{a} \cdot \frac{ac}{b} \cdot \frac{ab}{c} = -4a^2b^2c^2$.

Da dieses nur um zwei Dimensionen höher als das niedrigste ist, so ist die Gleichung selbst nur vom zweiten Grade, hat folglich keine Mittelglieder, und ist nach Hinzufügung von r^2 :

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)r^2 - 4a^2b^2c^2 = 0,$$

wie schon oben gefunden wurde.

Auf ähnliche Art lassen sich auch die Gleichungen für das Fünfeck und die ungeraden Vielecke mit noch mehreren Seiten behandeln. Ueber-

haupt nemlich wird von

$$\sin(\pm \alpha \pm \beta \pm \gamma \dots),$$

nach aufsteigenden Potenzen von a, b, c entwickelt, das erste oder niedrigste Glied $= \pm a \pm b \pm c \dots$ sein. Entwickelt man aber denselben Sinus nach absteigenden Potenzen, so ist das erste und also höchste Glied

$$= -\frac{1}{2}i(2ia)^{\pm 1}(2ib)^{\pm 1}(2ic)^{\pm 1} \dots \text{ oder } \\ \frac{1}{2}i(2ia)^{\mp 1}(2ib)^{\mp 1}(2ic)^{\mp 1} \dots$$

nachdem die Dimension des einen oder des anderen Ausdrucks positiv ist; wobei sich, weil die Anzahl von $a, b, c \dots$ ungerade ist, die i immer gegenseitig aufheben werden.

Bei dem Fünfeck ist demnach von

$\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) \Sigma \sin(-\alpha + \beta + \dots) \Sigma \sin(-\alpha - \beta + \gamma + \dots)$
das niedrigste Glied P in der Gleichung $(\ominus)$, =

$$(a + b + c + d + e) \Sigma (-a + b + c + d + e) \Sigma (-a - b + c + d + e),$$

und dessen Dimension $= 1 + 5 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 16$; für das höchste Glied A hat man

$$\sin(\alpha + \beta + \dots) = -\frac{1}{2}i \cdot 2ia \cdot 2ib \cdot 2ic \cdot 2id \cdot 2ie = 16abcde,$$

$$\sin(-\alpha + \beta + \dots) = -\frac{1}{2}i(2ia)^{-1} \cdot 2ib \cdot 2ic \cdot 2id \cdot 2ie = \frac{4bcde}{a},$$

$$\sin(-\alpha - \beta + \gamma + \dots) = -\frac{1}{2}i(2ia)^{-1} \cdot (2ib)^{-1} \cdot 2ic \cdot 2id \cdot 2ie = \frac{cde}{ab};$$

folglich A selbst

$$= 16abcde \Sigma \left(-\frac{4bcde}{a} \right) \Sigma \left(\frac{cde}{ab} \right),$$

und dessen Dimension $= 5 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$, weil jeder der 5 unter dem ersten Σ begriffenen Factoren von der dritten, und jeder der 10 Factoren unter dem zweiten Σ von der ersten Dimension ist; folglich der Unterschied der Dimensionen zwischen A und P , oder $2p = 5 - 1 + (3 - 1)5 = 4 + 2 \cdot 5$ und $p = 2 + 1 \cdot 5 = 7$; d. h. die Gleichung für das Fünfeck ist nach r^2 vom siebenten Grade. Sind daher alle 7 Wurzeln dieser Gleichung möglich, so giebt es sieben (im Allgemeinen) verschiedene Kreise, in welche sich mit den gegebenen fünf Seiten ein Fünfeck zeichnen läßt.

Weil

$$\Sigma \left(-4 \frac{bcde}{a} \right) = \left(-4 \frac{bcde}{a} \right) \left(-4 \frac{acde}{b} \right) \dots = -4^5 a^3 b^3 c^3 d^3 e^3$$

und

$$\Sigma \left(\frac{cde}{ab} \right) = \frac{cde}{ab} \cdot \frac{bde}{ac} \dots \frac{abc}{de} = a^2 b^2 \dots e^2,$$

so ist das höchste Glied, entwickelt $= -4^7 a^6 b^6 c^6 d^6 e^6$; mithin das Product aus den Quadraten aller 7 Halbmesser

$$r'^2 r''^2 \dots r^{vii^2} = \frac{2^{14} a^6 b^6 \dots e^6}{(a + \dots e) \Sigma(-a + b + \dots) \Sigma(-a - b + \dots)};$$

folglich, wenn $a, b, \dots$ nicht die halben, sondern die ganzen Seiten selbst bedeuten:

$$r' r'' \dots r^{vii} = \frac{a^3 b^3 \dots e^3}{\sqrt{[(a + b + \dots + e) \Sigma(-a + b + \dots + e) \Sigma(-a - b + c + d + e)]}}.$$

Um ein einfaches Beispiel zu geben, wie sich mit denselben fünf Seiten in sieben verschiedene Kreise Fünfecke beschreiben lassen, so wollen wir zuerst alle fünf Seiten einander gleich annehmen. Alsdann reduciren sich die sieben verschiedenen Kreise auf drei, indem fünf derselben einander gleich werden. Das in den grössten derselben (Fig. 6.) einzuschreibende Fünfeck ist das gewöhnliche regulaire, das Fünfeck in dem kleinsten derselben (Fig. 8.) ist das unter dem Namen des Pentalpha bekannte. Das Fünfeck in dem mittleren Kreise (Fig. 7.) hat die Gestalt eines regulären Dreiecks, indem hier drei auf einander folgende Seiten, z. B. BC, CD, DE , in einander fallen. Lassen wir nun jede der fünf Seiten um beliebige kleine Grössen verkleinert oder vergrößert werden, so werden (Fig. 6. und 8.) ihre Gestalt nicht wesentlich ändern; in (Fig. 7.) aber werden die drei zusammenfallenden Seiten etwas aus einander gehen, und dadurch Figuren, wie (9., 10. und 11.) bilden. Da nun die mittelste der drei vorher in einander fallenden Seiten, jede der fünf Seiten sein kann, so entstehen aus (Fig. 7.) fünf verschiedene Fünfecke und eben so viel, wenn auch nur wenig, von einander verschiedene Kreise.

Man siehet aus dieser für das Fünfeck angestellten Untersuchung, daß überhaupt aus jedem, in der rationalisirten trigonometrischen Gleichung als Factor vorkommenden Sinus, $\sin(\pm a \pm \beta \pm \gamma \dots)$ für das Glied P in der nach Potenzen von r^2 geordneten Gleichung Θ ein Factor von der ersten Dimension $(\pm a \pm b \pm \dots)$, für das Glied A aber ein Factor von der Dimension $f - g$ erwächst, wenn von allen den in $\sin(\pm a \pm \beta \dots)$ vorkommenden Bogen, f derselben einerlei Zeichen, die g übrigen das entgegengesetzte haben, und f die grössere Zahl ist; daß mithin die Differenz der Dimensionen von A und P , $= 2p$, wegen jedes $\sin(\pm a \pm \dots)$

einen Zuwachs von $f-g-1$, und also wegen jedes $\sum \sin(\pm \alpha \pm \dots)$ einen Zuwachs von $n(f-g-1)$ Einheiten erhält, wenn die Anzahl der unter Σ enthaltenen, in einander zu multiplicirenden Sinusse $= n$ ist.

Wenden wir dieses auf das Siebeneck an, dessen rationalisirte Gleichung

$\sin(\alpha + \dots + \eta) \sum \sin(-\alpha + \dots) \sum \sin(-\alpha - \beta + \dots) \sum \sin(-\alpha - \beta - \gamma + \dots) = 0$ ist, so haben wir für $\sin(\alpha + \dots + \eta)$, $f=7$, $g=0$; für das 1ste Σ , $f-g=5$, $n=7$; für das zweite Σ , $f-g=3$, $n=\frac{7.6}{1.2}$; für das 3te Σ , $f-g=1$, $n=\frac{7.6.5}{1.2.3}$, also $f-g-1$ der Reihe nach $= 6, 4, 2, 0$, und daher

$$2p = 6.1 + 4.7 + 2.\frac{7.6}{1.2},$$

$$p = 3.1 + 2.7 + 1.\frac{7.6}{1.2} = 38,$$

und es kann folglich acht und dreißig verschiedene Kreise geben, in welchen sich mit denselben gegebenen sieben Seiten Siebenecke beschreiben lassen.

Eben so ist nun auch im Allgemeinen bei dem $(2m+1)$ Eck

für $\sin(\alpha + \beta + \dots) \dots f-g-1 = 2m$, $n=1$,

für das 1ste $\Sigma \dots = 2m-2$, $\dots = 2m+1$,

- - 2te $\Sigma \dots = 2m-4$, $\dots = \frac{2m+1.2m}{1.2}$,

- - vorletzte $\Sigma \dots = 2$, $\dots = \frac{2m+1.2m \dots m+3}{1.2 \dots m-1}$,

- - letzte $\Sigma \dots = 0$,

und hiermit, wenn man von $f-g-1$ die halben Werthe nimmt:

$$p = m.1 + (m-1)(2m+1) + (m-2)\frac{2m+1.2m}{1.2} + (m-3)\frac{2m+1.2m.2m-1}{1.2.3} \\ \dots + 1.\frac{2m+1.2m \dots m+3}{1.2 \dots m-1}.$$

Dieser Reihen-Ausdruck für p läßt sich aber leicht in einen geschlossenen verwandeln. Man hat:

$$p = m \left[1 + (2m+1) + \frac{(2m+1)2m}{1.2} + \dots + \frac{(2m+1).2m \dots (m+3)}{1.2 \dots m-1} \right] \\ - (2m+1) \left[1 + 2m + \frac{2m(2m-1)}{1.2} + \dots + \frac{2m(2m-1) \dots m+3}{1.2 \dots m-2} \right].$$

Weil

Weil nun

$$1 + (2m+1) + \dots + \frac{(2m+1)\dots(m+3)}{1\dots m-1} + \frac{(2m+1)\dots(m+2)}{1\dots m} = 2^{2m}$$

und

$$1 + 2m + \frac{2m \cdot 2m-1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{2m \dots m+3}{1 \dots m-2} + \frac{2m \dots m+2}{1 \dots m-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2m \dots m+1}{1 \dots m} = 2^{2m-1},$$

so wird

$$p = m \left[2^{2m} - \frac{2m+1 \dots m+2}{1 \dots m} \right] - (2m+1) \left[2^{2m-1} - \frac{2m \dots m+2}{1 \dots m-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2m \dots m+1}{1 \dots m} \right],$$

welches sich ohne Weiteres auf

$$p = \frac{2m+1}{2} \cdot \frac{2m \cdot 2m-1 \dots m+2 \cdot m+1}{1 \cdot 2 \dots m-1 \cdot m} - 2^{2m-1}$$

reducirt. Hiernach ist also der Grad der nach r^2 geordneten Gleichung

$$\text{für das Dreieck} \dots = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} - 2^1 = 1,$$

$$\text{Fünfeck} \dots = \frac{5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} - 2^3 = 7,$$

$$\text{Siebeneck} \dots = \frac{7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 2^5 = 38,$$

$$\text{Neuneck} \dots = \frac{9}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 2^7 = 187,$$

$$\text{Elfteck} \dots = \frac{11}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - 2^9 = 874,$$

$$\text{Dreizehneck} = \frac{13}{2} \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - 2^{11} = 3958,$$

u. s. w., welche Zahlen, wie man sieht, so schnell wachsen, daß mit der Formel für das Dreizehneck ein schon ziemlich starkes Buch ausgefüllt werden könnte. Es lassen sich diese Zahlen auch noch sehr einfach auf recurrirende Weise darstellen. Es besteht nemlich der Ausdruck für p aus zwei Theilen: einem Binomial-Coefficienten und einer Potenz von 2. Ebenso ist für das $(2m-1)$ Eck:

$$p_1 = \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{2m-2 \cdot 2m-3 \dots m+1 \cdot m}{1 \cdot 2 \dots m-2 \cdot m-1} - 2^{2m-3}.$$

Eliminirt man nun aus den Ausdrücken für p und p_1 das eine Mal die Binomial-Coefficienten und das andere Mal die Potenzen der 2, so erhält man folgende zwei recurrirende Bestimmungen:

$$mp - 2(2m+1)p_1 = 2^{2m-2}, \quad p - 4p_1 = \frac{2m-1 \cdot 2m-2 \dots m+1}{1 \cdot 2 \dots m-1},$$

wonach

$$\begin{aligned}
7 &= \frac{1}{2}(10 \cdot 1 + 4) = 4 \cdot 1 + 3, \\
38 &= \frac{1}{3}(14 \cdot 7 + 4^2) = 4 \cdot 7 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}, \\
187 &= \frac{1}{4}(18 \cdot 38 + 4^3) = 4 \cdot 38 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\
874 &= \frac{1}{5}(22 \cdot 187 + 4^4) = 4 \cdot 187 + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Noch fließt hieraus, daß $p:p_1 > 4:1$, d. h. daß jede folgende Zahl größer als das Vierfache der vorhergehenden ist. In der That sind die Exponenten des Verhältnisses $p:p_1$, der Reihe nach:

$$\frac{7}{1} = 7, \frac{38}{7} = 5\frac{3}{7}, \frac{187}{38} = 4\frac{35}{38}, \frac{874}{187} = 4\frac{126}{187}, \frac{3958}{874} = 4\frac{231}{437} \text{ etc.}$$

Auch läßt sich zeigen, daß diese Ueberschüsse der Exponenten über 4 immer kleiner und über jede angebbare Grenze kleiner werden, je weiter man in der Reihe fortgeht.

Was nunmehr den Grad der Gleichung für ein gerades Vieleck betrifft, so ist zuerst einleuchtend, daß die Gleichungen für das $2m$ Eck der einen und anderen Klasse von gleichem Grade sein müssen, indem jede dieser zwei Gleichungen in die andere durch bloße Veränderung des Vorzeichens irgend eines der Elemente übergeht. Sodann läßt sich zeigen, daß diese zwei Gleichungen für das $2m$ Eck von demselben Grade, als die Gleichung für das nächst niedrigere ungerade $(2m-1)$ Eck, sind.

Um diesen Satz zuerst an der Gleichung für das Viereck zu erläutern, so ist die Gleichung IV., wenn man darin den Sinus des letzten Bogens δ schon rational darstellt:

$$\begin{aligned}
0 &= [\sin(\alpha + \beta + \gamma) - \sin \delta] [\sin(-\alpha + \beta + \gamma) + \sin \delta] \\
&\quad \times [\sin(\alpha - \beta + \gamma) + \sin \delta] [\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin \delta].
\end{aligned}$$

Von der hieraus abzuleitenden rationalen Gleichung zwischen a, b, c, d wollen wir nun, eben so wie vorhin, das Glied von der niedrigsten und das von der höchsten Dimension zu bestimmen suchen. Zu diesem Zweck wird in beiden Fällen für $\sin \delta$ nur d zu substituieren sein. Dagegen wird man die übrigen Sinus $\sin(\pm \alpha \pm \dots)$, wie oben beim Dreieck, das eine Mal nach aufsteigenden, das andere Mal nach absteigenden Potenzen von a, b, c zu entwickeln, und von beiden Entwicklungen nur die Anfangsglieder beizubehalten haben. Substituirt man daher die beim Dreieck für diese Glieder gefundenen Werthe, so ergibt sich in der Gleichung des Vierecks das Glied von der niedrigsten Dimension

$$= (a+b+c-d)(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d),$$

und das Glied von der höchsten:

$$= (-4abc-d)\left(\frac{bc}{a}+d\right)\left(\frac{ac}{b}+d\right)\left(\frac{ab}{c}+d\right),$$

welches sich, wenn man im ersten Factor das einfache d gegen das Product abc , wie erforderlich, weglässt, auf

$$-4(bc+ad)(ac+bd)(ab+cd)$$

reducirt. Da nun letzteres Glied nur um zwei Dimensionen höher als das erstere ist, und die Gleichungen für die geraden sowohl als ungeraden Vielecke nur gerade Potenzen von r enthalten können, so wird letzteres Glied, mit Hinzufügung des ersteren, durch r^2 noch multiplicirten Gliedes, $= 0$ gesetzt, die Gleichung für das Viereck sein; vollkommen so, wie sie bereits oben auf anderem Wege gefunden wurde.

Wenden wir dieselbe Verfahrens-Art auf die Gleichung VI. für das Sechseck der ersten Klasse an, so verwandelt sich das darin $= 0$ gesetzte Product von 32 Factoren, wenn man dasselbe nach dem Sinus des letzten Bogens ζ rational darstellt, und deshalb je einen Sinus mit einem Cosinus multiplicirt, in ein Product aus 16 Factoren von der Form $\sin(\pm\alpha \pm \beta \pm \dots \pm \epsilon) \pm \sin \zeta$, wobei $\sin \zeta$ des Vorzeichen $+$ oder $-$ erhält, nachdem in $\sin(\pm\alpha \pm \dots)$ die Anzahl der positiven Bogen, die ich immer größer annehme als die Anzahl der negativen, gerade oder ungerade ist. Zu demselben Producte wird man daher auch gelangen, wenn man in der rational gemachten Gleichung V. für das Fünfeck, zu jedem der 16 Sinusfactoren noch $\sin \zeta$ mit $+$ oder $-$ nach der eben gegebenen Vorschrift hinzufügt, so daß sich die Gleichung VI. auch unter folgender Form darstellen läßt:

$$\begin{aligned} [\sin(\alpha + \beta + \dots + \epsilon) - \sin \zeta] &\Sigma [\sin(-\alpha + \beta + \dots) + \sin \zeta] \\ &\Sigma [\sin(-\alpha - \beta + \gamma + \dots) - \sin \zeta] = 0. \end{aligned}$$

Denn man sieht leicht, daß die zwei Factoren von der Form:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}(\pm \alpha \dots \pm \zeta) \text{ und} \\ \sin \frac{1}{2}(\pm \alpha \dots \pm \zeta), \end{aligned}$$

in welche jeder dieser 16 Factoren aufgelöst werden kann, unter den 32 Factoren von VI. vorkommen müssen, so wie auch, daß man unter den 32 aus dieser Auflösung entstehenden Factoren keine zwei einander gleich bekommt.

Indem man nun die Gleichung VI. in ihrer gegenwärtigen Form, eben so wie im Vorigen die Gleichung V. zur Erforschung des Grades der Gleichung für das Sechseck anwendet, so wird offenbar durch das Hinzutreten von $\sin \zeta$, wofür man jetzt f zu setzen hat, die Dimension des ersten Gliedes in der Entwicklung von $\sin(\pm \alpha \pm \dots)$, sei es nach aufsteigenden oder absteigenden Potenzen von $a, b, c \dots$, nicht geändert. Ist nemlich in dem einen, wie in dem anderen Falle dieses erste Glied von $\sin(\pm \alpha \pm \dots)$ nur von der ersten Dimension, so wird man $\pm f$, weil es dieselbe Dimension hat, hinzusetzen müssen. Gehört aber das Glied einer höheren Dimension an, so fällt f gegen dasselbe weg. Es muß folglich auch in der Entwicklung des ganzen Products für das Sechseck die niedrigste und höchste Dimension mit der niedrigsten und höchsten Dimension des Ausdrucks, welcher aus der Entwicklung des Products für das Fünfeck entspringt, einerlei sein, und es wird folglich auch in der Gleichung für das Sechseck r^2 zu demselben Grad, als in der Gleichung für das Fünfeck, steigen.

Von den beiden äußersten Gliedern in der Gleichung für das Sechseck der ersten Klasse findet sich auf diese Weise das eine:

$$\Sigma(-a+b+c+d+e+f) \Sigma(-a-b+c+d+e-f) r^{14},$$

wo das erste Σ sechs Factoren in sich faßt, die Anzahl der Factoren beim zweiten Σ , wo drei Elemente, und darunter, immer ein und dasselbe, hier f , negativ zu nehmen sind, ist $= \frac{5.4}{1.2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6.5.4}{1.2.3} = 10$. Das andere äußerste Glied ist:

$$16abcde \Sigma\left(-\frac{4bcde}{a}\right) \Sigma\left(\frac{cde}{ab} - f\right) = 16abcde(-4^5 a^3 b^3 \dots e^3) \Sigma\left(\frac{cde-abf}{ab}\right) \\ = -2^{14}(cde-abf)(bde-acf)(bce-adf)(bcd-aef)(ade-bcf) \\ \times (ace-bdf)(acd-bef)(abe-cdf)(abd-cef)(abc-def),$$

wo f immer in dem negativen Theile jedes Factors vorkommt, so wie in dem zweiten Σ des ersteren Gliedes f immer negativ zu nehmen war. Man sieht aber bald, daß sich weder das eine noch das andere Glied ändert, wenn man statt f irgend ein anderes der 6 Elemente dieser Bedingung unterwirft, daß mithin beide Glieder nach allen 6 Elementen, wie gehörig, symmetrisch sind.

Die Gleichung für das Sechseck der ersten und folglich auch der zweiten Klasse ist daher nach r^2 , eben so wie die Gleichung für das

Fünfeck, vom 7ten Grade; und es können mithin unter der Voraussetzung, daß alle Wurzeln möglich und verschieden von einander sind, mit den sechs gegebenen Seiten in 14 verschiedene Kreise Sechsecke gezeichnet werden, von denen die eine Hälfte der einen, die andere der anderen Klasse angehört.

Auf eben die Art wird nun auch jede der beiden Gleichungen für das Achteck mit der Gleichung für das Siebeneck von einerlei Grade, vom 38sten, sein, u. s. w. bei noch mehrseitigeren geraden Vielecken. Denn eben so, wie vorhin aus der trigonometrischen Gleichung für das Fünfeck die trigonometrische Gleichung des Sechsecks durch bloßes Anfügen von $\pm \sin \zeta$ zu den einzelnen Factoren der ersteren Gleichung abgeleitet wurde, und durch dieses Anfügen die Dimensionen der beiden äußersten Glieder in der Gleichung des Fünfecks nicht verändert wurden, so wird man denselben Schluss auch von jedem anderen ungeraden Vieleck auf das nächstfolgende gerade machen können.

Wir kommen nunmehr zu dem letzten Theile unserer Untersuchung, zu der Bestimmung der Fläche eines in einen Kreis beschriebenen Vielecks aus den gegebenen Seiten. Man denke sich aus dem Mittelpunkte des Kreises nach allen Spitzen des Vielecks - Radien gezogen, so wird dadurch die Fläche des Vielecks in eben so viele gleichschenklige Dreiecke zerlegt, welche den Mittelpunkt des Kreises zur gemeinschaftlichen Spitze und die Seiten des Vielecks zu Grundlinien haben. Da jeder der Schenkel dieser Dreiecke $= r$ und die Winkel an den Spitzen derselben, in ihrer Folge $= 2\alpha, 2\beta, \dots$ sind, so sind die Flächen der Dreiecke $= \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha, \frac{1}{2} r^2 \sin 2\beta, \text{etc.}$; mithin, wenn man durch F die Fläche des Vielecks bezeichnet:

$$2F = r^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma + \dots),$$

und es kommt nun darauf an, aus dieser Gleichung für das Vieleck zwischen $r, a, b, c \dots$ und aus den Gleichungen: $r \sin \alpha = a, r \sin \beta = b, \text{etc.}$ die Größen $r, \alpha, \beta, \dots$ zu eliminiren, um somit eine Gleichung zwischen $F, a, b, c, \dots$ zu erhalten.

Bevor wir aber diese Operationen selbst vornehmen, wird es nöthig sein, uns über die Bedeutung der Vielecksfläche vollkommen zu verständigen. Da nemlich die meisten der hier vorkommenden Vielecke von solcher Beschaffenheit sind, daß zwei oder mehrere oder auch alle Seiten sich innerhalb ihrer Endpunkte schneiden, so fragt es sich, was dann

unter dem Werthe der Vielecksfläche zu verstehen sei, und ob auch in diesen Fällen die oben gegebene Formel, wobei wir uns stillschweigend ein gewöhnliches Vieleck ohne dergleichen Durchschnittspunkte dachten, angewendet werden könne.

Eine gerade Linie von veränderlicher Länge sei mit dem einen ihrer Endpunkte im Mittelpunkte des Kreises fest, während der andere Endpunkt den Perimeter des Vielecks durchlaufe. Die hiermit von der Linie überstrichene Fläche, indem man die mit entgegengesetzter Bewegung beschriebenen Theile mit entgegengesetzten Zeichen nimmt, ist der Flächeninhalt des Vielecks. Sind daher A, B, C drei aufeinander folgende Spitzen im Perimeter und Z der Mittelpunkt des Kreises, so werden, indem der bewegliche Endpunkt der Linie von A bis B und von B bis C geradlinig fortgeht, von der Linie selbst die Dreiecke ZAB und ZBC beschrieben, und diese sind, jener Erklärung zufolge, mit einerlei oder verschiedenen Zeichen zu verbinden, nachdem der Mittelpunkt Z innerhalb oder ausserhalb des Winkels ABC liegt. Geht die eine Seite BC durch Z selbst, so ist das ihr zugehörige Dreieck $ZBC = 0$.

Hiermit ist nun auch die obige Formel für F im Einklange. Denn die Zeichen der Dreiecksflächen $\frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha$ und $\frac{1}{2}r^2\sin 2\beta$ richten sich nach den Zeichen von $\sin 2\alpha$ und $\sin 2\beta$. Diese sind aber einerlei, wenn $2\alpha = \text{Bogen } AB$ und $2\beta = BC$ zugleich gröfser oder zugleich kleiner als 180° sind; sie sind verschieden, wenn von den Bogen AB und BC der eine gröfser, der andere kleiner als 180° ist; womit, wie man leicht sieht, die vorhin bemerkte Lage von Z gegen den Winkel ABC ganz übereinstimmt.

Um jetzt zur Entwicklung der Gleichung zwischen $F, a, b, c, \dots$ überzugehen, so übersieht man leicht, dafs diese Gleichung, wenn die Gleichung zwischen $r^2, a, b, \dots$ nach r^2 vom p ten Grade ist, ebenfalls p verschiedene Werthe für F angeben mufs, indem jedes in einen anderen Kreis beschriebene Vieleck auch eine andere Fläche haben wird, dafs ferner, weil die Fläche eben so gut negativ als positiv genommen werden kann, die Gleichung nach Potenzen von F^2 fortgehen, und mithin nach F^2 vom p ten Grade sein wird.

Ich will nun wenigstens die Möglichkeit darthun, zu dieser Gleichung zu gelangen, und deshalb zuvörderst zeigen, dafs F^2 immer als rationale Function von $r^2, a, b, c, \dots$ dargestellt werden kann.

Zu dem Ende lasse man a um da wachsen, während $b, c, \dots$ unverändert bleiben, und suche die daraus für r entstehende Zunahme dr . Weil immer $\alpha + \beta + \gamma + \dots$ einem Vielfachen von 180° gleich ist, so hat man:

$$d\alpha + d\beta + d\gamma + \dots = 0.$$

Sodann folgt aus den Gleichungen $r \sin \alpha = a$, $r \sin \beta = b$, u. s. w.,

$$r \cos \alpha d\alpha + \sin \alpha dr = da,$$

$$r \cos \beta d\beta + \sin \beta dr = 0, \quad r \cos \gamma d\gamma + \sin \gamma dr = 0, \text{ etc.}$$

Dividirt man diese Gleichungen resp. durch $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma, \dots$ und addirt sie hierauf, so kommt, wegen $d\alpha + d\beta + \dots = 0$:

$$(\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma + \dots) dr = \frac{da}{\cos \alpha}.$$

Es ist folglich, weil $\tan \alpha + \tan \beta + \dots$ eine symmetrische Function von $\alpha, \beta, \dots$ ist, $\frac{dr}{da}$ umgekehrt mit $\cos \alpha$, und eben so $\frac{dr}{db}, \frac{dr}{dc}, \dots$ umgekehrt mit $\cos \beta, \cos \gamma, \dots$ proportional.

Diesen Satz, daß die partiellen Differential-Quotienten des Halbmessers eines Kreises nach den Seiten eines eingeschriebenen Vielecks im umgekehrten Verhältnisse der Abstände der Seiten vom Mittelpunkte ($= r \cos \alpha, r \cos \beta, \dots$) sind, wollen wir nun benutzen, um aus dem Ausdrucke für F die Cosinus von $\alpha, \beta, \dots$ wegzuschaffen. Weil $\frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha = r a \cos \alpha$ etc., so hat man:

$$F^2 = r^2(a \cos \alpha + b \cos \beta + \dots)^2$$

$$= \left(\frac{a}{\cos \alpha} r^2 \cos \alpha^2 + \frac{b}{\cos \beta} r^2 \cos \beta^2 + \dots \right) (a \cos \alpha + b \cos \beta + \dots),$$

mithin, weil $r^2 \cos \alpha^2 = r^2 - a^2$ etc., und wenn man $\frac{dr}{da} = a', \frac{dr}{db} = b'$ etc. setzt, wo daher

$$\frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \dots = \cos \alpha : \cos \beta : \dots :$$

$$F^2 = [a a' (r^2 - a^2) + b b' (r^2 - b^2) + \dots] \left[\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \dots \right].$$

Sei jetzt die aus dem Vorigen als bekannt anzunehmende Gleichung zwischen $r^2, a, b, c, \dots$:

$$0 = A + B r^2 + C r^4 + \dots,$$

wo $A, B, C, \dots$ bekannte rationale Functionen von $a, b, c, \dots$ sind.

Differentiirt man diese Gleichung nach a und r , so erhält man:

$$0 = \frac{dA}{da} + r^2 \frac{dB}{da} + r^4 \frac{dC}{da} + \dots + 2B r a' + 4C r^3 a' + \dots,$$

und hieraus

$$a' = - \frac{\frac{dA}{da} + r^2 \frac{dB}{da} + r^4 \frac{dC}{da} + \dots}{2Br + 4Cr^3 + \dots},$$

und eben so b' , c' , ... gleich bekannten rationalen Functionen von r^2 , a , b , c , ... Substituirt man nun diese Functionen in dem zuletzt erhaltenen Ausdrucke für F^2 , so bekommt man auch F^2 durch eine rationale Function von r^2 , a , b , c , ... ausgedrückt, wie zu erweisen war.

Werde diese letztere Gleichung für F^2 durch

$$F^2 = \varphi[r^2, a, b, \dots]$$

bezeichnet, so ist jetzt noch übrig, aus ihr und der Gleichung

$$0 = A + Br^2 + \dots,$$

r^2 zu eliminiren, ein Geschäft, welches außerdem, daß es überaus weitläufig ist, keine weitere Schwierigkeit hat. Heißen nemlich die p Werthe, welche in der Gleichung

$$0 = A + Br^2 + \dots + Pr^{2p},$$

für r^2 substituirt, ihr Genüge leisten: a , b , c , ... p , so sind $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{P}$, ... bekannte rationale symmetrische Functionen von a , b , ... p , und jede andere rationale symmetrische Function von a , b , ... p läßt sich auf bekannte Weise durch $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{P}$, ... rational ausdrücken. Die Quadrate der Vielecksflächen aber, die diesen p verschiedenen Werthen von r^2 angehören, sind: $\varphi(a, a, b, \dots)$, $\varphi(b, a, b, \dots)$, $\varphi(c, a, b, \dots)$, ..., und mithin die Gleichung, welche sie alle umfaßt:

$$\{F^2 - \varphi(a, a, b, \dots)\} \{F^2 - \varphi(b, a, b, \dots)\} \dots = 0.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so steigt sie nach F^2 bis zum p ten Grade, und kann von a , b , c , ... offenbar nur symmetrische Functionen enthalten, die man, wie oben bemerkt, auch durch $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{P}$, ... ausdrücken kann. Thut man dieses, und setzt endlich statt A , B , ... P ihre Werthe durch a , b , c , ... ausgedrückt, so erhält man die gesuchte rationale Gleichung für den Flächeninhalt, die nach F^2 vom p ten Grade ist, und in deren Coefficienten nur a , b , c , ... noch vorkommen.

Um diese Methode schließlic auf das Dreieck anzuwenden, obwohl sich bei diesem und bei dem Viereck im Kreise die Gleichung zwischen den Seiten und der Fläche auf weit kürzeren Wegen finden läßt, so hat man beim Dreieck:

$$0 = A + Br^2, \text{ wo } A = -4a^2b^2c^2, B = 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4 \\ = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2),$$

folglich

$$\frac{dA}{da} = -8ab^2c^2, \quad \frac{dB}{da} = 4a(b^2 + c^2 - a^2)$$

und

$$2Bra' = -\frac{dA}{da} - r^2 \frac{dB}{da} = \frac{1}{B} \left(A \frac{dB}{da} - B \frac{dA}{da} \right) \\ = \frac{8ab^2c^2}{B} (c^2 + a^2 - b^2) (a^2 + b^2 - c^2),$$

wofür man auch setzen kann:

$$\frac{a}{a'} = Qa^2(b^2 + c^2 - a^2),$$

wo Q eine symmetrische Function von a, b, c ist. Auf gleiche Art wird sein:

$$\frac{b}{b'} = Qb^2(c^2 + a^2 - b^2), \quad \frac{c}{c'} = Qc^2(a^2 + b^2 - c^2),$$

folglich:

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = QB.$$

Sodann ist $r^2 - a^2 = -\frac{A + a^2B}{B} = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2}{B}$, folglich

$$(r^2 - a^2)a a' = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)}{BQ},$$

und eben so

$$(r^2 - b^2)bb' = \frac{b^2(c^2 + a^2 - b^2)}{BQ} \text{ etc.,}$$

mithin

$$(r^2 - a^2)a a' + (r^2 - b^2)bb' + (r^2 - c^2)cc' = \frac{B}{BQ} = \frac{1}{Q},$$

und endlich

$$F^2 = [(r^2 - a^2)a a' + \dots] \left[\frac{a}{a'} + \dots \right] = \frac{1}{Q} \cdot QB = B,$$

d. i.

$$F = \sqrt{[(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)]},$$

von welcher Wurzelgröfse der vierte Theil zu nehmen ist, wenn a, b, c die ganzen Seiten bedeuten. Noch kann man bemerken, daß der Ausdruck für F^2 durch $r^2, a, b, c, \dots, a', b', \dots$, mit Verzichtung auf dessen symmetrische Form, sich etwas einfacher darstellen läßt. Es ist nemlich:

$$\frac{F}{r \cos \alpha} = a + \frac{b \cos \beta}{\cos \alpha} + c \cdot \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} + \dots = a + b \frac{a'}{b'} + c \frac{a'}{c'} + \dots,$$

folglich

$$F^2 = (r^2 - a^2) a'^2 \left(\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} + \dots \right)^2.$$

Einige andere Formeln, die bei weiterer Fortsetzung dieser Untersuchungen von Nutzen sein können, sind:

$$\frac{dF}{da} = 2r \cos \alpha, \quad \frac{dF}{db} = 2r \cos \beta, \quad \text{etc.},$$

folglich

$$\frac{dF}{da} \cdot \frac{dr}{da} = \frac{dF}{db} \cdot \frac{dr}{db} = \text{etc.} = \frac{2r}{\tan \alpha + \tan \beta + \dots}.$$

Da endlich r und F durch $a, b, c, \dots$ ausgedrückt, homogene Functionen dieser Gröfsen sind, r von der ersten, F von der zweiten Dimension, so hat man:

$$r = a \frac{dr}{da} + b \frac{dr}{db} + c \frac{dr}{dc} + \dots$$

$$2F = a \frac{dF}{da} + b \frac{dF}{db} + c \frac{dF}{dc} + \dots$$

wie dies auch schon aus dem Vorigen sich leicht ergibt.

3.

Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré.

(Par M. G. Lejeune-Dirichlet, prof. d. math. à Breslau.)

1^{er} M é m o i r e.

On trouve, dans les annonces littéraires de Gottingue (11. avril 1825), l'extrait d'un mémoire d'analyse indéterminée que M. Gauß a présenté à la société royale des sciences de cette ville, mais qui n'a pas encore été imprimé. Ce mémoire est le premier d'une suite de mémoires que l'illustre auteur des *disquisitiones arithmeticae* se propose de donner sur la théorie des résidus biquadratiques et a pour objet de déterminer les caractères distinctifs des nombres premiers diviseurs de la formule $x^4 - 2$. L'auteur y établit deux théorèmes extrêmement élégans qui peuvent servir à décider, si un nombre premier, diviseur de $x^2 - 2$, divise ou ne divise pas la formule précédente. Ayant eu connaissance, dans le courant de l'année qui vient de finir, de l'extrait cité qui ne contient que les énoncés des deux théorèmes dont il vient d'être question et de quelques propositions auxiliaires, j'eus le désir de démontrer de mon côté les beaux théorèmes découverts par M. Gauß. Les recherches que je fis dans cette vue me firent trouver une démonstration fondée sur des considérations extrêmement simples et probablement tout-à-fait différente de celle de M. Gauß, qui paraît exiger des recherches préliminaires très délicates et assez étendues. J'appliquai ensuite des considérations analogues à d'autres questions et particulièrement à la recherche des propriétés qui distinguent les diviseurs premiers de la formule $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$; et je parvins ainsi à un grand nombre de théorèmes intéressans. L'exposition rapide d'une partie des résultats auxquels ces recherches m'ont conduit est l'objet du présent mémoire. Je commence par poser quelques définitions et par énoncer quelques théorèmes très faciles à établir et sur lesquels nous aurons à nous appuyer dans la suite.

1.

„Si l'on peut attribuer à l'indeterminée x une valeur telle que „ $x^4 - A$ devienne divisible par B , A sera dit résidu biquadratique par „rapport à B .”

Il est facile de voir que, si un nombre A est résidu biquadratique par rapport à un nombre B , ou, en d'autres termes, si B est diviseur de $x^4 - A$, chaque facteur premier de B sera pareillement diviseur de $x^4 - A$, et réciproquement que, si cette condition a lieu par rapport à tout facteur premier du nombre B , B sera lui-même diviseur de $x^4 - A$. On peut donc se borner, lorsqu'il s'agit d'assigner tous les nombres qui divisent la formule $x^4 - A$, à ne considérer que les nombres premiers.

Il n'est pas moins évident que, pour qu'un nombre divise la formule $x^4 - A$, il est nécessaire que ce nombre soit diviseur de $x^2 - A$. Il n'y a donc à examiner que les nombres premiers diviseurs de cette dernière formule, c'est à dire les nombres premiers par rapport auxquels A est résidu quadratique. On peut ajouter que, relativement à ceux de ces derniers qui sont de la forme $4n + 3$, la question ne présente aucune difficulté; car on s'assure par un raisonnement très simple que tout nombre premier $4n + 3$, diviseur de $x^2 - A$, divise aussi la formule $x^4 - A$.

Soit p un nombre premier $4n + 1$, diviseur de $x^2 - A$, A désignant un nombre positif ou négatif, non-divisible par p , on a, comme l'on sait, $A^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. On conclut de là, $A^{\frac{p-1}{4}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$ et l'on prouve facilement que le signe supérieur ou inférieur aura lieu, selon que p divise ou ne divise pas la formule $x^4 - A$. On peut donc énoncer ce théorème:

„ A designant un nombre résidu quadratique par rapport au nombre premier $p = 4n + 1$, on aura $A^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1$ ou $A^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1 \pmod{p}$. „Dans le premier cas, A sera résidu biquadratique par rapport à p , dans „le second, A sera non-résidu biquadratique par rapport à p .”

Si l'on applique ce théorème au cas où $A = -1$, on trouvera que -1 est résidu biquadratique par rapport aux nombres premiers $8n + 1$, et au contraire non-résidu relativement à ceux de la forme $8n + 5$. Du théorème précédent on déduit facilement cet autre, dans l'énoncé duquel

on suppose, comme dans tout ce qui suivra, que p est un nombre premier $4n+1$, et que A et A' désignent des nombres non-divisibles par p et qui sont l'un et l'autre des résidus quadratiques par rapport à p .

„Si les nombres A et A' sont tous les deux des résidus biquadratiques ou tous les deux des non-résidus biquadratiques par rapport à p : „le produit AA' sera résidu biquadratique par rapport à p ; si, au contraire, l'un des nombres A et A' est résidu, l'autre non-résidu biquadratique relativement à p : AA' sera non-résidu biquadratique par rapport à p .”

En faisant $A' = -1$, et en ayant égard à ce qui précède, on verra que, si p est de la forme $8n+1$, A sera en même temps résidu ou non-résidu biquadratique que $-A$, et qu'au contraire, si p est de la forme $8n+5$, l'un des nombres A et $-A$ sera résidu, l'autre non-résidu biquadratique par rapport à p .

2.

Après avoir établi ces préliminaires, nous allons nous occuper de la recherche des caractères qui distinguent les diviseurs premiers de la formule x^4-2 . On sait que les diviseurs premiers de x^2-2 sont de l'une de ces deux formes $8n+1$, $8n+7$, et que réciproquement tout nombre premier de l'une de ces formes divise la formule x^2-2 . D'après ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent, nous n'avons pas besoin d'avoir égard à la dernière de ces deux formes et il suffira de considérer les nombres premiers $8n+1$. Soit p un nombre premier de cette espèce, et posons, comme il est permis de le faire, $p = t^2 + 2u^2$, où u sera pair, t impair. Faisons $u = 2^v k k' k'' \dots$, 2^v étant la puissance la plus élevée de 2 qui divise u , et $k, k', k'', \dots$ désignant des nombres premiers impairs, dont plusieurs peuvent être égaux entre eux. L'équation $t^2 + 2u^2 = p$, donne immédiatement $t^2 \equiv p \pmod{k}$. Le nombre p est donc résidu quadratique par rapport à k , ce que nous écrirons ainsi $\left(\frac{p}{k}\right) = 1$, en adoptant la notation employée par M. Legendre. On se rappelle que, si c désigne un nombre premier et M un nombre quelconque, non divisible par c , cet illustre géomètre se sert du signe $\left(\frac{M}{c}\right)$, pour désigner le reste que l'on obtient, en divisant par c la puissance $M^{\frac{c-1}{2}}$, reste que l'on sait être égal à 1 ou -1 , selon que M est

ou n'est pas résidu quadratique par rapport à c . En appliquant à l'expression $\left(\frac{p}{k}\right) = 1$, le théorème connu sous le nom de loi de réciprocité (*theorema fundamentale* de M. Gauss), on aura, p étant de la forme $4n+1$, $\left(\frac{k}{p}\right) = 1$. On trouve de la même manière

$$\left(\frac{k'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k''}{p}\right) = 1, \text{ etc.}$$

D'un autre côté, comme p est de la forme $8n+1$, on a aussi $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, et par conséquent $\left(\frac{2^v}{p}\right) = 1$. Multipliant cette dernière expression par toutes les précédentes, il viendra

$$\left(\frac{2^v k k' k'' \dots}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right) = 1.$$

Considérons maintenant les facteurs simples du nombre impair C , que nous partagerons en deux classes. La première classe comprendra les diviseurs premiers de l'une de ces deux formes $8n+1$, $8n+7$ et les nombres qui en font partie seront désignés par $g, g', g'', \dots$; la seconde classe se composera de nombres $h, h', h'', \dots$ contenus dans ces deux formes $8n+3$, $8n+5$. On a d'abord

$$t = g g' g'' \dots \times h h' h'' \dots$$

et l'on conclura ensuite de l'équation $p = t^2 + 2u^2$:

$$\left(\frac{2p}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{2p}{h}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{h'}\right) = 1, \quad \left(\frac{2p}{h''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

D'un autre côté, on a en vertu de théorèmes connus:

$$\left(\frac{2}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{2}{h}\right) = -1, \quad \left(\frac{2}{h'}\right) = -1, \quad \left(\frac{2}{h''}\right) = -1, \text{ etc.}$$

Si l'on compare maintenant ces expressions aux précédentes, on trouvera

$$\left(\frac{p}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{p}{h}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h'}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h''}\right) = -1, \text{ etc.}$$

L'application de la loi de réciprocité à ces dernières expressions donnera celles-ci:

$$\left(\frac{g}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{g'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{g''}{p}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{h}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{h'}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{h''}{p}\right) = -1, \text{ etc.}$$

d'où il suit, en multipliant,

$$\left(\frac{g g' g'' \dots \times h h' h'' \dots}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right) = \pm 1,$$

où il faudra prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que les nombres $h, h', h'', \dots$ sont en nombre pair ou impair. Or, il est facile de voir, par l'équation $t = g g' g'' \dots \times h h' h'' \dots$, que le premier cas aura lieu, lorsque t est de l'une de ces formes $8n+1, 8n+7$, le second, lorsque t est contenu dans l'une de celles-ci $8n+3, 8n+5$. On a donc

$$\left(\frac{t}{p}\right) = 1, \quad \text{lorsque } t = 8n+1 \text{ ou } 8n+7,$$

$$\left(\frac{t}{p}\right) = -1, \quad \text{lorsque } t = 8n+3 \text{ ou } 8n+5.$$

Reprenons l'équation $t^2 + 2u^2 = p$ et mettons la sous la forme d'une congruence

$$t^2 \equiv -2u^2 \pmod{p}.$$

En élevant les deux nombres à la puissance $\frac{p-1}{4}$, on aura $\left(\frac{p-1}{4}\right.$ étant pair):

$$t^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{4}} u^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

ou ce qui revient au même, ayant prouvé que

$$\left(\frac{u}{p}\right) = 1, \quad t^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}.$$

On voit donc que ± 2 (on peut mettre le double signe attendu que $p = 8n+1$) est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que l'on a $\left(\frac{t}{p}\right) = 1$ ou $\left(\frac{t}{p}\right) = -1$. En comparant ce résultat à ce qui précède, on aura ce théorème:

„ p désignant un nombre premier $8n+1$, si l'on fait $p = t^2 + 2u^2$,
 „je dis que ± 2 sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport
 „à p , selon que t est de l'une de ces formes $8n+1, 8n+7$ ou de l'une
 „de celles-ci $8n+3, 8n+5$.”

C'est le premier des deux théorèmes de M. Gauß, dont il a été question dans le préambule de ce mémoire. Le second de ces théorèmes est relatif à la décomposition du nombre p en deux carrés, et peut être facilement déduit de celui qui vient d'être établi.

Faisons $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé divisible par 4) et égalons cette valeur de p à celle que nous venons de considérer.

Nous aurons ainsi

$$p = t^2 + 2u^2 = \varphi^2 + \psi^2,$$

et en transposant:

$$t^2 - \psi^2 = (t + \psi)(t - \psi) = \varphi^2 - 2u^2.$$

Comme φ est impair, le plus grand diviseur commun de φ et u sera impair; désignons le par m et faisons $\varphi = m\varphi'$, $u = mu'$. La substitution de ces valeurs dans l'équation précédente la changera en celli-ci:

$$(t + \psi)(t - \psi) = m^2(\varphi'^2 - 2u'^2).$$

On voit que le nombre impair $t + \psi$ est composé de deux facteurs E et K , dont le premier divise m^2 , le second $\varphi'^2 - 2u'^2$, et qu'il en est de même de $t - \psi$ dont nous désignerons les facteurs par F et L , L pouvant être négatif. Nous avons donc les équations

$$\begin{aligned} t + \psi &= EK, & t - \psi &= FL, \\ EF &= m^2, & KL &= \varphi'^2 - 2u'^2. \end{aligned}$$

Il est facile de s'assurer que les nombres E et F sont premiers entre eux. En effet, soit δ un diviseur premier de E , et supposons que δ divise en même temps F . Le nombre δ serait diviseur commun de $t + \psi$ et $t - \psi$ et diviserait par conséquent le nombre t , qui est la demisomme des précédents. D'un autre côté, de ce que δ est diviseur premier de E , il suit successivement, en ayant égard aux équations $EF = m^2$, $u = mu'$, que m^2 , m et u sont multiples de δ . Les nombres t et u auraient donc le diviseur commun δ , et $p = t^2 + 2u^2$ ne serait pas un nombre premier.

Le produit des nombres E et F , qui sont premiers entre eux, étant un carré, il faut que chacun d'eux en soit un. Faisons $E = e^2$, et nous aurons $t + \psi = e^2 K$. Le carré impair e^2 est de la forme $8n + 1$, et K , comme diviseur impair de $\varphi'^2 + 2u'^2$ (où φ' et u' sont premiers entre eux), de l'une de celles-ci $8n + 1$, $8n + 7$. Le nombre $t + \psi$ sera donc lui-même de l'une des formes $8n + 1$, $8n + 7$. Le nombre ψ que nous savons être divisible par 4, sera de la forme $8n$ ou de celle-ci $8n + 4$. Il suit, de ce qui précède, que, dans le premier cas, t sera de l'une de ces deux formes $8n + 1$, $8n + 7$, dans le second de l'une de celles-ci $8n + 3$, $8n + 5$. En comparant ce résultat au théorème précédent, on aura cet autre théorème.

„ p désignant un nombre premier $8n+1$, et ayant fait $p = \varphi^2 + \psi^2$
 „(où ψ est supposé divisible par 4), ± 2 sera ou ne sera pas résidu bi-
 „quadratique par rapport à p , selon que ψ est de la forme $8n$ ou de
 „celle-ci $8n+4$.”

Il y a un troisième théorème propre à décider si ± 2 est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à un nombre premier $p = 8n+1$, et qui peut s'énoncer comme il suit:

„Ayant fait d'une manière quelconque $p = t^2 - 2u^2$, ± 2 sera ou
 „ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que t est de
 „l'une des formes $8n+1$, $8n+3$, ou de l'une de celles-ci $8n+5$, $8n+7$.”

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer ce théorème que l'on peut établir d'une manière directe et par des considérations analogues à celles sur lesquelles est fondée la démonstration du premier des deux théorèmes précédens. On peut aussi le déduire de chacun des précédens à peu près comme on vient de passer du premier au second.

§. 3.

Nous allons maintenant passer à des considérations plus générales. Soit b un nombre premier $4n+3$, p un nombre premier $4n+1$ susceptible d'être mis sous la forme $t^2 - bu^2$, et proposons nous de décider si $-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p . Il est facile de voir que, si p peut être mis sous la forme $t^2 - bu^2$, on peut toujours le faire de manière que u soit pair, et par conséquent t impair *). Faisons donc $p = t^2 - bu^2$, et posons $u = 2^r k k' k'' \dots$, $k, k', k'', \dots$ étant les facteurs impairs simples de u . On conclut immédiatement de l'équation précédente,

$$\left(\frac{p}{k}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{k'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{k''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

*) Pour prouver que cela est toujours possible, nous allons faire voir que, si l'on a $t^2 - bu^2 = p$, t étant pair, il est facile de déduire des valeurs de t et de u , d'autres nombres t' (impair) et u' qui satisfassent également à l'équation $t'^2 - bu'^2 = p$. Soient r et s les moindres nombres tels que $r^2 - bs^2 = 1$, je dis que r sera pair. En effet, on sait que, si b désigne un nombre premier $4n+3$, l'équation $q^2 - b\sigma^2 = \pm 2$ est toujours possible, et que, si l'on suppose que q et σ sont les plus petits nombres qui y satisfassent, on a $r = b\sigma^2 \pm 1$, $s = q\sigma$ (Théorie des Nombres, no. 44. 45.). Il suit de là et de ce que les nombres q et σ sont évidemment impairs l'un et l'autre, que r est un nombre pair. Cela posé, si l'on multiplie entre elles les équations $r^2 - bs^2 = 1$, $t^2 - bu^2 = p$, il viendra $(rt \pm bsu)^2 - b(ru \pm st)^2 = p$, et l'on verra facilement que $rt \pm bsu$ est un nombre impair.

L'application de la loi de réciprocité donne ensuite, p étant de la forme $4n + 1$,

$$\left(\frac{k}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k''}{p}\right) = 1, \text{ etc.}$$

Multipliant entre elles toutes ces expressions et l'expression identique $\left(\frac{2^r}{p}\right) = \left(\frac{2^r}{p}\right)$, on aura ce résultat

$$(\alpha) \quad \left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2^r}{p}\right).$$

Décomposons actuellement le nombre impair t en ses facteurs simples et partageons ces facteurs en deux classes. Ceux de la première classe seront désignés par $g, g', g'', \dots$, et sont tels que

$$(\beta) \quad \left(\frac{-b}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{-b}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-b}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

Quant à ceux qui forment la seconde classe et que nous désignerons par $h, h', h'', \dots$, ils sont tels que

$$(\beta') \quad \left(\frac{-b}{h}\right) = -1, \quad \left(\frac{-b}{h'}\right) = -1, \quad \left(\frac{-b}{h''}\right) = -1, \text{ etc.}$$

Le produit de tous ces nombres est égal à t , c'est à dire que

$$t = g g' g'' \dots \times h h' h'' \dots$$

L'inspection de l'équation $t^2 - bu^2 = p$ donne ces résultats:

$$\left(\frac{-bp}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{-bp}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-bp}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{-bp}{h}\right) = 1, \quad \left(\frac{-bp}{h'}\right) = 1, \quad \left(\frac{-bp}{h''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

La comparaison de ces expressions avec les précédentes donnera ensuite

$$\left(\frac{p}{g}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{g''}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{p}{h}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h'}\right) = -1, \quad \left(\frac{p}{h''}\right) = -1, \text{ etc.}$$

Appliquant maintenant la loi de réciprocité, il viendra,

$$\left(\frac{g}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{g'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{g''}{p}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{h}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{h'}{p}\right) = -1, \quad \left(\frac{h''}{p}\right) = -1, \text{ etc.}$$

Multipliant ces expressions entre elles, on aura

$$\left(\frac{g g' g'' \dots \times h h' h'' \dots}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right) = \pm 1,$$

le signe supérieur ou inférieur ayant lieu, selon que les nombres $h, h', h'', \dots$ sont en nombre pair ou impair. D'un autre côté, si l'on ap-

plique la loi de réciprocité aux expressions (β) et (β') , il viendra, b étant de la forme $4n+3$,

$$\left(\frac{g}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{g'}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{g''}{b}\right) = 1, \text{ etc.}$$

$$\left(\frac{h}{b}\right) = -1, \quad \left(\frac{h'}{b}\right) = -1, \quad \left(\frac{h''}{b}\right) = -1, \text{ etc.}$$

expressions qui, étant multipliées entre elles, donneront ce resultat:

$$\left(\frac{g g' g'' \dots \times h h' h''}{b}\right) = \left(\frac{t}{b}\right) = \pm 1,$$

où il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que les nombres $h, h', h'', \dots$ sont en nombre pair ou impair.

La comparaison de ce résultat avec celui que nous avons obtenu, il n'y a qu'un instant, fait voir qu'on a toujours

$$(\gamma) \quad \left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{b}\right).$$

Reprenons maintenant l'équation $p = t^2 - bu^2$, et mettons la sous la forme d'une congruence

$$t^2 \equiv bu^2 \pmod{p}.$$

On tire de là, en élevant les deux nombres à la puissance $\frac{p-1}{4}$,

$$t^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{\frac{p-1}{4}} u^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

La formule (α) , qui est celle-ci $\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2^\nu}{p}\right)$, 2^ν désignant la puissance la plus élevée qui divise u , peut être présentée d'une autre manière. Il faut pour cela distinguer deux cas, selon que p est de la forme $8n+1$ ou de celle-ci $8n+5$. Si p est un nombre premier $8n+1$, on a, comme on soit, $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, et par conséquent $\left(\frac{2^\nu}{p}\right) = 1$; la formule dont il s'agit se change donc dans ce cas en celle-ci $\left(\frac{u}{p}\right) = 1$. Si p est un nombre premier $8n+5$, le nombre ν est $=1$; car si ν était plus grand que l'unité, u^2 serait divisible par 8, et $p = t^2 - bu^2$ serait de la forme $8n+1$. Comme d'ailleurs dans ce cas $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, la formule (α) se changera en celle-ci $\left(\frac{u}{p}\right) = -1$. Les deux cas que nous venons d'examiner sont compris dans la formule $\left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}$, qui équivaut à cette congruence $u^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}$. En substituant la valeur qu'elle

donne pour $u^{\frac{p-1}{2}}$ dans la congruence obtenue plus haut, on aura

$$t^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-b)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p},$$

résultat qui montre que $-b$ sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que t est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à p . Si l'on compare maintenant ce résultat avec celui qui est contenu dans la formule (γ), on arrivera au théorème que nous allons énoncer.

„Désignons par b un nombre premier $4n+3$, et par p un nombre „premier $4n+1$, susceptible d'être mis sous la forme t^2-bu^2 . Ayant „fait $p=t^2-bu^2$ (où t est supposé impair), je dis que $-b$ sera ou ne „sera pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que t est ou n'est „pas résidu quadratique par rapport à b .”

4.

Nous allons maintenant déduire de ce théorème un autre théorème, au moyen duquel on peut décider plus promptement encore, si $-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p . Conservons les notations précédentes et faisons $p=\varphi^2+\psi^2$ (où ψ est supposé pair). En égalant cette valeur de p à celle que nous avons considérée précédemment, on aura :

$$p = t^2 - bu^2 = \varphi^2 + \psi^2,$$

et en transposant

$$t^2 - \psi^2 = (t + \psi)(t - \psi) = \varphi^2 + bu^2.$$

Il y a maintenant deux cas à distinguer, selon que φ est ou n'est pas divisible par b . Nous commençons par l'examen du dernier de ces deux cas. Soit m le plus grand diviseur commun de φ et u , qui sera impair (φ étant impair) et non-divisible par b , et posons $\varphi = m\varphi'$, $u = mu'$. La substitution de ces valeurs dans la dernière équation, la changera en celle-ci :

$$(t + \psi)(t - \psi) = m^2(\varphi'^2 + bu'^2).$$

Il est évident, par cette équation, que $t + \psi$ est composé de deux facteurs E et K dont le premier divise m^2 , le second $\varphi'^2 + bu'^2$, et qu'il en est de même du nombre $t - \psi$. Désignant les facteurs de ce dernier par F et L , nous aurons ces équations :

$$\begin{aligned} t + \psi &= EK, & t - \psi &= FL, \\ m^2 &= EF, & \varphi'^2 + bu'^2 &= KL. \end{aligned}$$

Il est très facile de s'assurer que les nombres E et F sont premiers entre eux. En effet, soit δ un facteur simple quelconque de E (qui sera nécessairement impair, E étant lui même impair) et supposons que δ divise aussi F . L'inspection des équations précédentes fait voir que δ serait, dans cette supposition, diviseur commun de $t + \psi$ et $t - \psi$ et diviserait par conséquent le nombre t , qui est la demi-somme des précédents. Mais on voit d'un autre côté que δ , comme diviseur premier de E , divise m^2 , et par conséquent m et u (u étant $= mu'$). Les nombres t et u auroient donc, dans cette supposition, le facteur commun δ , ce qui est absurde, $p = t^2 - bu^2$ étant un nombre premier. Il est donc prouvé que E et F ne sauroient avoir de diviseur commun, et comme le produit de ces nombres est un carré, il faut que chacun d'eux en soit pareillement un. On a donc

$$\left(\frac{E}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{F}{b}\right) = 1.$$

Quant aux nombres K et L , ils sont pareillement tels qu'on a

$$\left(\frac{K}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{L}{b}\right) = 1.$$

En effet, on voit par la dernière équation que ces nombres divisent l'un et l'autre la formule $\varphi'^2 + bu'^2$ (où φ' et bu' sont premiers entre eux) et l'on soit par un théorème connu qui se déduit facilement de la loi de réciprocité (*Théorie des nombres*, no. 197.) que tout diviseur impair R d'une pareille formule est tel que $\left(\frac{R}{b}\right) = 1$. Multipliant la première des dernières expressions par la troisième, la seconde par la quatrième, il viendra

$$\left(\frac{EK}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{FL}{b}\right) = 1,$$

ou ce qui est la même chose,

$$(\delta) \quad \left(\frac{t+\psi}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{t-\psi}{b}\right) = 1.$$

En examinant d'une manière semblable le cas de φ divisible par b , on trouvera que, dans ce cas, l'un des nombres $t + \psi$ et $t - \psi$ est divisible par b , et que l'autre est, comme dans le cas dont nous venons de nous occuper, résidu quadratique par rapport à b , de sorte qu'en désignant par $t \pm \psi$ celui de ces nombres qui est divisible par b , on a

$$(\delta') \quad t \pm \psi \equiv 0 \pmod{b}, \quad \left(\frac{t \mp \psi}{b}\right) = 1.$$

Il résulte du théorème énoncé, à la fin du paragraphe précédent, que, pour décider si $-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p , tout se réduit à la question de savoir si t est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à b . Nous pouvons maintenant faire voir, au moyen des résultats que nous venons d'obtenir, que cette dernière question peut être décidée sans connaître t , c'est à dire sans qu'il soit nécessaire de mettre p sous la forme $t^2 - bu^2$. Supposons d'abord ϕ non-divisible par b . Les expressions (δ) , qui ont lieu dans ce cas, peuvent être présentées de cette manière, en observant que b est un nombre premier $4n+3$:

$$\left(\frac{\psi+t}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{\psi-t}{b}\right) = -1.$$

On tire immédiatement de l'équation $p = t^2 - bu^2$, $t^2 \equiv p \pmod{b}$, résultat qui fait voir qu'en résolvant la congruence $x^2 \equiv p \pmod{b}$, et désignant par x l'une de ces racines prise au hasard, on aura $t \equiv x$, ou $t \equiv -x \pmod{b}$. Dans le premier cas, on a

$$\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{x}{b}\right), \quad \left(\frac{x+\psi}{b}\right) = 1,$$

car il est évident que les expressions $\left(\frac{t}{b}\right)$ et $\left(\frac{t+\psi}{b}\right)$ ne changent pas en mettant à la place de t un autre nombre x qui ne diffère de t que par un multiple de b . En multipliant les dernières expressions entre elles, il viendra

$$\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{x \cdot x + \psi}{b}\right).$$

Considérons maintenant l'autre cas dans lequel $t \equiv -x \pmod{b}$. On aura dans ce cas

$$\left(\frac{t}{b}\right) = -\left(\frac{x}{b}\right), \quad \left(\frac{\psi+x}{b}\right) = -1,$$

la dernière de ces expressions résultant de la formule $\left(\frac{\psi-t}{b}\right) = -1$, en mettant à la place de $-t$ le nombre x qui n'en diffère que par un multiple de b . En multipliant les expressions précédentes entre elles, on trouvera, comme dans l'autre cas,

$$\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{x \cdot x + \psi}{b}\right).$$

Nous sommes donc arrivés à ce résultat remarquable. Si ϕ n'est pas divisible par b , on pourra décider très simplement si l'on a

$$\left(\frac{t}{b}\right) = 1 \text{ ou } \left(\frac{t}{b}\right) = -1.$$

Il suffira de chercher un nombre qui satisfasse à la congruence $\chi^2 \equiv p \pmod{b}$; ayant trouvé un pareil nombre χ , on aura toujours

$$\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{b}\right).$$

Venons maintenant au cas où φ est divisible par b . Les expressions (δ') qui ont lieu dans ce cas sont

$$t \pm \psi \equiv 0 \pmod{b}, \quad \left(\frac{t \pm \psi}{b}\right) = 1.$$

On peut dans la dernière de ces expressions ajouter à $t \pm \psi$ un multiple quelconque de b . Si l'on y ajoute le nombre $t \pm \psi$ qui en vertu de la première est divisible par b , il viendra $\left(\frac{2t}{b}\right) = 1$, résultat qui entraîne cet autre $\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{2}{b}\right)$.

En combinant ce résultat avec un théorème connu, on verra que dans le cas de φ divisible par b , on a $\left(\frac{t}{b}\right) = 1$ ou $\left(\frac{t}{b}\right) = -1$, selon que t est de la forme $8n+7$ ou de celle-ci $8n+3$.

En comparant ce qui vient d'être prouvé au théorème établi à la fin du dernier paragraphe, on verra qu'on peut décider, indépendamment de la connaissance du nombre t , si $-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p . Le résultat auquel on parvient ainsi ne contenant plus aucune trace du nombre t , on est porté à croire qu'il ne suppose pas la possibilité de l'équation $t^2 - bu^2 = p$, d'où le nombre t tire son origine, et qu'il est généralement vrai pour toutes les valeurs de b et p , telles que $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$. C'est en effet ce qui a lieu, comme on peut le prouver, en examinant, au lieu de l'équation $t^2 - bu^2 = p$, l'équation plus générale $t^2 \pm Mu^2 = p$, où M désigne le produit d'un nombre quelconque de nombres premiers différens, et en combinant ensuite les résultats de cet examen avec le théorème suivant, de la vérité duquel on ne saurait douter, mais dont la démonstration rigoureuse ne laisse pas que de présenter des difficultés:

„ c désignant un nombre premier quelconque et p un nombre premier $4n+1$, tel que $\left(\frac{c}{p}\right) = 1$, on pourra toujours déterminer un nombre δ , composé de facteurs simples tous moindres que c et tel que l'équation $t^2 \pm c\delta u^2 = p$, soit résoluble.”

Quoi qu'il en soit, on peut remarquer que le théorème que nous allons énoncer est rigoureusement prouvé, par ce qui précède, pour toutes les valeurs de b , telles que la formule $t^2 - bu^2$ n'a que le seul diviseur quadratique $\pm (t^2 - bu^2)$. En jettant les yeux sur la première des tables ajoutées à la *Théorie des Nombres*, on voit que tous les nombres premiers $4n + 3$, moindres que 136 (limite de la table) se trouvent dans ce cas, en exceptant le seul nombre 79. Il seroit facile en suivant la marche que nous venons d'indiquer, de prouver la vérité du théorème pour cette valeur ou pour toute autre valeur particulière de b , quel que soit p ; mais pour l'établir dans toute sa généralité, il faut d'abord prouver, comme nous l'avons déjà dit, qu'on peut toujours satisfaire à la condition que nous avons énoncée, il n'y a qu'un instant.

Théorème I.

„ b désignant un nombre premier $4n + 3$, et p un nombre premier $4n + 1$ tel que $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$, si l'on fait $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé pair) on aura cette règle, pour décider si $-b$ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p . Si φ est divisible par b , $-b$ sera ou ne sera pas résidu biquadratique, selon que b est de la forme $8n + 7$ ou de celle-ci $8n + 3$. Si φ n'est pas divisible par b , on cherchera un nombre χ tel qu'on ait $\chi^2 \equiv p \pmod{b}$. Cela posé, $-b$ sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que l'on a $\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{b}\right) = 1$ ou $\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{b}\right) = -1$.”

En faisant successivement $b = 3$, $b = 7$ etc., on obtiendra les théorèmes particuliers suivans qui sont analogues au second des théorèmes de M. Gauß et que l'on doit regarder comme rigoureusement prouvés par les considérations que nous avons exposées dans ce paragraphe et dans le précédent.

„ p désignant un nombre premier $12n + 1$, si l'on fait $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé pair) l'un des nombres φ et ψ sera nécessairement divisible par 3. Cela posé, je dis que -3 sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que c'est ψ ou φ qui est divisible par 3.”

„ p désignant un nombre premier de l'une de ces formes $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 25$, si l'on fait $p = \varphi^2 + \psi^2$, je dis que -7 sera résidu biquadratique par rapport à p , selon que c'est ψ ou φ qui est divisible par 7.”

„biquadratique par rapport à p , si l'un des nombres Φ et Ψ est divisible „par 7, et que -7 sera non-résidu biquadratique par rapport à p , si „ni l'un ni l'autre de ces nombres n'est divisible par 7.”

etc.

5.

Désignons par a un nombre premier $4n+1$, et par p un nombre premier également $4n+1$, et de plus susceptible d'être mis sous la forme $t^2 - au^2$. Nous pouvons donc faire $p = t^2 - au^2$ où le nombre t , comme il est facile de le voir, est nécessairement impair. On trouvera, comme dans le paragraphe 3., que, si l'on désigne par 2^ν la puissance la plus élevée de 2, on a $\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2^\nu}{p}\right)$, expression que l'on changera ensuite, comme à l'endroit cité, en celle-ci: $\left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}$.

Décomposons actuellement le nombre impair t en ses facteurs simples, en posant $t = g g' g'' \dots \times h h' h'' \dots$, où les nombres premiers $g, g', g'',$ etc., $h, h', h'',$ etc. sont tels que

$$(\varepsilon) \quad \begin{cases} \left(\frac{-a}{g}\right) = 1, & \left(\frac{-a}{g'}\right) = 1, & \left(\frac{-a}{g''}\right) = 1, \text{ etc.} \\ \left(\frac{-a}{h}\right) = -1, & \left(\frac{-a}{h'}\right) = -1, & \left(\frac{-a}{h''}\right) = -1, \text{ etc.} \end{cases}$$

L'équation $t^2 - au^2 = p$ donne immédiatement

$$\begin{aligned} \left(\frac{-ap}{g}\right) &= 1, & \left(\frac{-ap}{g'}\right) &= 1, & \left(\frac{-ap}{g''}\right) &= 1, \text{ etc.} \\ \left(\frac{-ap}{h}\right) &= 1, & \left(\frac{-ap}{h'}\right) &= 1, & \left(\frac{-ap}{h''}\right) &= 1, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Comparant ces expressions aux précédentes il viendra:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{g}\right) &= 1, & \left(\frac{p}{g'}\right) &= 1, & \left(\frac{p}{g''}\right) &= 1, \text{ etc.} \\ \left(\frac{p}{h}\right) &= -1, & \left(\frac{p}{h'}\right) &= -1, & \left(\frac{p}{h''}\right) &= -1, \text{ etc.} \end{aligned}$$

L'application de la loi de réciprocité donnera ensuite, p étant de la forme $4n+1$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{g}{p}\right) &= 1, & \left(\frac{g'}{p}\right) &= 1, & \left(\frac{g''}{p}\right) &= 1, \text{ etc.} \\ \left(\frac{h}{p}\right) &= -1, & \left(\frac{h'}{p}\right) &= -1, & \left(\frac{h''}{p}\right) &= -1, \text{ etc.} \end{aligned}$$

d'où l'on conclut en multipliant:

$$\left(\frac{g g' g'' \dots \times h h' h''}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right) = +1,$$

le signe supérieur ou inférieur ayant lieu selon que les nombres premiers $h, h', h'', \dots$ sont en nombre pair ou impair. On peut énoncer ce résultat d'une manière un peu différente, en disant que $\left(\frac{t}{p}\right)$ est égal au produit des seconds membres des expressions (ε) .

On peut, dans les expressions (ε) , changer partout $-a$ en a , pourvu qu'en même temps on change le signe des seconds membres de celles de ces expressions où il se trouve un nombre premier $(g, g', g'', \dots \times h, h' h'', \dots)$ de la forme $4n + 3$. On aura ainsi

$$(\zeta) \quad \begin{cases} \left(\frac{a}{g}\right) = \pm 1, & \left(\frac{a}{g'}\right) = \pm 1, & \left(\frac{a}{g''}\right) = \pm 1, \text{ etc.} \\ \left(\frac{a}{h}\right) = \pm 1, & \left(\frac{a}{h'}\right) = \pm 1, & \left(\frac{a}{h''}\right) = \pm 1, \text{ etc.} \end{cases}$$

En comparant le second membre de chacune de ces expressions avec le second membre de l'expression correspondante du tableau (ε) , on trouvera autant de changemens de signe qu'il y a de nombres premiers $4n + 3$ parmi les nombres $g, g', g'', \dots, h, h', h'', \dots$.

Le nombre des changemens sera donc pair, lorsque parmi les nombres $g, g', g'', \dots, h, h', h'', \dots$ il s'en trouve un nombre pair de la forme $4n + 3$. Dans ce cas qui aura lieu toutes les fois que $t = g g' g'' \dots \times h h' h'' \dots$ est de la forme $4n + 1$, le produit des seconds membres des expressions (ζ) sera donc le même que le produit des seconds membres des expressions (ε) .

D'un autre côté, on peut, en vertu de la loi de reciprocité, renverser les premiers nombres des expressions (ζ) , sans qu'il soit nécessaire de changer le signe d'aucun des seconds nombres de ces expressions. Le produit de toutes ces expressions renversées, c'est à dire $\left(\frac{g g' g'' \dots \times h h' h'' \dots}{a}\right)$ ou $\left(\frac{t}{a}\right)$, est donc égal au produit des seconds membres des expressions (ζ) et par conséquent aussi, d'après ce qu'on a vu précédemment, égal au produit des seconds membres des expressions (ε) . Or, ayant prouvé plus haut que ce dernier produit est égal à $\left(\frac{t}{p}\right)$, on a $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)$.

Ce résultat est relatif au cas où t est de la forme $4n + 1$; si l'on examine d'une manière semblable le cas de $t = 4n + 3$, on trouvera qu'on a, dans ce cas, $\left(\frac{t}{p}\right) = -\left(\frac{t}{a}\right)$.

Ces deux cas sont compris dans la formule suivante à laquelle nous réunissons un résultat obtenu plus haut:

$$(\eta) \quad \left(\frac{t}{p}\right) = (-1)^{\frac{t-1}{2}} \left(\frac{t}{a}\right), \quad \left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}.$$

L'équation $t^2 - au^2 = p$, donne successivement

$$t^2 \equiv au^2, \quad t^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{\frac{p-1}{4}} u^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

d'où l'on voit que a sera ou ne sera pas résidu biquadratique relativement à p , selon que l'on a $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right)$ ou $\left(\frac{t}{p}\right) = -\left(\frac{u}{p}\right)$. En mettant à la place de $\left(\frac{t}{p}\right)$ et $\left(\frac{u}{p}\right)$ les valeurs données par les expressions (η) , on pourra remplacer les conditions précédentes par celles qui suivent:

„ a sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que l'on a

$$(\theta) \quad \left(\frac{t}{a}\right) = (-1)^{\frac{t-1}{2} + \frac{p-1}{4}} \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -(-1)^{\frac{t-1}{2} + \frac{p-1}{4}},$$

résultat que nous ne nous arrêterons pas à énoncer.

Posons maintenant $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé pair) et égalons cette valeur de p à celle que nous avons considérée précédemment. Nous aurons ainsi $p = t^2 - au^2 = \varphi^2 + \psi^2$ d'où l'on conclut en transposant,

$$t^2 - \psi^2 = (t + \psi)(t - \psi) = \varphi^2 + au^2.$$

Il y a maintenant deux cas à distinguer, selon que φ est ou n'est pas divisible par a . Commençons par celui où φ n'est pas divisible par a . Soit m le plus grand diviseur commun de φ et de u , qui sera nécessairement impair et non divisible par a , et faisons $\varphi = m\varphi'$, $u = mu'$, valeurs dont la substitution dans l'équation obtenue plus haut la change en celle-ci

$$(t + \psi)(t - \psi) = m^2(\varphi'^2 + au'^2).$$

Cette équation fait voir que $t + \psi$ est composé de deux facteurs dont l'un divise m^2 , l'autre $\varphi'^2 + au'^2$, et qu'il en est de même $t - \psi$. Si nous désignons les facteurs de $t + \psi$ par E et K et ceux de $t - \psi$ par F et L , nous aurons

$$\begin{aligned} t + \psi &= EK, & t - \psi &= FL, \\ m^2 &= EF, & \varphi'^2 + au'^2 &= KL. \end{aligned}$$

On s'assurera, comme dans le paragraphe 4., que les nombres E et F sont premiers entre eux. Il suit de là et de l'équation $m^2 = EF$ que cha-

cun de ces nombres est un carré, de sorte que

$$\left(\frac{E}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{F}{a}\right) = 1.$$

La différence des nombres impairs $t + \psi$ et $t - \psi$ étant 2ψ et par conséquent divisible par 4, on voit que ces deux nombres sont ou l'un et l'autre de la forme $4n + 1$, ou l'un et l'autre de la forme $4n + 3$. Comme, d'un autre côté, les nombres E et F sont l'un et l'autre de la forme $4n + 1$ (ces nombres étant des carrés impairs), il suit des équations $t + \psi = EK$, $t - \psi = FL$, que les nombres K et L sont ou l'un et l'autre de la forme $4n + 1$ ou l'un et l'autre de la forme $4n + 3$ et que le premier ou le second de ces cas a lieu, selon que les nombres $t + \psi$ et $t - \psi$ sont l'un et l'autre de la forme $4n + 1$, ou l'un et l'autre de la forme $4n + 3$. Distinguons maintenant deux cas, selon que p est de la forme $8n + 1$ ou de celle-ci $8n + 5$. On voit, par l'équation $p^2 = \varphi^2 + \psi^2$, que, dans le premier cas, ψ est divisible par 4, d'où il suit que $t + \psi$ et $t - \psi$ sont, dans ce cas, l'un et l'autre de la forme $4n + 1$ ou l'un et l'autre de la forme $4n + 3$, selon que t est de la forme $4n + 1$, ou de celle-ci $4n + 3$. Le contraire a lieu dans le cas de $p = 8n + 5$ et les résultats relatifs à ces deux cas peuvent être compris dans cet énoncé.

Les nombres $t + \psi$ et $t - \psi$, et par conséquent aussi les nombres K et L , sont l'un et l'autre de la forme $4n + 1$ ou de celle-ci $4n + 3$, selon que $(-1)^{\frac{p-1}{4} + \frac{t-1}{2}}$ est égal à 1 ou à -1 .

Il résulte de l'équation $\varphi'^2 + au'^2 = KL$ que les nombres K et L sont diviseurs de la formule $\varphi'^2 + au'^2$ (où φ' et au' sont premiers entre eux et où a désigne un nombre premier $4n + 1$). Or, on sait que, si R désigne un diviseur impair d'une telle formule, on a

$$\left(\frac{R}{a}\right) = 1, \text{ ou } \left(\frac{R}{a}\right) = -1,$$

selon que R est de la forme $4n + 1$ ou de la forme $4n + 3$. (*Théorie des Nombres*, no. 196.)

Appliquant ce théorème aux nombres K et L , il viendra,

$$\left(\frac{K}{a}\right) = \left(\frac{L}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4} + \frac{t-1}{2}},$$

d'où l'on conclura ensuite, en multipliant par les expressions $\left(\frac{E}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{F}{a}\right) = 1$, trouvées plus haut :

$$\left(\frac{t+\psi}{a}\right) = \left(\frac{t-\psi}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4} + \frac{t-1}{2}},$$

ou ce qui revient au même, a étant un nombre premier $4n+1$:

$$\left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4} + \frac{t-1}{2}}.$$

Si l'on compare ce qui vient d'être prouvé au résultat (θ), obtenu plus haut, on verra que a est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à p , selon que l'on a

$$\left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right) = \left(\frac{t}{a}\right),$$

ou

$$\left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right) = -\left(\frac{t}{a}\right).$$

L'équation $p = t^2 - at^2$ fait voir que, si l'on désigne par x l'une quelconque des deux racines de la congruence $x^2 \equiv p \pmod{a}$, on a $t \equiv x$ ou $t \equiv -x \pmod{a}$. Il suit de là, a étant de la forme $4n+1$,

$\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{x}{a}\right)$. D'un autre côté, comme en vertu de ce qui précède

$\left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right)$ on voit qu'on a toujours

$$\left(\frac{\psi+x}{a}\right) = \left(\frac{\psi+t}{a}\right) = \left(\frac{\psi-t}{a}\right).$$

On conclut de là, en ayant égard à ce qui a été dit, il n'y a qu'un instant, que le nombre a sera résidu biquadratique par rapport à p , lorsqu'on a $\left(\frac{x+\psi}{a}\right) = \left(\frac{x}{a}\right)$ où ce qui est la même chose, lorsque $\left(\frac{x \cdot x + \psi}{a}\right) = 1$, et que a sera non-résidu biquadratique relativement à p , lorsqu'on a $\left(\frac{x+\psi}{a}\right) = -\left(\frac{x}{a}\right)$, ou ce qui revient au même, lorsque $\left(\frac{x \cdot x + \psi}{a}\right) = -1$.

Ce résultat est relatif au cas où ϕ n'est pas divisible par a . Reste à examiner le cas de ϕ divisible par a . En traitant ce cas d'une manière semblable, on trouve que, lorsqu'il a lieu, l'un des nombres $t+\psi$, $t-\psi$ (nous le désignerons par $t \pm \psi$) est divisible par a et que l'autre $t \mp \psi$ est, comme dans le premier cas, tel que

$$\left(\frac{t \mp \psi}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4} + \frac{t-1}{2}},$$

ou ce qui revient au même, en ajoutant à $t \mp \psi$ le nombre $t \pm \psi$, multiple de a ,

$$\left(\frac{2t}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4} + \frac{t-1}{2}}.$$

En comparant ceci à ce qui a été prouvé plus haut (θ), on trouvera que, dans le cas de φ divisible par a , a est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à p , selon que l'on a $\left(\frac{2}{a}\right) = 1$, ou $\left(\frac{2}{a}\right) = -1$, ou ce qui est la même chose, d'après un théorème connu, selon que a est de la forme $8n + 1$ ou de la forme $8n + 5$.

Il en est des résultats que nous venons d'obtenir comme de ceux que nous avons établis dans le paragraphe 4.; ils ont encore lieu quand même p ne pourrait être mis sous la forme $t^2 - au^2$, et supposent uniquement que les nombres premiers $a = 4n + 1$, et $p = 4n + 1$, soient tels que $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Pour les démontrer dans cette extension, il suffira de suivre la marche qui a été indiquée vers la fin du paragraphe 4., et de s'appuyer sur la proposition auxiliaire, dont il y est question et à l'énoncé de laquelle on a donné la généralité nécessaire pour qu'elle puisse servir en même temps de base à la démonstration du théorème général à la fin du paragraphe 4. et à celle du théorème que nous allons énoncer. Ces deux théorèmes n'en forment proprement qu'un, et en procédant, comme on l'a dit à l'endroit cité, c'est à dire en appliquant à l'équation $t^2 \pm Mu^2 = p$, où M désigne le produit d'un nombre quelconque de nombres premiers différens, des considérations analogues à celles qu'on a employées dans ce paragraphe et dans les précédens, on démontrera simultanément ces deux théorèmes, ou plutôt on arrivera à un théorème dans l'énoncé duquel ils se trouvent réunis.

Théorème II.

„ a désignant un nombre premier $4n + 1$, et p un autre nombre „premier $4n + 1$, tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, si l'on fait $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est „supposé pair), on pourra décider de la manière suivante, si a est ou „n'est pas résidu biquadratique par rapport à p . Si φ est divisible par „ a , a sera ou ne sera pas résidu biquadratique relativement à p , selon „que a est de la forme $8n + 1$ ou de celle-ci $8n + 5$. Si φ n'est pas „divisible par a , on cherchera un nombre χ tel qu'on ait $\chi^2 \equiv p \pmod{a}$. „Cela posé, a sera ou ne sera pas résidu biquadratique par rapport à p , „selon que l'on a $\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{a}\right) = 1$ ou $\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{a}\right) = -1$.”

En faisant successivement $a=5$, $a=13$, on aura les théorèmes particuliers suivans qu'on doit regarder comme rigoureusement prouvés par ce qui précède, la formule $t^2 - au^2$ n'ayant, pour ces valeurs de a , d'autre diviseur quadratique que celui-ci $t^2 - au^2$, ou en d'autres termes, tout diviseur de $t^2 - au^2$ étant lui même de la forme $t^2 - au^2$.

„ p désignant un nombre premier de l'une des formes $20n+1$, „ $20n+9$, si l'on fait $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé pair) on s'assure „facilement que l'un des nombres φ , ψ est multiple de 5. Cela posé, „je dis que 5 sera ou ne sera pas résidu biquadratique relativement à p , „selon que c'est ψ ou φ qui est divisible par 5.”

etc.

En indiquant plus haut une methode qui pourroit servir à établir dans toute leur généralité les théorèmes I. et II., nous avons dit qu'en suivant cette methode on se trouvait dans la nécessité de s'appuyer sur une proposition subsidiaire qu'il paroît assez difficile de démontrer en toute rigueur. En réfléchissant à cet inconvénient, j'ai reconnu qu'il étoit très facile d'y remédier en modifiant un peu la marche tracée plus haut. Cette modification est extrêmement légère et consiste en ce qu'au lieu de considérer les équations $t^2 - bu^2 = p$, $t^2 - au^2 = p$, qui peuvent n'être pas possibles quoiqu'on ait $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, il faut appliquer des considérations du genre des précédentes aux équations plus générales $t^2 - bu^2 = ps^2$, $t^2 - au^2 = ps^2$, (on remplace avec avantage la dernière par celle-ci $t^2 + au^2 = ps^2$, qui peut être traitée plus simplement), auxquelles on peut toujours satisfaire, lorsque les conditions $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ ont lieu, comme il résulte du beau théorème que M. Legendre a donné pour juger de la possibilité ou de l'impossibilité de l'équation $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma z^2$ (*Théorie des Nombres*, no. 27.).

La démonstration ainsi modifiée, outre qu'elle est entièrement rigoureuse, a encore l'avantage d'une plus grande simplicité, comme tout lecteur qui a bien saisi l'esprit des considérations précédentes pourra en juger, en développant cette démonstration d'après l'indication qu'on vient d'en donner,

Addition au mémoire précédent.

Quoique l'indication que nous avons donnée à la fin du mémoire précédent sur la marche à suivre pour établir d'une manière entièrement rigoureuse les théorèmes I. et II. de notre mémoire, puisse suffire à tout lecteur familiarisé avec l'analyse indéterminée, nous croyons ne pas faire une chose inutile, en développant, avec détail, dans cette addition, les démonstrations des théorèmes dont il s'agit, ces démonstrations étant susceptibles d'être beaucoup simplifiées au moyen de quelques considérations qui peuvent ne pas se présenter de suite à l'esprit. Nous commençons par la démonstration du premier des théorèmes cités.

Désignons par p un nombre premier $4n+1$, par b un nombre premier $4n+3$, tel que $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$, et considérons l'équation

$$(a') \quad t^2 - bu^2 = ps^2.$$

D'après le théorème déjà cité (*Théorie des Nombres*, no. 27.), les conditions nécessaires pour que cette équation soit possible sont celles-ci : $\left(\frac{b}{p}\right) = 1$ et $\left(\frac{p}{b}\right) = 1$. Or, de ces conditions la première a lieu par hypothèse et quant à la seconde, il suit du théorème connu sous le nom de loi de réciprocité, qu'elle a toujours lieu lorsque la première est satisfaite. L'équation est donc résoluble. Il est évident qu'on peut supposer que les nombres t , u , s , qui lui satisfont, sont premiers entre eux, comparés deux à deux. L'équation étant dans cet état, ces trois nombres seront l'un pair, les deux autres impairs, et on s'assure facilement que s ne saurait être pair. Le nombre s étant impair, les nombres t , u seront l'un pair, l'autre impair et il y aurait deux cas à examiner selon que t est pair ou impair. Mais quoique ces deux cas soient susceptibles d'être traités par la même analyse, il est plus simple de n'en considérer qu'un seul, celui de t impair par exemple, et de montrer que l'autre peut y être facilement ramené. Faisons donc voir qu'il est toujours permis de supposer t impair dans l'équation $t^2 - bu^2 = ps^2$. Si t était pair dans l'équation (a') , on deduirait des nombres t , u , par le moyen indiqué dans la note relative au commencement du paragraphe 3. du mémoire précédent, d'autres nombres t' (impair), u' (pair) tels que, $t'^2 - bu'^2 = ps^2$. Nous pourrions donc considérer t comme impair dans tout ce qui va suivre.

De.

Décomposons les nombres t et u en leurs facteurs simples, en faisant

$$t = ll' l'' \dots, \quad u = 2^v k k' k'' \dots$$

$l, l', l'', \dots$ et $h, h', h'', \dots$ désignant des nombres premiers impairs.

La seule inspection de l'équation (α') donne

$$\left(\frac{p}{k}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{k'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{k''}\right) = 1, \quad \dots$$

On aura ensuite, en appliquant la loi de réciprocité, p étant un nombre premier $4n+1$,

$$\left(\frac{k}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k''}{p}\right) = 1, \quad \dots$$

Faisant le produit de toutes ces expressions et de la formule identique

$$\left(\frac{2^v}{p}\right) = \left(\frac{2^v}{p}\right), \quad \text{il viendra}$$

$$\left(\frac{2^v k k' k'' \dots}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{2^v}{p}\right).$$

Le nombre p est de l'une des deux formes $8n+1, 8n+5$. Si p est de la première forme, on a en vertu d'un théorème connu, $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$, et

par conséquent aussi $\left(\frac{2^v}{p}\right) = 1$. Donc $\left(\frac{t}{p}\right) = 1$. Si p est de la forme

$8n+5$, le nombre u sera impairement pair, de sorte que $v=1$, et comme on a d'un autre côté pour les nombres premiers $p=8n+5$,

$\left(\frac{2}{p}\right) = -1$, il viendra $\left(\frac{u}{p}\right) = -1$. Les deux cas dont il vient d'être

question sont compris dans la formule

$$(\beta') \quad \left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}.$$

Reprenons l'équation (α') de laquelle nous tirons immédiatement

$$\left(\frac{-b}{l}\right) = \left(\frac{p}{l}\right), \quad \left(\frac{-b}{l'}\right) = \left(\frac{p}{l'}\right), \quad \left(\frac{-b}{l''}\right) = \left(\frac{p}{l''}\right), \quad \dots$$

Comme p est un nombre premier $4n+1$, et b un nombre premier $4n+3$, on trouvera en appliquant la loi de réciprocité:

$$\left(\frac{l}{b}\right) = \left(\frac{l}{p}\right), \quad \left(\frac{l'}{b}\right) = \left(\frac{l'}{p}\right), \quad \left(\frac{l''}{b}\right) = \left(\frac{l''}{p}\right), \quad \dots$$

La multiplication donnera ensuite

$$\left(\frac{ll' l'' \dots}{b}\right) = \left(\frac{ll' l'' \dots}{p}\right), \quad \text{ou ce qui revient au même,}$$

$$(\gamma') \quad \left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{b}\right).$$

En mettant l'équation (α') sous la forme d'une congruence, on aura

$$t^2 \equiv b u^2 \pmod{p}.$$

On conclut de là en élevant les deux membres à la puissance $\frac{p-1}{4}$:

$$t^{\frac{p-1}{2}} \equiv b^{\frac{p-1}{4}} u^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

ou ce qui revient au même, en remplaçant $u^{\frac{p-1}{2}}$ par sa valeur $(-1)^{\frac{p-1}{4}}$, donnée par la formule (β') :

$$t^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-b)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}.$$

Cette dernière congruence fait voir que $-b$ est ou n'est pas résidu bi-quadratique relativement à p , selon que l'on a $\left(\frac{t}{p}\right) = 1$, ou $\left(\frac{t}{p}\right) = -1$.

Si l'on compare ce résultat à la formule (γ') , on obtiendra cet énoncé

$$(\delta') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{,,} -b \text{ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à } p, \text{ selon que} \\ \text{,, l'on a } \left(\frac{t}{b}\right) = 1 \text{ ou } \left(\frac{t}{b}\right) = -1. \end{array} \right.$$

Décomposons actuellement le nombre premier p en deux carrés, en posant $p = \varphi^2 + \psi^2$ (où ψ est supposé pair) et mettons cette valeur de p dans l'équation (α') . Il viendra ainsi

$$t^2 - b u^2 = s^2 \varphi^2 + s^2 \psi^2,$$

et l'on aura ensuite en transposant:

$$t^2 - \psi^2 s^2 = (t + \psi s)(t - \psi s) = s^2 \varphi^2 + b u^2.$$

Les nombres s, t, u étant premiers entre eux comparés deux à deux, on voit par l'équation (α') que s ne saurait être divisible par b . Nous distinguerons maintenant deux cas selon que φ est ou n'est pas divisible par b , et nous examinerons d'abord le dernier de ces deux cas. Si nous désignons par m le plus grand diviseur commun de φ et u , m sera impair et non-divisible par b comme φ . Posons $\varphi = m \varphi'$, $u = m u'$ et substituons ces valeurs dans la dernière équation. Il viendra ainsi

$$(t + \psi s)(t - \psi s) = m^2 (s^2 \varphi'^2 + b u'^2).$$

Comme $s \varphi'$ et $b u'$ sont premiers entre eux, d'après ce qui précède, il suit d'un théorème connu qui est une conséquence très simple de la loi de réciprocité (*Théorie des Nombres* no. 197.), que tout diviseur R du facteur binôme du second membre qui est évidemment impair est tel que

$$\left(\frac{R}{b}\right) = 1.$$

La dernière équation fait voir que chacun des nombres $t + \psi s$, $t - \psi s$ est composé de deux facteurs, l'un diviseur de m^2 , l'autre diviseur de $s^2 \varphi'^2 + bu'^2$. Si nous désignons ces 4 facteurs par E , F , K et L , nous aurons ces équations

$$\begin{aligned} t + \psi s &= EK, & m^2 &= EF, \\ t - \psi s &= FL, & \varphi^2 s'^2 + bu'^2 &= KL. \end{aligned}$$

Il est facile de s'assurer que les nombres E et F , qui sont impairs l'un et l'autre, comme diviseurs de m^2 , sont premiers entre eux. En effet, si ces nombres étaient divisibles l'un et l'autre par un même nombre premier δ , δ diviserait chacun des nombres $t + \psi s$, $t - \psi s$ et par conséquent aussi leur demi-somme et leur demi-différence, c'est à dire, les nombres t et ψs . D'un autre côté, comme δ divise m^2 , il divisera aussi le nombre φ , φ étant égal à $m\varphi'$; il suit de là et de ce que $\varphi^2 + \psi^2$ est égal au nombre premier p , que ψ n'est pas divisible par b . Il faudrait donc, d'après ce qui précède, que δ fût diviseur commun de t et s , ce qui est impossible, ces nombres étant premiers entre eux. Donc les nombres E et F sont premiers entre eux, et comme leur produit est un carré, chacun d'eux en sera pareillement un. On a donc

$$\left(\frac{E}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{F}{b}\right) = 1.$$

On a aussi

$$\left(\frac{K}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{L}{b}\right) = 1,$$

K et L étant des diviseurs de $s^2 \varphi'^2 + bu'^2$. On conclut de là, en multipliant:

$$\left(\frac{EK}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{FL}{b}\right) = 1,$$

ou ce qui est la même chose:

$$\left(\frac{t + \psi s}{b}\right) = 1, \quad \left(\frac{t - \psi s}{b}\right) = 1.$$

Si l'on fait attention que b est un nombre premier $4n + 3$, on pourra présenter de cette autre manière la dernière de ces expressions,

$$\left(\frac{\psi s - t}{b}\right) = -1.$$

La dernière étant mise sous cette forme, on voit qu'on peut les comprendre l'une et l'autre dans cette formule

$$(\varepsilon') \quad \left(\frac{\psi s \pm t}{b}\right) = \pm 1,$$

dans laquelle les signes sont à volonté, mais les mêmes dans les deux membres.

Comme on a $\left(\frac{p}{b}\right) = 1$, la congruence $x^2 \equiv p \pmod{b}$ est possible et a, comme l'on sait, deux racines entre les limites $-\frac{1}{2}b$ et $\frac{1}{2}b$. Désignons par x l'une de ces racines prise au hasard. L'équation (α') donne cette congruence $t^2 \equiv ps^2 \pmod{b}$. Si l'on compare celle-ci à la précédente, on aura $t^2 \equiv x^2 s^2 \pmod{b}$. On conclut de là, $\pm t \equiv xs \pmod{b}$, le signe étant tantôt positif, tantôt négatif et dépendant du choix que l'on aura fait entre les deux racines de la congruence $x^2 \equiv p \pmod{b}$. Les signes étant à volonté dans la formule (s') on peut supposer qu'ils y sont les mêmes que dans celle-ci $\pm t \equiv xs \pmod{b}$. Remplaçant $\pm t$ par le nombre xs qui ne diffère de $\pm t$ que par un multiple de b , il viendra

$$\left(\frac{\psi s + xs}{b}\right) = \pm 1.$$

D'un autre côté, si l'on se rappelle que b est de la forme $4n+3$, on tirera de la formule $\pm t \equiv xs \pmod{b}$, $\pm \left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{xs}{b}\right)$. Si l'on multiplie cette expression par la précédente, on aura, les signes étant les mêmes dans ces deux formules,

$$\left(\frac{x \cdot x + \psi}{b}\right) \left(\frac{s^2}{b}\right) = \frac{t}{b}$$

ou ce qui revient au même:

$$\left(\frac{x \cdot x + \psi}{b}\right) = \left(\frac{t}{b}\right).$$

Si l'on compare cette formule avec ce qui a été prouvé plus haut (δ') , on obtiendra ce résultat:

$$(\xi') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{,,} -b \text{ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à } p, \text{ selon} \\ \text{,, que l'on a} \end{array} \right. \quad \text{,,} \left(\frac{x \cdot x + \psi}{b}\right) = 1 \text{ ou } \left(\frac{x \cdot x + \psi}{b}\right) = -1."$$

Ce résultat est relatif au cas où ϕ n'est pas divisible par b . Examinons maintenant le cas de ϕ divisible par b . Soient b^{1+x} et b^h respectivement les puissances les plus élevées de b qui divisent ϕ et u (x et h pouvant être nuls), soit de plus m le plus grand diviseur commun de $\frac{\phi}{b^{1+x}}$ et $\frac{u}{b^h}$. Si nous faisons $\phi = b^{1+x} m \phi'$, $u = b^h m u'$, les nombres ϕ' et u' , dont le premier est impair, le second pair, seront premiers entre eux, et non-

divisibles par b , et m sera impair et non divisible par b . La substitution des valeurs précédentes donne cette équation

$$(t + \psi s)(t - \psi s) = m^2 [b^{2x+2}(s\varphi')^2 + b^{2h+1}u'^2].$$

Il faut maintenant distinguer deux cas selon que l'on a $x \geq h$ ou $x < h$. Dans ce premier cas, le facteur binome du second membre peut être mis sous cette forme:

$$b^{2h+1} [u'^2 + b(b^{x-h}s\varphi')^2],$$

où il faut remarquer que les nombres u' et $b^{x-h}s\varphi'$ sont premiers entre eux. Dans le cas de $x < h$, on mettra le facteur binome sous la forme suivante:

$$b^{2x+2} [(s\varphi')^2 + b(b^{h-x-1}u')^2],$$

où les nombres $s\varphi'$ et $b^{h-x-1}u'$ sont premiers entre eux. On voit donc que le facteur binome est toujours le produit d'une puissance de b et d'une formule impaire telle que $g^2 + bh^2$, dans laquelle g et bh sont premiers entre eux. Désignant par b^γ la puissance de b dont il s'agit, on pourra donc écrire la dernière équation de cette manière:

$$(t + \psi s)(t - \psi s) = m^2 b^\gamma (g^2 + bh^2).$$

Les nombres $t + \psi s$, $t - \psi s$ ne sauroient être divisibles l'un et l'autre par b , puisqu'alors leur demi-somme qui est t , le seroit aussi, ce qu'on a vu plus haut être impossible. Si l'on désigne par $t \pm \psi s$ celui de ces deux nombres qui est divisible par b , on aura $t \pm \psi s \equiv 0 \pmod{b}$ et je dis que l'autre $t \mp \psi s$ est tel que $\left(\frac{t \mp \psi s}{b}\right) = 1$. En effet $t \mp \psi s$ est composé de deux facteurs E et K dont le premier E divise m^2 , le second $g^2 + bh^2$.

Or, on s'assure comme dans le cas de φ non-divisible par b , que E est un carré, de sorte qu'on a $\left(\frac{E}{b}\right) = 1$. On a aussi $\left(\frac{K}{b}\right) = 1$, K étant diviseur de $g^2 + bh^2$. On conclut de là en multipliant:

$$\left(\frac{EK}{b}\right) = \left(\frac{t \mp \psi s}{b}\right) = 1.$$

Il est permis d'augmenter $t \mp \psi s$ dans cette formule d'un multiple quelconque de b . Ajoutant le nombre $t \pm \psi s$ qu'on a vu être un tel multiple, il viendra $\left(\frac{2t}{b}\right) = 1$, ou ce qui revient au même: $\left(\frac{t}{b}\right) = \left(\frac{2}{b}\right)$, résultat dont la comparaison avec un théorème connu fait voir que dans le cas de φ divisible par b , on a $\left(\frac{t}{b}\right) = 1$ ou $\left(\frac{t}{b}\right) = -1$, selon que b

est de la forme $8n + 7$ ou de celle-ci $8n + 3$. Si l'on combine ceci avec le résultat obtenu plus haut (δ'), on trouve que, lorsque Φ est multiple de b :

„— b est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p , selon
„que b est de la forme $8n + 7$ ou de celle-ci $8n + 3$.”

En réunissant ce dernier résultat à celui auquel nous sommes parvenus plus haut (ζ'), on aura le théorème I. énoncé à la fin du paragraphe 4. du mémoire précédent, théorème qui se trouve ainsi établi d'une manière très simple et entièrement rigoureuse.

Occupons nous maintenant de la démonstration du théorème II. Désignons, comme dans tout ce qui précède, par a un nombre premier $4n + 1$ et par p un autre nombre premier également de la forme $4n + 1$ et tel que $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. On conclut de là, en appliquant la loi de réciprocité, qu'on a aussi $\left(\frac{p}{a}\right) = 1$. Ces conditions ayant lieu, il suit du théorème déjà cité plusieurs fois, que l'équation

$$(\eta') \quad t^2 + au^2 = ps^2,$$

peut être résolue. Si l'on suppose que les nombres t, u, s , comparés deux à deux, n'ont pas de diviseur commun, s sera pair et les deux autres seront l'un pair, l'autre impair, comme il est très facile de le voir. Il est évident en outre que, si l'équation est dans cet état, u n'est pas divisible par p , s ne l'est pas par a , et t n'est divisible ni par a ni par p .

Décomposons les nombres t et u en leur facteurs simples, en faisant $u = 2^v k k' k'' \dots$, $t = 2^u l l' l'' \dots$, $k, k', k'' \dots$ et $l, l', l'' \dots$ désignant des nombres premiers impairs, et l'un des nombres μ, ν étant égal à zéro.

L'équation (η') donne d'abord

$$\left(\frac{p}{k}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{k'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p}{k''}\right) = 1, \quad \dots$$

d'où l'on conclut ensuite en appliquant la loi de réciprocité:

$$\left(\frac{k}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k'}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{k''}{p}\right) = 1, \quad \dots$$

Faisant le produit des équations précédentes et de l'équation identique

$$\left(\frac{2^v}{p}\right) = \left(\frac{2^v}{p}\right), \text{ il viendra}$$

$$\left(\frac{2^v k k' k'' \dots}{p}\right) = \left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2^v}{p}\right).$$

Il résulte encore de l'équation (η') , qu'on a

$$\left(\frac{a}{l}\right) = \left(\frac{p}{l}\right), \quad \left(\frac{a}{l'}\right) = \left(\frac{p}{l'}\right), \quad \left(\frac{a}{l''}\right) = \left(\frac{p}{l''}\right), \dots$$

Comme les nombres premiers a et p sont l'un et l'autre de la forme $4n+1$, on conclut de là, en vertu de la loi de réciprocité:

$$\left(\frac{l}{a}\right) = \left(\frac{l}{p}\right), \quad \left(\frac{l'}{a}\right) = \left(\frac{l'}{p}\right), \quad \left(\frac{l''}{a}\right) = \left(\frac{l''}{p}\right), \dots$$

Multipliant entre elles toutes ces expressions, il viendra l'équation

$$\left(\frac{l'l''\dots}{a}\right) = \left(\frac{l'l''\dots}{p}\right),$$

qui se change en celle-ci, si l'on multiplie ses deux membres par $\left(\frac{2''}{a}\right)\left(\frac{2''}{p}\right)$:

$$\left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{2''}{p}\right) = \left(\frac{t}{p}\right)\left(\frac{2''}{p}\right).$$

Distinguons actuellement deux cas, selon que u est pair ou impair. Si u est pair, t est impair; on a donc alors $\mu=0$, et la dernière expression se réduit à celle-ci:

$$\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{t}{p}\right).$$

Quant à la formule $\left(\frac{u}{p}\right) = \left(\frac{2''}{p}\right)$, il est facile de voir qu'elle équivaut, dans ce cas, à celle-ci:

$$\left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer, que, si p est de la forme $8n+1$, on a $\left(\frac{2}{p}\right)=1$, et par conséquent aussi $\left(\frac{2''}{p}\right)=1$, et que, si p a la forme $8n+5$, v est égal à l'unité et qu'on a pour tout nombre premier. $p=8n+5$, $\left(\frac{2}{p}\right)=-1$.

Passons à l'autre cas qui est celui de t pair et u impair. On a, dans ce cas, $v=0$, ce qui réduit la formule $\left(\frac{u}{p}\right)=\left(\frac{2''}{p}\right)$, à $\left(\frac{u}{p}\right)=1$.

Si les nombres p et a sont l'un et l'autre de la forme $8n+1$, ou l'un et l'autre de la forme $8n+5$, on a $\left(\frac{2}{a}\right)=\left(\frac{2}{p}\right)$ et par conséquent aussi $\left(\frac{2''}{a}\right)=\left(\frac{2''}{p}\right)$, et la formule $\left(\frac{t}{p}\right)\left(\frac{2''}{a}\right)=\left(\frac{t}{a}\right)\left(\frac{2''}{p}\right)$ se change en celle-ci $\left(\frac{t}{p}\right)=\left(\frac{t}{a}\right)$. Si, au contraire, les nombres a, p sont l'un de la forme

$8n + 1$, l'autre de la forme $8n + 5$, on a $\left(\frac{2}{a}\right) = -\left(\frac{2}{p}\right)$. D'un autre côté, l'inspection de l'équation fait voir que, dans ce cas, le nombre t est impairement pair, de sorte que $\mu = 1$. On a donc alors $\left(\frac{t}{p}\right) = -\left(\frac{t}{a}\right)$. Ces deux résultats sont compris dans la formule

$$\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)(-1)^{\frac{a-1}{4} + \frac{p-1}{4}}.$$

Si nous réunissons tout ce que nous venons de prouver, nous aurons cet énoncé:

„Si u est pair, l'on a $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)$, $\left(\frac{u}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{4}}$; si u est impair, l'on a $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t}{a}\right)(-1)^{\frac{p-1}{4} + \frac{a-1}{4}}$, $\left(\frac{u}{p}\right) = 1$.”

En comparant ce résultat avec la congruence $t^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-a)^{\frac{p-1}{4}} u^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$, qui se déduit immédiatement de l'équation (η'), on trouvera ce résultat:

$$(\S') \left\{ \begin{array}{l} \text{„Si } u \text{ est pair, } a \text{ est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport} \\ \text{„à } p, \text{ selon que l'on a} \\ \qquad \qquad \qquad \text{„}\left(\frac{t}{a}\right) = 1 \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -1, \\ \text{„et si } u \text{ est impair, } a \text{ est ou n'est pas résidu biquadratique re-} \\ \text{„lativement à } p, \text{ selon que l'on a} \\ \qquad \qquad \qquad \text{„}\left(\frac{t}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}} \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -(-1)^{\frac{a-1}{4}}.” \end{array} \right.$$

Décomposons p en deux carrés, en posant $p = \varphi^2 + \psi^2$ (ψ étant supposé pair). La substitution de cette valeur dans l'équation (η') donnera

$$(t + \psi s)(t - \psi s) = \varphi^2 s^2 - a u^2.$$

Nous distinguerons maintenant deux cas selon que φ est ou n'est pas divisible par a . Premier cas: φ n'est pas divisible par a . Comme φ est impair et non-divisible par a , le plus grand diviseur commun de φ et de u , que nous désignerons par m , sera aussi impair et non-divisible par a . Si nous faisons $\varphi = m\varphi'$, $u = mu'$, l'équation précédente se changera en celle-ci:

$$(t + \psi s)(t - \psi s) = m^2(\varphi'^2 s^2 - a u'^2);$$

s est premier à au et par conséquent aussi à au' , φ' est également premier à au' ; donc $\varphi'^2 s^2$ et au'^2 n'ont pas de diviseur commun. Cela étant ainsi, il suit d'un théorème connu (*Théorie des Nombres* no. 197.) que tout diviseur impair de $s^2 \varphi'^2 + a u'^2$ est tel qu'on a $\left(\frac{R}{a}\right) = 1$.

Dé-

Désignant par E , K , F et L quatre indéterminées, nous pourrons remplacer la dernière équation par celles que je vais écrire

$$\begin{aligned} t + \psi s &= EK, & m^2 &= EF, \\ t - \psi s &= FL, & KL &= (s\phi')^2 - au'^2. \end{aligned}$$

On s'assure facilement que les nombres impairs E et F sont premiers entre eux. Il suit de là que chacun d'eux est un carré, de sorte qu'on a

$$\left(\frac{E}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{F}{a}\right) = 1.$$

Il faut maintenant considérer successivement le cas de u pair et celui de u impair. Si u est pair, $u' = \frac{u}{m}$ le sera pareillement, et comme $s\phi'$ est toujours impair, $(s\phi')^2 - au'^2$ sera également impair. Les nombres K et L seront donc dans ce cas impairs l'un et l'autre et comme ils divisent le binôme précédent, on aura

$$\left(\frac{K}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{L}{a}\right) = 1.$$

Multipliant ces expressions par celles que nous venons d'écrire, il viendra

$$\left(\frac{KE}{a}\right) = \left(\frac{t+\psi s}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{LF}{a}\right) = \left(\frac{t-\psi s}{a}\right) = 1.$$

Comme a est un nombre premier $4n+1$, il est permis d'écrire la formule $\left(\frac{t-\psi s}{a}\right) = 1$ de cette autre manière: $\left(\frac{\psi s - t}{a}\right) = 1$. On a donc, dans le cas de u pair, $\left(\frac{\psi s + t}{a}\right) = 1$, le double signe étant à volonté.

Passons au cas où u est impair. Le nombre $u' = \frac{u}{m}$ sera également impair dans ce cas, et comme les carrés impairs $(s\phi')^2$, u'^2 , sont de la forme $8n+1$, on voit que le binôme $(s\phi')^2 - au'^2$ sera de la forme $8n$ ou de la forme $8n+4$, selon que a est de la forme $8n+1$ ou de celle-ci $8n+5$. Il est facile de s'assurer que, si a est de la forme $8n+1$, on a $\left(\frac{K}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{L}{a}\right) = 1$. En effet, si l'on fait $K = 2^\beta K'$, 2^β étant la puissance la plus élevée de 2 qui divise K , K' sera un diviseur impair de $(s\phi')^2 - au'^2$ et l'on aura $\left(\frac{K'}{a}\right) = 1$. D'un autre côté, on sait, par un théorème connu, que tout nombre premier $a = 8n+1$, est tel que $\left(\frac{2}{a}\right) = 1$. On conclut de là $\left(\frac{2^\beta}{a}\right) = 1$, et multipliant ensuite par $\left(\frac{K'}{a}\right) = 1$, il viendra $\left(\frac{K}{a}\right) = 1$. On prouve d'une manière toute semblable

qu'on a aussi $\left(\frac{L}{a}\right) = 1$. Multipliant ces formules par les expressions $\left(\frac{E}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{F}{a}\right) = 1$, obtenues plus haut, il viendra

$$\left(\frac{EK}{a}\right) = \left(\frac{t+\psi s}{a}\right) = 1, \quad \left(\frac{FL}{a}\right) = \left(\frac{t-\psi s}{a}\right) = 1.$$

Il est facile de voir que ces résultats, qui ont lieu, lorsque u est impair et qu'en même temps a est de la forme $8n+1$, peuvent être réunis dans la formule $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = 1$, dans laquelle le double signe est à volonté.

Le nombre u étant toujours impair, supposons a de la forme $8n+5$. Le produit KL , qui équivaut au binôme $(s\phi')^2 - au'^2$, étant alors de la forme $8n+4$, et les nombres K et L étant évidemment pairs l'un et l'autre, chacun d'eux sera de la forme $4n+2$, de sorte qu'en faisant $K = 2K'$, $L = 2L'$, K' et L' seront impairs; et comme ces derniers nombres sont en outre diviseurs de $(s\phi')^2 - au'^2$, il suit de ce qui a été dit plus haut, qu'on a $\left(\frac{K'}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{L'}{a}\right) = 1$. Mais on a, d'un autre côté, a étant de la forme $8n+5$, $\left(\frac{2}{a}\right) = -1$. Multipliant par les expressions précédentes il viendra d'abord $\left(\frac{K}{a}\right) = -1$, $\left(\frac{L}{a}\right) = -1$, et si l'on fait ensuite le produit de ces nouvelles expressions et des expressions $\left(\frac{E}{a}\right) = 1$, $\left(\frac{F}{a}\right) = 1$, trouvées plus haut, on aura

$$\left(\frac{EK}{a}\right) = \left(\frac{t+\psi s}{a}\right) = -1, \quad \left(\frac{FL}{a}\right) = \left(\frac{t-\psi s}{a}\right) = -1.$$

Ces résultats, qui sont relatifs au cas où u est impair et où le nombre a est de la forme $8n+5$, sont compris dans la double formule

$$\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = -1.$$

En résumant tout ce qui précède, on aura cet énoncé:

„Si u est pair, on a $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = 1$; si, au contraire, u est impair, „on a $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}}$, le double signe étant à volonté dans l'un et „l'autre cas.”

On a vu plus haut (§') que, lorsque u est pair, a est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que l'on a $\left(\frac{t}{a}\right) = 1$, ou

$\left(\frac{t}{a}\right) = -1$. D'un autre côté, il résulte de ce qui précède, qu'on a, dans ce même cas, $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = 1$. On conclut de là que, si u est pair, a est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à p , selon que l'on a

$$\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right).$$

On a également vu plus haut (§') que, lorsque u est impair, a est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que l'on a

$$\left(\frac{t}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}} \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -(-1)^{\frac{a-1}{4}}.$$

D'un autre côté, l'énoncé précédent fait voir, qu'on a, dans la cas de u impair, $\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{4}}$. En comparant ces deux résultats, on conclut, que, lorsque u est impair, a est ou n'est pas résidu biquadratique relativement à p , selon que l'on a

$$\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right) \text{ ou } \left(\frac{t}{a}\right) = -\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right).$$

La conclusion étant la même dans le cas de u pair et dans celui de u impair, on peut énoncer ce résultat :

„Si a est résidu biquadratique relativement à p , on a $\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right)$;
 „si, au contraire, a n'est pas résidu biquadratique par rapport à p , on
 „a $\left(\frac{t}{a}\right) = -\left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right)$, le double signe étant à volonté dans l'un et l'autre cas.”

Comme on a $\left(\frac{p}{a}\right) = 1$, la congruence $x^2 \equiv p \pmod{a}$, sera possible et aura, comme l'on sait, deux racines entre les limites $-\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}a$. Supposons que x désigne indistinctement l'une ou l'autre de ces racines. On tire immédiatement de l'équation (η') , $t^2 \equiv p s^2 \pmod{a}$, congruence dont la comparaison avec la précédente donne $t^2 \equiv x^2 s^2$, $\pm t \equiv x s \pmod{a}$, le signe supérieur ayant lieu pour l'une et le signe inférieur pour l'autre des deux racines de la congruence $x^2 \equiv p \pmod{a}$. Si a est résidu biquadratique relativement à p , on a, comme l'on a vu il n'y a qu'un instant, $\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s \pm t}{a}\right)$. Le double signe étant à volonté dans cette formule, nous pouvons le supposer égal à celui qui se trouve dans la congruence $\pm t \equiv x s \pmod{a}$. Si nous remplaçons $\pm t$ par $x s$, il viendra :

$$\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\psi s + \chi s}{a}\right) = \left(\frac{\psi + \chi}{a}\right) \left(\frac{s}{a}\right).$$

D'un autre coté, on tire de la congruence $\pm t \equiv \chi s \pmod{a}$ en se rappelant que a est de la forme $4n+1$, $\left(\frac{t}{a}\right) = \left(\frac{\chi}{a}\right) \left(\frac{s}{a}\right)$. Si l'on multiplie maintenant membre par membre cette équation et la précédente, on aura $\left(\frac{t^2}{a}\right) = \left(\frac{\chi}{a}\right) \left(\frac{\chi + \psi}{a}\right) \left(\frac{s^2}{a}\right)$ ou ce qui revient au même: $\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{a}\right) = 1$, résultat qui a lieu lorsque a est résidu biquadratique relativement à p . On trouverait de la même manière, que, si a n'est pas résidu biquadratique par rapport à p , on a $\left(\frac{\chi \cdot \chi + \psi}{a}\right) = -1$.

Ces résultats sont relatifs au cas où ϕ n'est pas divisible par a . Resterait à traiter le cas où ϕ est divisible par a . L'analyse qu'il faut appliquer à ce second cas, étant entièrement semblable à celle que nous avons exposée avec détail dans ce qui précède, nous nous dispenserons de la développer ici, et nous nous bornerons à énoncer le résultat auquel elle conduit:

„Si ϕ est divisible par a , a est ou n'est pas résidu biquadratique par rapport à p , selon que a est de la forme $8n+1$ ou de celle-ci $8n+5$.”

Ce résultat et celui qui précède constituent le théorème II. énoncé dans le dernier paragraphe du mémoire précédent.

On a sans doute remarqué que les énoncés des théorèmes I. et II. sont tels qu'ils n'y entre que la racine ψ du carré pair ψ^2 que l'on obtient en décomposant p en deux carrés. Il seroit facile de modifier ces énoncés de manière, à ce qu'ils ne renfermassent plus que la racine ϕ du carré impair. On y parviendrait en suivant une marche entièrement semblable à celle que nous avons exposée dans ce qui précède.

Les résultats ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{D}'$), sur lesquels nous nous sommes appuyés pour établir les théorèmes I. et II., renferment eux mêmes une infinité de théorèmes intéressans analogues au premier des théorèmes de M. Gauß. On déduit, par exemple, de l'énoncé ($\mathcal{D}'$), en y supposant $a=5$:

„ p désignant un nombre premier $20n+1$, si l'on fait $p = t^2 + 5u^2$, 5 sera ou ne sera résidu biquadratique relativement à p , selon que u

„est pair ou impair; au contraire, si p désigne un nombre premier
 „ $20n+9$ et qu'on fasse de même $p=t^2+5u^2$, 5 sera ou ne sera pas
 „résidu biquadratique par rapport à p , selon que u est impair ou pair.”

Les résultats (δ') et (ϑ') se rapportent aux équations

$$t^2 - bu^2 = ps^2, \quad t^2 + au^2 = ps^2.$$

On trouverait par des considérations du même genre des résultats analogues relatifs aux équations $t^2 + bu^2 = ps^2$, $t^2 - au^2 = ps^2$.

En traitant la première de ces équations et faisant ensuite, pour donner un exemple, $b=3$, on auroit ce théorème particulier:

„ p désignant un nombre premier $12n+1$, si l'on fait $p=t^2+3u^2$,
 „ t sera un nombre impair. Cela posé, je dis que 3 sera ou ne sera pas
 „résidu biquadratique par rapport à p , selon que t est de la forme
 „ $12n \pm 1$ ou de celle-ci $12n \pm 5$.”

4.

Ueber Reihen, durch welche höhere Potenzen des Bogens durch den Sinus ausgedrückt werden.

(Von Herrn Dr. E. J. Scholtz in Breslau.)

In den *Mélanges d'analyse*, herausgegeben im Jahre 1815 von Herrn v. Stainville, findet man für das Quadrat des Bogens eine nach den steigenden Potenzen des Sinus geordnete Reihe, die sich durch die Einfachheit ihrer Form empfiehlt. Die Methode, nach welcher man mit Hülfe der Differenzialrechnung diese Reihe ableiten kann, schien mir einer Anwendung auf höhere Potenzen des Bogens fähig zu sein, und der Versuch, den ich damit machte, bestätigte meine Vermuthung. Das Gesetz, nach welchem sich die Form der Coefficienten der Sinuspotenzen richtet, ist wenigstens noch für die 3te, 4te, 5te und 6te Potenz des Bogens sehr einfach. Für noch höhere Potenzen ist der Ausdruck allerdings verwickelter, kann jedoch nachweislich ohne Schwierigkeit aus den vorhergehenden Potenzen abgeleitet werden.

Die eben erwähnte Methode, das Quadrat des Bogens durch eine nach den Potenzen des Bogens fortlaufende Reihe auszudrücken, beruht auf Folgendem: Es sei ϕ der Bogen, $x = \sin \phi$ und $y = \phi^2$, so ist $\partial \phi = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$. Die Reihe, durch welche y oder ϕ^2 dargestellt werden soll, muß nothwendig nach den geraden Potenzen von x fortgehen, weil ϕ^2 einerlei Werth erhält, man mag x positiv oder negativ nehmen, und daher folgende Form haben:

$$y = a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots + a_{2n-2} x^{2n-2} + a_{2n} x^{2n} + \text{etc.}$$

Aus $\phi^2 = y$ folgt $\partial y = 2\phi \partial \phi$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2\phi}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{\partial y}{\partial x} \sqrt{1-x^2} = 2\phi$, und nach nochmaliger Differenzirung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \sqrt{1-x^2} - \frac{x \partial y}{\partial x \sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ und hieraus die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (1-x^2) - x \frac{\partial y}{\partial x} = 2.$$

Aus der angenommenen Reihe erhält man aber

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2a_2x + 4a_4x^3 + 6a_6x^5 + \dots + (2n-2)a_{2n-2}x^{2n-3} + 2na_{2n}x^{2n-1} + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2a_2 + 3.4.a_4x^2 + 5.6.a_6x^4 + \dots + (2n-3)(2n-2)a_{2n-2}x^{2n-4} + (2n-1).2na_{2n}x^{2n-2} + \text{etc.}$$

Die Substitution dieser Werthe der Differentialquotienten in jene Gleichung giebt folgende:

$$2 = \begin{cases} 2a_2 + 3.4.a_4x^2 + 5.6.a_6x^4 + \dots + (2n-1).2n.a_{2n}x^{2n-2} + \text{etc.} \\ - 2.a_2 & - 3.4.a_4 & - (2n-3)(2n-2).a_{2n-2} \\ - 2.a_2 & - 4.a_4 & - (2n-2).a_{2n-2} \end{cases}$$

wodurch die Coefficienten der Potenzen von x in der Reihe für ϕ^2 bestimmt sind:

$$2a_2 = 2, \quad 3.4.a_4 = 2^2.a_2, \quad 5.6.a_6 = 4^2.a_4, \quad \dots \quad (2n-1)2n.a_{2n} = (2n-2)^2.a_{2n-2};$$

$$a_2 = 1, \quad a_4 = \frac{2^2}{3.4}, \quad a_6 = \frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}; \quad \text{u. s. w.} \quad a_{2n} = \frac{(2n-2)^2.a_{2n-2}}{(2n-1).2n},$$

woraus von selbst folgt: $a_{2n} = \frac{2^2.4^2.6^2\dots(2n-2)^2}{3.4.5.6.7.8\dots(2n-1).2n}$, welcher Ausdruck

sich auf folgenden reducirt: $a_{2n} = \frac{2.4.6\dots(2n-2)}{3.5.7\dots(2n-1).n}$. Die Reihe ist also folgende:

$$y = x^2 + \frac{2.x^4}{3.2} + \frac{2.4.x^6}{3.5.3} + \frac{2.4.6.x^8}{3.5.7.4} + \dots + \frac{2.4.6\dots(2n-2).x^{2n}}{3.5.7\dots(2n-1).n} + \text{etc.}$$

Betrachten wir nun ganz allgemein irgend eine beliebige Potenz des Bogens ϕ^m , so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, wenn nemlich m eine ungerade, und wenn m eine gerade Zahl ist. Wie auch die Reihe für ϕ^m gestaltet sein mag, so erhellt wenigstens so viel, daß in derselben die niedrigste Potenz von x die m te sein muß, und zum Coefficienten 1 hat. Ist m eine ungerade Zahl, so sieht man sogleich, daß in der Reihe für ϕ^m die Potenzen von x nur nach ungeraden Exponenten fortschreiten können, weil der Zahlenwerth von ϕ^m für positive und negative x gleich sein und nur entgegengesetzte Zeichen haben muß. Ist aber m eine gerade Zahl, so können die wachsenden Exponenten von x nur gerade Zahlen sein, weil ϕ^m gleiche positive Werthe, sowohl für positive als negative x erhalten muß. Aber im einen wie im andern Falle wird in der Reihe der Exponent einer jeden Potenz von x immer um 2 kleiner sein als der der nächst höheren Potenz, so daß also, mag m gerade oder ungerade sein, die Reihe für ϕ^m immer folgende Form

haben wird, wenn man $\varphi^m = y$ setzt:

$y = a_m x^m + a_{m+2} x^{m+2} + a_{m+4} x^{m+4} + \dots + a_q x^q + \text{etc.} \dots (\mu)$
 wo q von der Form $m + 2p$ sein, und zugleich mit m gerade oder ungerade sein muß, und $a_m = 1$ ist.

Mit Hilfe der vorhin gebrauchten Methode zur Entwicklung des Quadrats des Bogens in eine Reihe, kann man nun die Coefficienten in der Reihe für φ^m durch die Coefficienten in der Reihe für φ^{m-2} bestimmen, so daß man also immer, wenn die Reihe für irgend eine Potenz des Bogens bekannt ist, im Stande ist, die Reihe für die Potenz, deren Exponent um 2 größer ist, zu finden. Wir wollen uns nun, um φ^m durch eine Reihe darzustellen, die Reihe für φ^{m-2} gegeben denken, und indem wir $z = \varphi^{m-2}$ setzen, der Reihe diese Form geben:

$z = b_{m-2} x^{m-2} + b_m x^m + b_{m+2} x^{m+2} + \dots + b_q x^q + \text{etc.},$
 wo wieder $b_{m-2} = 1$ und $q = m + 2p$ ist.

Aus $y = \varphi^m$ erhalten wir $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m \varphi^{m-1}}{\sqrt{1-x^2}}$, oder $\frac{\partial y}{\partial x} \sqrt{1-x^2} = m \varphi^{m-1}$,
 und letzteres noch einmal differentiirt, dann mit $\sqrt{1-x^2}$ multiplicirt und z statt φ^{m-2} gesetzt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (1-x^2) - x \frac{\partial y}{\partial x} = (m-1) \cdot m \cdot z \dots (M).$$

Wenn man nun die aus $(\mu.)$ erhaltenen Ausdrücke für die Differentialquotienten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= m a_m x^{m-1} + (m+2) a_{m+2} x^{m+1} + (m+4) a_{m+4} x^{m+3} + \dots \\ &\dots + (q-2) a_{q-2} x^{q-3} + q \cdot a_q x^{q-1} + \text{etc.}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= (m-1) m a_m x^{m-2} + (m+1)(m+2) a_{m+2} x^m + (m+3)(m+4) a_{m+4} x^{m+2} + \dots \\ &\dots + (q-3)(q-2) a_{q-2} x^{q-2} + (q-1) q \cdot a_q x^{q-2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

in die Gleichung $(M.)$ substituirt und statt z die demselben gleichgesetzte Reihe schreibt, so bekommt man, indem man gleiche Potenzen von x zusammen ordnet:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} (m-1) \cdot m \cdot a_m \left| \begin{array}{l} x^{m-2} + (m+1)(m+2) \cdot a_{m+2} \\ - (m-1) \cdot m \cdot a_m \end{array} \right| x^m + (m+3)(m+4) \cdot a_{m+4} \left| \begin{array}{l} x^{m+2} \\ - (m+1)(m+2) \cdot a_{m+2} \end{array} \right| \\ - (m-1) \cdot m \cdot b_{m-2} \left| \begin{array}{l} - m \cdot a_m \\ - (m-1) \cdot m \cdot b_m \end{array} \right| - (m-1) \cdot m \cdot b_{m+2} \left| \begin{array}{l} \\ - (m-1) \cdot m \cdot b_{m+2} \end{array} \right| \\ + \dots + (q-1) \cdot q \cdot a_q \left| \begin{array}{l} x^{q-2} + \text{etc.} \\ - (q-3)(q-2) \cdot a_{q-2} \\ - (q-2) \cdot a_{q-2} \\ - (m-1) \cdot m \cdot b_{q-2} \end{array} \right| \end{array} \right.$$

Hier-

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen der mit a bezeichneten Coefficienten:

$$\begin{aligned} a_m &= b_{m-2} = 1, \\ a_{m+2} &= \frac{m^2 \cdot a_m + (m-1)m \cdot b_m}{(m+1)(m+2)}, \\ a_{m+4} &= \frac{(m+2)^2 \cdot a_{m+2} + (m-1)m \cdot b_{m+2}}{(m+3)(m+4)}, \\ a_{m+6} &= \frac{(m+4)^2 \cdot a_{m+4} + (m-1)m \cdot b_{m+4}}{(m+5)(m+6)}, \\ a_{m+8} &= \frac{(m+6)^2 \cdot a_{m+6} + (m-1)m \cdot b_{m+6}}{(m+7)(m+8)}, \end{aligned}$$

u. s. w.

und endlich

$$a_q = \frac{(q-2)^2 \cdot a_{q-2} + (m-1)m \cdot b_{q-2}}{(q-1) \cdot q},$$

oder da $q = m + 2p$:

$$a_{m+2p} = \frac{(m+2p-2)^2 \cdot a_{m+2p-2} + (m-1)m \cdot b_{m+2p-2}}{(m+2p-1)(m+2p)},$$

und eben so a_{q+2} oder

$$a_{m+2p+2} = \frac{(m+2p)^2 \cdot a_{m+2p} + (m-1)m \cdot b_{m+2p}}{(m+2p+1)(m+2p+2)}.$$

Substituirt man nun in a_{m+2} den Werth von $a_m = b_{m-2}$, und den so bestimmten Werth von a_{m+2} in a_{m+4} , und a_{m+4} in a_{m+6} u. s. f., so findet man nach Ausführung der gehörigen Reductionen:

$$a_m = b_{m-2} = 1;$$

$$a_{m+2} = \frac{m \cdot m}{(m+1)(m+2)} \cdot b_{m-2} + \frac{(m-1) \cdot m}{(m+1)(m+2)} \cdot b_m = \frac{m \cdot m}{(m+1)(m+2)} \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} b_m \right),$$

$$\begin{aligned} a_{m+4} &= \frac{m(m+2) \cdot m}{(m+1)(m+3)(m+4)} \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} b_m \right) + \frac{(m-1) \cdot m}{(m+3)(m+4)} \cdot b_{m+2} \\ &= \frac{m(m+2) \cdot m}{(m+1)(m+3)(m+4)} \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} b_m + \frac{(m-1)(m+1)}{m \cdot (m+2)} b_{m+2} \right), \end{aligned}$$

und auf dieselbe Weise:

$$\begin{aligned} a_{m+6} &= \frac{m(m+2)(m+4) \cdot m}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+6)} \\ &\quad \times \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} b_m + \frac{(m-1)(m+1)}{m \cdot (m+2)} b_{m+2} + \frac{(m-1)(m+1)(m+3)}{m \cdot (m+2)(m+4)} b_{m+4} \right), \\ a_{m+8} &= \frac{m(m+2)(m+4)(m+6) \cdot m}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)(m+8)} \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} b_m + \frac{(m-1)(m+1)}{m(m+2)} b_{m+2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m-1)(m+1)(m+3)}{m(m+2)(m+4)} b_{m+4} + \frac{(m-1)(m+1)(m+3)(m+5)}{m(m+2)(m+4)(m+6)} b_{m+6} \right), \end{aligned}$$

woraus man sieht, daß der allgemeine Coefficient, d. i. der zur q ten oder $(m+2p)$ ten Potenz des Sinus gehörige, folgende Form haben wird:

$$a_{m+2p} = \frac{m(m+2)(m+4)\dots(m+2p-2)}{(m+1)(m+3)(m+5)\dots(m+2p-1)} \cdot \frac{m}{m+2p} \cdot \left(b_{m-2} + \frac{m-1}{m} \cdot b_m + \frac{(m-1)(m+1)}{m \cdot (m+2)} \cdot b_{m+2} \right. \\ \left. + \frac{(m-1)(m+1)(m+3)}{m(m+2)(m+4)} \cdot b_{m+4} + \dots + \frac{(m-1)(m+1)(m+3)\dots(m+2p-3)}{m(m+2)(m+4)\dots(m+2p-2)} \cdot b_{m+2p-2} \right).$$

Von der Richtigkeit dieses Ausdrucks kann man sich leicht überzeugen, wenn man diesen Werth von a_{m+2p} in die Formel für den nächstfolgenden Coefficienten $a_{m+2p+2} = \frac{(m+2p)^2 \cdot a_{m+2p} + (m-1)m \cdot b_{m+2p}}{(m+2p+1)(m+2p+2)}$ setzt, indem man dann diesen letzten Coefficienten gerade so gebildet findet, als wenn man in den Ausdruck von a_{m+2p} statt $2p$ gesetzt hätte $2p+2$. Denn daraus folgt, nach der bekannten Schlussfolge, daß das in a_{m+2p} ausgesprochene Gesetz der Bildung der Coefficienten allgemein richtig ist, da es für a_{m+2} , a_{m+4} u. s. w., oder für $p=1, =2$, u. s. w. gilt. Nur $a_m = b_{m-2}$, welches der allgemeine Coefficient für $p=0$ angeben müßte, scheint in demselben nicht mit eingeschlossen zu sein, doch kann man dem allgemeinen Coefficienten, ohne seinen Werth zu ändern, leicht eine solche Form geben, daß man daraus auch den ersten Coefficienten ohne Anstoß wieder finden kann. Nach den so eben aufgestellten Bestimmungen der Coefficienten kann man nun die Reihe für eine jede Potenz $\varphi^m = y$ ableiten, wenn man die Reihe für die um 2 niedrigere Potenz $\varphi^{m-2} = z$ kennt. — Wenden wir dies nun zunächst an auf:

Die 2te Potenz. Für diese ist $m=2$, und also, wenn man $2n$ statt $q=m+2p$ schreibt,

$$\varphi^2 = y = a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2n} x^{2n} + \text{etc.}$$

Die Reihe für die um zwei niedrigere Potenz $\varphi^{m-2} = \varphi^0 = 1$ beschränkt sich auf das erste Glied $x^0 = 1$, so daß also $b_{m-2} = 1$, aber alle übrigen mit b bezeichneten Coefficienten 0 sind. Setzt man nun in den für φ^m allgemein gefundenen Coefficienten $b_{m-2} = 1$ und alle übrigen mit b bezeichneten Coefficienten $= 0$, und $m=2$, $m+2p=2n$, so wird man sie genau so erhalten, wie vorhin aus der unmittelbaren Bestimmung der Reihe für φ^2 .

Für die 3te Potenz ist $m=3$ und nunmehr $\varphi^m = \varphi^3 = y$, und die um 2 niedrigere Potenz, nemlich $z = \varphi$, wird bekanntlich durch folgende Reihe der Sinuspotenzen ausgedrückt:

$$z = x + \frac{1}{1.2.3} x^3 + \frac{1.3}{2.4.5} x^5 + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6\dots(2n-2)(2n-1)} x^{2n-1} + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n.(2n+1)} x^{2n+1} + \text{etc.}$$

Da $m=3$, so hat man $b_{m-2}=b_1=1$, $b_m=b_3=\frac{1}{2 \cdot 3}$, $b_{m+2}=b_5=\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}$,
 $b_{m+4}=b_7=\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$ etc., und setzt man $m+2p=2n+1$,

$$b_{m+2p-2}=b_{2n-1}=\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot (2n-1)} \text{ u. s. w.}$$

Die allgemeinen Formeln gehen nunmehr, wenn man $m=3$ setzt und jene Werthe von b darin substituirt, in folgende über:

$$a_3=b_1=1; \quad a_5=\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) = \frac{1}{2};$$

$$a_7=\frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 7} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}\right) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 7} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 6}, \text{ und ebenso}$$

$$a_9=\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2}\right) \text{ u. s. w.}$$

$$a_{m+2p}=a_{2n+1}=\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2n \cdot (2n+1)}$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)(2n-2) \times 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)(2n-1) \times 2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)(2n-1)}\right);$$

$$a_{2n+1}=\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2n \cdot (2n+1)} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right).$$

Wir haben also nunmehr für φ^3 folgende Reihe:

$$\varphi^3 = x^3 + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) x^5 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 7} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) x^7 + \dots$$

$$\dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2n \cdot (2n+1)} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}\right) x^{2n+1} + \text{etc.}$$

Die 4te Potenz wird nach den allgemeinen Formeln durch die Coefficienten der zweiten bestimmt. Da $m=4$, so hat man $b_{m-2}=b_2=1$,
 $b_m=b_4=\frac{2}{3 \cdot 2}$, $b_{m+2}=b_6=\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 3}$, $b_{m+4}=b_8=\frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4}$, u. s. w., und all-

gemein, wenn man $2n=m+2p$ setzt, $b_{m+2p-2}=b_{2n-2}=\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3) \cdot (n-1)}$,

und da $a_m=a_4$; $a_{m+2}=a_6$ u. s. w., und $a_{m+2p}=a_{2n}$, so ist

$$a_4=b_2=1; \quad a_6=\frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 6} \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3 \cdot 2}\right) = \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5} \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = \frac{2}{3},$$

$$a_8=\frac{4 \cdot 6 \cdot 4}{5 \cdot 7 \cdot 8} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 3}\right) = \frac{4 \cdot 6 \cdot 2}{5 \cdot 7 \cdot 4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) = \frac{7}{15},$$

$$a_{10}=\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4}\right) = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 2}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 5} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) \text{ etc.}$$

$$a_{2n}=\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2) \cdot 2}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-1) \cdot n} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-4)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)(n-1)}\right),$$

$$a_{2n}=\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2) \cdot 2}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-1) \cdot n} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2}\right).$$

Die Reihe ist also

$$\varphi^4 = x^4 + \frac{4.2}{3.5} \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) x^6 + \frac{4.6.2}{5.7.4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) x^8 + \frac{4.6.8.2}{5.7.9.5} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) x^{10} + \dots$$

$$+ \frac{4.6.8 \dots (2n-2).2}{5.7.9 \dots (2n-1).n} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2}\right) x^{2n} + \text{etc.}$$

Die 5te Potenz wird aus der dritten abgeleitet. Da $m=5$, so ist $a_m = a_5$, $a_{m+2} = a_7$ u. s. f. und $a_{m+2p} = a_{5+2p} = a_{2n+1}$, wenn man $m+2p = 2n+1$ setzt; und eben so $b_{m-2} = b_3$, $b_m = b_5$, $b_{m+2} = b_7$ u. s. f., und $b_{m+2p-2} = b_{2n-1}$. Der Kürze wegen wollen wir mit $\Sigma \frac{1}{(2n-1)^2}$ die Summe der reciproken Quadrate aller ungeraden Zahlen von 1 bis $(2n-1)$ einschliesslich bezeichnen, so dass z. B. $\Sigma \frac{1}{7^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2}$. Wenn man nun in die allgemeinen Formeln $m=5$ setzt, und jene Werthe von b aus der Reihe für die dritte Potenz substituirt, so erhält man:

$$a_5 = b_3 = 1;$$

$$a_7 = \frac{5.5}{6.7} \left[1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{4.5} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\right] = \frac{5.5.9}{6.7} \left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\right] = \frac{5}{6};$$

$$a_9 = \frac{5.7.5}{6.8.9} \left[1 + \frac{9}{5^2} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{4.6}{5.7} \cdot \frac{3.5.3}{4.6.7} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right)\right]$$

$$= \frac{5.7.5.9}{6.8.9} \left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{7^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right)\right] = \frac{4.7}{8.9}, \text{ und eben so}$$

$$a_{11} = \frac{5.7.9.5.9}{6.8.10.11} \left[\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{7^2} \Sigma \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} \Sigma \frac{1}{7^2}\right] \text{ u. s. w., und da}$$

$$b_{2n-1} = \frac{3.5.7 \dots (2n-3).3}{4.6.8 \dots (2n-2).(2n-1)} \Sigma \frac{1}{(2n-3)^2},$$

so findet man den allgemeinen Coefficienten nach Ausführung aller Reductionen:

$$a_{2n+1} = \frac{5.7.9 \dots (2n-1).5.9}{6.8.10 \dots 2n.(2n+1)}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{7^2} \Sigma \frac{1}{5^2} + \Sigma \frac{1}{9^2} \Sigma \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \Sigma \frac{1}{(2n-3)^2} \right\}.$$

Die etwas unbehülfliche Form dieses Coefficienten lässt sich indess weit einfacher darstellen. Wir wollen hierbei nur bei dem allgemeinen Coefficienten stehen bleiben, der ja die übrigen mit einschliesst. Man kann sich nemlich leicht überzeugen, dass die in den Klammern $\{ \}$ eingeschlossene endliche Reihe in dem allgemeinen Coefficienten, deren Summe wir mit Q_n bezeichnen wollen, ist: $Q_n = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{(2n-1)^4}$, wo

$\sum^2 \frac{1}{(2n-1)^2}$ das Quadrat der Reihe $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}$, und $\sum \frac{1}{(2n-1)^4}$ die Summe der reciproken 4ten Potenzen aller ungeraden Zahlen von 1 inclus. bis $(2n-1)$ inclus. bedeutet. Denn wenn wir einstweilen $\frac{1}{2} \sum^2 \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(2n-1)^4} = P_n$ setzen, so ist, wenn man in

Q_n und P_n , $n+1$ statt n substituirt, $Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{(2n+1)^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2}$ und

$$P_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\sum \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(2n-1)^4} - \frac{1}{2(2n+1)^4}$$

$$= \frac{1}{2} \sum^2 \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{1}{(2n+1)^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2} = P_n + \frac{1}{(2n+1)^2} \sum \frac{1}{(2n-1)^2},$$

so also, daß wenn $Q_n = P_n$, auch $Q_{n+1} = P_{n+1}$ ist. Nun ist aber wirklich $Q_n = P_n$ für $n=2$, $n=3$, u. s. w., also ist auch ganz allgemein $Q_n = P_n$, und man kann daher a_{2n+1} unter folgender einfacheren Form darstellen:

$$a_{2n+1} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-1) \cdot 5 \cdot 9}{2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \dots 2n \cdot (2n+1)} \left\{ \sum^2 \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum \frac{1}{(2n-1)^4} \right\}, \text{ oder auch}$$

$$a_{2n+1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1) \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2n \cdot (2n+1)} \left\{ \sum^2 \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum \frac{1}{(2n-1)^4} \right\}.$$

Für die 6te Potenz ist $m=6$ und $m-2=4$. Die mit b bezeichneten Coefficienten $b_{m-2}=b_4$, $b_m=b_6$, $b_{m+2}=b_8$ u. s. w., $b_{m+2p-2}=b_{2n-2}$ (wenn man $m+2p=2n$ setzt) müssen aus der Reihe für die 4te Potenz genommen werden, und verfährt man auf eine ähnliche Weise wie bei der 5ten Potenz, so erhält man folgende Werthe der Coefficienten: $a_6=1$;

$$a_8 = \frac{6^2}{7 \cdot 8} \left[1 + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 5} \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \cdot \frac{5}{6} \right] = \frac{2 \cdot 6^2}{7 \cdot 8} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right)^2 - 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} \right] = 1$$

$$a_{10} = \frac{6^2 \cdot 8}{7 \cdot 9 \cdot 10} \left[\frac{4}{2^2} + \frac{4}{3^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) + \frac{4}{4^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) \right] = \frac{6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 6}{7 \cdot 9 \cdot 10} \left(\sum^2 \frac{1}{4^2} - \sum \frac{1}{4^4} \right),$$

wenn wir auf eine ähnliche Weise wie oben,

$$\sum^2 \frac{1}{9^2} = \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} \right)^2 \text{ und}$$

$$\sum \frac{1}{9^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{9^4} \text{ setzen;}$$

$$a_{12} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 6}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} \cdot \left[\frac{4}{2^2} + \frac{4}{3^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) + \frac{4}{4^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \frac{4}{5^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \right) \right]$$

$$= \frac{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12} \cdot \left(\sum^2 \frac{1}{5^2} - \sum \frac{1}{5^4} \right), \text{ und endlich}$$

$$\begin{aligned}
 a_{2n} &= \frac{6 \cdot 8 \cdot 10 \dots (2n-2) \cdot 6}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n-1) \cdot 2n} \\
 &\times \left[\frac{4}{2^2} + \frac{4}{3^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) + \frac{4}{4^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \frac{4}{5^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \right) + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-3) \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \dots (2n-4) \cdot 2}{6 \cdot 8 \cdot 10 \dots (2n-2) \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n-3) \cdot (n-1)} \cdot \sum \frac{1}{(n-2)^2} \right] \\
 &= \frac{6 \cdot 8 \cdot 10 \dots (2n-2) \cdot 6}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n-1) \cdot 2n} \left[\frac{4}{2^2} + \frac{4}{3^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) + \frac{4}{4^2} \sum \frac{1}{3^2} + \frac{4}{5^2} \sum \frac{1}{4^2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{4}{(n-1)^2} \sum \frac{1}{(n-2)^2} \right],
 \end{aligned}$$

$$a_{2n} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10 \dots (2n-2) \cdot 6 \cdot 2}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n-1) \cdot 2n} \left(\sum^2 \frac{1}{(n-1)^2} - \sum \frac{1}{(n-1)^4} \right),$$

wo $\sum^2 \frac{1}{(n-1)^2}$ das Quadrat der Summe der reciproken Quadrate aller natürlichen Zahlen, von 1 bis $(n-1)$ einschliesslich, und $\sum \frac{1}{(n-1)^4}$ die Summe der reciproken Biquadrate derselben natürlichen Zahlen bezeichnet. Von der Richtigkeit der Ableitung des letzten Ausdrucks von a_{2n} aus dem vorhergehenden kann man sich auf einem ähnlichen Wege, wie bei der fünften Potenz überzeugen. Auch kann man den Ausdruck für a_{2n} so schreiben:

$$a_{2n} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2) \cdot 5 \cdot 6}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2n-1) \cdot 4n} \left(\sum^2 \frac{1}{(n-1)^2} - \sum \frac{1}{(n-1)^4} \right),$$

in welcher Form auch der erste Coefficient a_6 richtig angegeben wird.

Für noch höhere Potenzen scheint sich das Gesetz für die Bildung der Coefficienten nicht mehr in einer hinreichend einfachen Form darstellen zu lassen, weshalb ich auch diese Untersuchungen hier nicht weiter fortführen will.

5.

Note sur le mémoire de Mr. L. Olivier No. 4. du second tome de ce journal, ayant pour titre „remarques sur les séries infinies et leur convergence.”

(Par Mr. N. H. Abel.)

Suivie d'une remarque de Mr. L. Olivier sur le même objet.

1. Note de Mr. Abel.

On trouve pag. 34. dans ce mémoire le théorème suivant pour reconnoître si une série est convergente ou divergente:

„Si l'on trouve que dans une série infinie le produit du n^{me} terme ou „du n^{me} des groupes de termes qui conservent le même signe, par n , est „zéro pour $n = \infty$, on peut regarder cette seule circonstance comme „une marque, que la série est convergente; et réciproquement, la série ne „peut pas être convergente si le produit $n.a_n$ n'est pas nul pour $n = \infty$.”

La dernière partie de ce théorème est très juste, mais la première ne semble pas l'être. Par exemple la série

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} \dots \frac{1}{n \log n}$$

est divergente quoique $na_n = \frac{1}{\log n}$ soit zéro pour $n = \infty$. En effet les logarithmes hyperboliques dont il est question sont toujours moindre que leurs nombres moins 1, c'est à dire, on a toujours $\log(1+x) < x$. Si $x > 1$ cela est évident. Si $x < 1$ on a

$$\log(1+x) = x - x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right) - x^4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x\right) \dots$$

donc aussi dans ce dernier cas $\log(1+x) < x$, puisque $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}x$ sont tous positifs. En faisant $x = \frac{1}{n}$, cela donne

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \text{ ou bien } \log \frac{1+n}{n} < \frac{1}{n},$$

ou

$$\log(1+n) < \frac{1}{n} - \log n < \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right) \log n:$$

donc

$$\log \log(1+n) < \log \log n + \log\left(1 + \frac{1}{n \log n}\right).$$

Mais puisque $\log(1+x) < x$, on a $\log\left(1 + \frac{1}{n \log n}\right) < \frac{1}{n \log n}$, donc en vertu de l'expression précédente,

$$\log \log(1+n) < \log \log n + \frac{1}{n \log n}.$$

En faisant successivement $n = 2, 3, 4, \dots$ on trouve

$$\log \log 3 < \log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2},$$

$$\log \log 4 < \log \log 3 + \frac{1}{3 \log 3},$$

$$\log \log 5 < \log \log 4 + \frac{1}{4 \log 4},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\log \log(1+n) < \log \log n + \frac{1}{n \log n},$$

donc, en prenant la somme,

$$\log \log(1+n) < \log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} \dots + \frac{1}{n \log n}.$$

Mais $\log \log(1+n) = \infty$ pour $n = \infty$, donc la somme de la série proposée

$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{4 \log 4} \dots + \frac{1}{n \log n}$ est infiniment grande et par conséquent cette série est divergente. Le théorème énoncé dans l'endroit cité est donc en défaut dans ce cas.

En général on peut démontrer qu'il est impossible de trouver une fonction φn telle, qu'une série quelconque $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n$, dont nous supposons tous les termes positifs, soit convergente, si $\varphi n \cdot a_n$ est zéro pour $n = \infty$ et divergente dans le cas contraire. C'est ce qu'on peut faire voir à l'aide du théorème suivant.

Si la série $a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_n \dots$ est divergente, la suivante

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_2} \dots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_{n-1}} \dots$$

le sera aussi. En effet, en remarquant que les quantités $a_0, a_1, a_2, \dots$ sont positifs, on a en vertu du théorème $\log(1+x) < x$, démontré ci dessus,

$$\log(a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_n) - \log(a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_{n-1})$$

c'est à dire

$$\log\left(1 + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_{n-1}}\right) < \frac{a_n}{a_0 + a_1 + a_2 \dots + a_{n-1}},$$

donc, en faisant successivement $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\log(a_0 + a_1) - \log a_0 < \frac{a_1}{a_0},$$

$$\log(a_0 + a_1 + a_2) - \log(a_0 + a_1) < \frac{a_2}{a_0 + a_1},$$

$$\log(a_0 + a_1 + a_2 + a_3) - \log(a_0 + a_1 + a_2) < \frac{a_3}{a_0 + a_1 + a_2},$$

.....

$$\log(a_0 + a_1 + \dots + a_n) - \log(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) < \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}},$$

et en prenant la somme,

$$\log(a_0 + a_1 + \dots + a_n) - \log a_0 < \frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}}.$$

Mais si la série $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ est divergente, sa somme est infinie et le logarithme de cette somme l'est également; donc la somme de la série $\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0 + a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}}$ est aussi infiniment grande, et cette série est par conséquent divergente, si la série $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ l'est. Cela posé, supposons que φn soit une fonction de n telle, que la série $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ soit convergente ou divergente selon que $\varphi n \cdot a_n$ est zéro ou non pour $n = \infty$. Alors la série

$$\frac{1}{\varphi 1} + \frac{1}{\varphi 2} + \frac{1}{\varphi 3} + \frac{1}{\varphi 4} + \dots + \frac{1}{\varphi n} + \dots$$

sera divergente et la série

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi 2 \cdot \frac{1}{\varphi 1}} + \frac{1}{\varphi 3 \left(\frac{1}{\varphi 1} + \frac{1}{\varphi 2} \right)} + \frac{1}{\varphi 4 \left(\frac{1}{\varphi 1} + \frac{1}{\varphi 2} + \frac{1}{\varphi 3} \right)} + \dots \\ & + \frac{1}{\varphi n \left(\frac{1}{\varphi 1} + \frac{1}{\varphi 2} + \frac{1}{\varphi 3} + \dots + \frac{1}{\varphi (n-1)} \right)} + \dots \end{aligned}$$

convergente; car dans la première on a $a_n \varphi n = 1$ et dans la seconde $a_n \varphi n = 0$ pour $n = \infty$. Or selon le théorème établi plus haut, la seconde série est nécessairement divergente, en même temps que la première; donc une fonction φn telle qu'on l'a supposée n'existe pas. En faisant $\varphi n = n$, les deux séries en question deviendront

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

et

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3(1 + \frac{1}{2})} + \frac{1}{4(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})} + \dots + \frac{1}{n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1})} + \dots$$

qui par conséquent sont divergentes toutes deux.

2. Remarque de Mr. L. Olivier.

Soit

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

une série donnée, dont p. e. tous les termes sont positifs et vont toujours en décroissant et dont il s'agit de juger la convergence. Représentons les termes de cette série par les ordonnées orthogonales d'une courbe *XY* (Fig. 12.) dont les abscisses sont les nombres entiers 1, 2, 3, 4, ... Soit *Bb* égal au terme a_n , le reste de la série à partir de ce terme sera représenté par la somme des aires des parallélogrammes *Bc*, *Cd*, *De* etc. à l'infini. En second lieu le produit $n.a_n$ sera représenté par l'aire du parallélogramme *Bbvu*. Mais puisque les ordonnées de la courbe diminuent toujours de manière que l'axe des abscisses est une asymptote de la courbe, le parallélogramme *Bbvu* sera évidemment plus grand que la somme des parallélogrammes *Bc*, *Cd*, *De*, ... Donc si $n.a_n$ est zéro pour $p = \infty$, la somme des termes de la série donnée à partir du n^{me} terme, c'est à dire le reste de la série le sera à plus forte raison, et par conséquent la série sera convergente si $n.a_n = 0$ pour $n = \infty$.

De cette manière le théorème que j'ai présenté à l'endroit cité semble être très bien fondé et les exemples que j'ai donnés semblent le vérifier. Néanmoins, d'après ce que Mr. Abel vient de remarquer ci haut, le théorème n'est pas généralement applicable. C'est un nouveau cas très remarquable qui fait voir combien il faut avoir de précaution partout où il s'agit des quantités infinies. La cause de la contradiction apparente entre le résultat des conclusions apparemment évidentes et le résultat effectif, est, qu'il n'est pas permis d'appliquer indifféremment à l'infini ce qui est bien sûr pour des quantités finies. En effet la somme des aires des parallélogrammes représentés par les produits $n.a_n$, $n.a_{2n}$, $n.a_{3n}$, ... est également plus grande que celle des parallélogrammes *Bc*, *Cd*, *De*, ... et même plus petit que l'aire du parallélogramme *Bbvu*. Donc, on pourroit dire avec le même droit que le reste de la série donnée à partir du n^{me} terme est nul si la somme

$$n(a_n + a_{2n} + a_{3n} + \dots)$$

l'est, et la somme de cette série pourra effectivement être encore un quantité finie ou même infinie si $n.a_n$ est nul.

6.

Annäherungs-Construction des Kreis-Umfangs und Flächen-Inhalts.

(Vom Herrn Cand. phil. Specht zu Berlin.)

Ist BC der Radius eines Kreises, so findet man den Umfang und Flächen-Inhalt dieses Kreises näherungsweise mittelst folgender einfachen geometrischen Construction. Wenn man nemlich den Durchmesser BD (Fig. 13.) senkrecht auf BC stellt, und über D hinaus verlängert; alsdann auf dieser Verlängerung, $Da = ab = bc$, gleich dem fünften Theile des Radius nimmt; ferner die BC über C hinaus bis A verlängert, so daß $BA = Ca$; endlich aus dem Punkte A mit der Cc die Parallele AE zieht, welche die Verlängerung von BD in E trifft: so wird die BE dem Umfange, und das Dreieck BCE dem Flächen-Inhalte des gegebenen Kreises sehr nahe kommen.

Für $BC = 1$ ist $Ba = 2\frac{1}{5}$, $Bc = 2\frac{3}{5}$,

$$Ca^2 = BC^2 + Ba^2 = \frac{146}{25}, \quad Ca = \frac{\sqrt{146}}{5},$$

$$BC : Bc = BA : BE,$$

$$1 : \frac{13}{5} = \frac{\sqrt{146}}{5} : BE \text{ und } BE = \frac{13\sqrt{146}}{25}$$

$$= \sqrt{39,7484} = 3,141591953 \dots$$

Nun ist $\pi = 3,141592653 \dots$ woraus zu ersehen, daß die Construction den Umfang und Flächen-Inhalt des Kreises bis zur sechsten Decimal-Stelle genau giebt.

7.

Beweis zweier Lehrsätze

im zweiten Bande dieses Journals, Heft I. S. 97. No. 7. und
Heft III. S. 292. No. 64.

(Von Herrn Remy, Stud. phil. zu Berlin.)

1.

Lehrsatz. Halbirt man in einem Viereck im Kreise sowohl die Winkel zwischen den Diagonalen, als auch die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten einschließen, so sind von den 6 Geraden, welche diese Winkel halbiren, 3 und 3 parallel.

Wenn nemlich $ABCD$ (Fig. 14.) das gegebene Viereck im Kreise ist, und RQ und HI , ST und UV halbiren die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks einschließen, NM und OP hingegen die Winkel zwischen den Diagonalen des Vierecks, so ist zu beweisen, daß:

1) RQ , OP , UV und

2) ST , NM , HI

parallel sind.

Beweis. Zuerst ist klar, daß RQ und HI , ST und UV , NM und OP auf einander senkrecht stehen. Denn es ist z. B. $AGQ = \frac{1}{2}AGD$, $AGH = \frac{1}{2}AGK$, also $AGQ + AGH = \frac{1}{2}(AGD + AGK)$, oder $HGQ = \frac{1}{2}.2R = R$, wo R einen rechten Winkel bezeichnet. Dasselbe gilt von den Halbirungs-Linien ST , UV und OP , NM .

Verlängert man nun die Halbirungs-Linie RQ bis F , so läßt sich zeigen, daß RF auf NM senkrecht steht. Denn in den Dreiecken NBE und ECM sind die Winkel z und u einander gleich, weil sie auf gleichen Bogen stehen, desgleichen sind die Winkel v und t , als Hälften der Scheitel-Winkel AEB und DEC , gleich, folglich ist auch $\angle x = \angle y$, und mithin ist das Dreieck NGM über NM gleichschenkelig. Also steht die Halbirungs-Linie GF des Winkels an der Spitze dieses Dreiecks senkrecht auf der Grundlinie NM . Da nun auch OP senkrecht auf NM stehet, so folgt, daß die Halbirungs-Linien RQ und OP parallel sind. Ferner sind die Linien HI und NM parallel, wegen der rechten

Winkel EFG und HGF . Auf dieselbe Weise folgt, daß ST und NM , und wegen der rechten Winkel HWE und WHV , auch UV und PO parallel sind. Es ist also QR mit PO , UV mit PO , und folglich QR mit UV , desgleichen HI mit NM und ST mit NM , folglich HI mit ST parallel, so daß also von den 6 Halbirungs-Linien 3 und 3 parallel sind.

2.

Lehrsatz. Sind a, b, c, d die Seiten, e, f die Diagonalen eines sphärischen Vierecks, und ist g derjenige Hauptkreisbogen, welcher die Mitten der beiden Diagonalen verbindet, so ist allemal

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4 \cos \frac{1}{2} e \cos \frac{1}{2} f \cos g.$$

(Am bezeichneten Orte steht durch einen Druckfehler $2 \cos \frac{1}{2} e \cos \frac{1}{2} f \cos g$ statt $4 \cos \frac{1}{2} e \cos \frac{1}{2} f \cos g$.)

Beweis. Es sei $ABCD$ (Fig. 15.) das sphärische Viereck, und $CF = FB$, $AG = GD$. Bezeichnet man nun in dem sphärischen Dreieck ACF die Seite AF durch r und den Winkel AFC durch α , so ist bekanntlich:

$$\cos \alpha = \cos r \cos \frac{1}{2} e + \cos a \sin \frac{1}{2} e \sin r,$$

und in dem sphärischen Dreieck ABF

$$\cos b = \cos r \cos \frac{1}{2} e - \cos \alpha \sin \frac{1}{2} e \sin r,$$

folglich

$$1) \quad \cos a + \cos b = 2 \cos r \cos \frac{1}{2} e.$$

Eben so erhält man für die sphärischen Dreiecke BFD und CFD , wenn man die Seite FD durch ϱ und den Winkel BFD durch β bezeichnet:

$$\cos c = \cos \varrho \cos \frac{1}{2} e + \cos \beta \sin \varrho \sin \frac{1}{2} e \quad \text{und}$$

$$\cos d = \cos \varrho \cos \frac{1}{2} e - \cos \beta \sin \varrho \sin \frac{1}{2} e,$$

folglich

$$2) \quad \cos c + \cos d = 2 \cos \varrho \cos \frac{1}{2} e.$$

Addirt man nun die Gleichungen (1. und 2.), so ist:

$$3) \quad \cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 2 \cos \frac{1}{2} e (\cos r + \cos \varrho).$$

Auf dieselbe Weise, wie oben, erhält man aber auch, wenn man den Winkel AGF durch γ bezeichnet:

$$\cos r = \cos \frac{1}{2} f \cos g + \cos \gamma \sin \frac{1}{2} f \sin \gamma \quad \text{und}$$

$$\cos \varrho = \cos \frac{1}{2} f \cos g - \cos \gamma \sin \frac{1}{2} f \sin \gamma,$$

folglich

$$4) \quad \cos r + \cos \varrho = 2 \cos \frac{1}{2} f \cos g,$$

und substituirt man diesen Werth für $\cos r + \cos \varrho$ in die Gleichung (3.), so erhält man:

$$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d = 4 \cos \frac{1}{2} e \cos \frac{1}{2} f \cos g.$$

8.

Addition au Mémoire de M. Abel sur les fonctions elliptiques, inséré dans le vol. II. de ce journal, cah. 2. pag. 101.

(Par Mr. C. G. J. Jacobi à Königsberg.)

M. Abel dans son excellent Mémoire sur les fonctions elliptiques a prouvé le premier, que les équations du degré nn , desquelles dépend la division d'une fonction elliptique de première espèce en n parties, peuvent être résolues algébriquement. Cependant la méthode de cet auteur est susceptible d'une grande simplification. Je veux la proposer ici en deux mots, en me servant de la notation de M. Abel.

Si l'on désigne par p, q deux racines quelconques de l'équation $x^{2n+1} - 1 = 0$, on aura l'expression

$$\sum_{-n}^{+n} \sum_{-n}^{+n} \left\{ \varphi \left(\beta + \frac{2m\omega + 2\mu\pi i}{2n+1} \right) p^m q^\mu \right\}$$

égale à une expression de la forme

$$\sqrt[2n+1]{(A + Bf((2n+1)\beta)F(2(n+1)\beta))},$$

A et B étant des fonctions rationnelles et entières de $\varphi((2n+1)\beta)$. Or en donnant à p et q toutes leurs valeurs possibles, on pourra au moyen de ces expressions, qui seront au nombre $(2n+1)^2$, exprimer linéairement toutes les racines, sans avoir besoin de résoudre encore une équation du $n^{\text{ième}}$ degré. Aussi on saura exprimer toutes les racines au moyen des puissances entières de deux de ces expressions.

Königsberg, 25. Janvier 1828.

9.

Die Function $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots$ durch die Anzahl der a ausgedrückt.

In Folge der Aufgabe 40. S. 193. im zweiten Bande dieses Journals.

(Von Herrn Th. Clausen zu Altona.)

Es sei $\varphi(x)$ der Werth dieser Function für die Anzahl x ; so ist, wie man leicht sieht:

$$\varphi(x+1) = \frac{1}{a + \varphi(x)}, \text{ oder}$$

$$(1.) \quad \varphi(x+1) \varphi(x) + a \varphi(x+1) = 1 \dots\dots$$

Man nehme an, daß x eine ganze positive Zahl sei und setze

$$\frac{1}{\varphi(x) \cdot \varphi(x-1) \dots \varphi(1)} = F(x).$$

Multiplicirt man also die Gleichung (1.) mit $F(x+1)$, so verwandelt sie sich in:

$$F(x-1) + a F(x) = F(x+1).$$

Dieser Gleichung thut man Genüge durch die Annahme $F(x) = k\beta^x$, und findet dann zur Bestimmung von β folgende Gleichung:

$$\beta^2 - a\beta - 1 = 0,$$

woraus $\beta = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}$ folgt. Es ist also:

$$(2.) \quad F(x) = k[\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}]^x + k'[\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}]^x \dots\dots$$

Um die Constanten k und k' zu bestimmen, bemerke ich, daß $F(0) = 1$ und $F(1) = a$ ist; und also:

$$1 = k + k',$$

$$a = \frac{1}{2}a(k + k') + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}(k - k'); \text{ folglich}$$

$$k = + \frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}} [\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}],$$

$$k' = - \frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}} [\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}],$$

und demnach:

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}} \{ [\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}]^x - [\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}]^x \},$$

oder endlich, da $\varphi(x) = \frac{F(x-1)}{F(x)}$ ist:

$$(3.) \quad \varphi(x) = \frac{[\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}]^x - [\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}]^x}{[\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}]^{x+1} - [\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 1)}]^{x+1}} \cdot \dots$$

Diese Gleichung enthält also den Werth der obenstehenden Function durch die Anzahl der Glieder x ausgedrückt, für jedes ganze positive x ; und zwar in solcher Form, daß man ihn ohne Weiteres auf jeden beliebigen Werth von x ausdehnen kann.

Ich füge noch einige merkwürdige Eigenschaften dieser Function, hinzu:

$$(4.) \quad \varphi(x+y) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y) - a \cdot \varphi(x) \varphi(y)}{1 + \varphi(x) \varphi(y)} \dots$$

deren Richtigkeit sich durch Substitution der Gleichung (3.) zeigt.

Man hat ferner vermöge der Gleichung (1.):

$$\varphi(-1) = \infty,$$

$$\varphi(-2) = -a,$$

$$\varphi(-2)\varphi(-3) = 1 - a\varphi(-2),$$

$$\varphi(-2)\varphi(-3)\varphi(-4) = \varphi(-2) - a\varphi(-2)\varphi(-3),$$

$$\varphi(-2)\varphi(-3)\dots\varphi(-n) = \varphi(-2)\varphi(-3)\dots\varphi[-(n-2)] - a\varphi(-2)\dots\varphi[-(n-1)].$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen und der Gleichung (1.) findet man, daß die Reihe:

$$(5.) \quad \varphi(nx) =$$

$$\frac{n \cdot \varphi(x) + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \varphi(-2) \varphi(x)^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi(-2) \varphi(-3) \varphi(x)^3 + \text{etc.}}{1 + \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2} \varphi(x)^2 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi(-2) \varphi(x)^3 + \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \varphi(-2) \varphi(-3) \varphi(x)^4 + \text{etc.}}$$

wenn sie für den Werth n gilt, auch für $n+1$ richtig ist. Da sie aber für $n=2$ gilt, so folgt daraus die Richtigkeit für alle Fälle, wo n eine ganze positive Zahl ist. Aus der Gleichung (3.) sieht man noch, daß

$$(6.) \quad \varphi(-\frac{1}{2}) = \sqrt{-1}.$$

10.

Ueber die Fälle, wenn die Reihe von der Form

$$y = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{1.2} \cdot \frac{\beta \cdot \beta + 1}{\gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \text{etc.}$$

ein Quadrat von der Form

$$z = 1 + \frac{\alpha'}{1} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} \cdot \frac{\delta'}{\varepsilon'} x + \frac{\alpha' \cdot \alpha' + 1}{1.2} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta' + 1}{\gamma' \cdot \gamma' + 1} \cdot \frac{\delta' \cdot \delta' + 1}{\varepsilon' \cdot \varepsilon' + 1} x^2 + \text{etc. hat.}$$

(Von Herrn Th. Clausen zu Altona.)

Zwischen den Differentialen von y und x findet folgende Relation Statt:

$$(1.) \quad (x^3 - x^2) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \{(\alpha + \beta + 1)x^2 - \gamma x\} \frac{\partial y}{\partial x} + \alpha \beta x y = 0.$$

Eine nochmalige Differentiation giebt:

$$(2.) \quad (x^3 - x^2) \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \{(\alpha + \beta + 4)x^2 - (\gamma + 2)x\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \{(2\alpha + 2\beta + \alpha\beta + 2)x - \gamma\} \frac{\partial y}{\partial x} + \alpha \beta y = 0.$$

Die Reihe z giebt:

$$(3.) \quad (x^3 - x^2) \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \{(3 + \alpha' + \beta' + \delta')x^2 - (1 + \gamma' + \varepsilon')x\} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \{(1 + \alpha' + \beta' + \delta' + \alpha'\beta' + \alpha'\delta' + \beta'\delta')x - \gamma'\varepsilon'\} \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha'\beta'\delta'z.$$

Soll nun $z = y^2$ sein, so muß man haben:

$$(4.) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2y \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2, \\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 2y \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 6 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \end{cases}$$

Setzt man noch

$$(5.) \quad \begin{cases} a' = \alpha' + \beta' + \delta', \\ b' = \alpha'\beta' + \alpha'\delta' + \beta'\delta', \\ c' = \alpha'\beta'\delta', \\ d' = \varepsilon' + \gamma', \\ e' = \varepsilon'\gamma', \end{cases}$$

so wird die Gleichung (3.):

$$\begin{aligned}
 (6.) \quad & (x^3 - x^2) 2\gamma \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \{(3 + a')x^2 - (1 + d')x\} 2\gamma \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\
 & + \{(1 + a' + b')x - e'\} \cdot 2\gamma \frac{\partial y}{\partial x} + c'y^2 + 6(x^3 - x^2) \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\
 & + 2\{(3 + a')x^2 - (1 + d')x\} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Dieser muß durch die Gleichungen (1.) und (2.) Genüge gethan werden. Multiplicirt man sie deswegen resp. mit $2\gamma \frac{A}{x} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot B$ und 2γ , welche Form, wie man leicht sieht, die Factoren nur haben können: so muß die Summe mit der Gleichung (6.) identisch sein. Man erhält durch Vergleichung der einzelnen Coefficienten:

$$\begin{aligned}
 3 + a' &= A + \alpha + \beta + 4 \\
 1 + d' &= A + \gamma + 2 \\
 1 + a' + b' &= A(\alpha + \beta + 1) + \frac{1}{2}B\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + \alpha\beta + 2 \\
 e' &= A\gamma + \gamma \\
 c' &= 2A\alpha\beta + 2\alpha\beta \\
 b &= B \\
 2(3 + a') &= B(\alpha + \beta + 1) \\
 2(1 + d') &= B\gamma
 \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \alpha + \beta + \frac{1}{2} \\
 A &= 2\alpha + 2\beta - 1 \\
 B &= b \\
 a' &= 3\alpha + 3\beta \\
 b' &= 2\alpha^2 + 8\alpha\beta + 2\beta^2 \\
 c' &= 4(\alpha + \beta)\alpha\beta \\
 d' &= 3\gamma - 1 \\
 e' &= (2\gamma - 1)\gamma.
 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (5.) sieht man, daß α' , β' und δ' die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 - a'x^2 + b'x - c'$ sind; man findet diese leicht 2α , 2β und $\alpha + \beta$. Ferner sind γ' und ε' die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - d'x + e'$, die sich γ und $2\gamma - 1$ ergeben.

Aus dem Vorhergehenden folgt also, daß, damit das Quadrat der Reihe y von der Form z sei, die Relation Statt finden müsse:

$$\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2},$$

und daß dann die Werthe von α' , β' und δ' , die unter sich verwechselt werden können:

$$2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta,$$

die Werthe von γ' und ε' aber, die ebenfalls unter sich verwechselt werden können,

$$\gamma, 2\gamma - 1$$

sind.

Als Beispiel will ich suchen, in welchen Fällen die Coefficienten von z Cubi sein können. Hier ist $\gamma' = \varepsilon' = 1$, mithin $\gamma = 1$; überdem $\alpha = \beta$; folglich da $\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$ ist, $\alpha = \frac{1}{4}$. Wir haben also in diesem Fall die Reihe:

$$y = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 x + \left(\frac{1.5}{4.8}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.5.9}{4.8.12}\right)^2 x^3 + \text{etc.}$$

$$z = yy = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 x^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 x^3 + \text{etc.}$$

Ein zweites Beispiel sei die Reihe:

$$y = \frac{\text{arc. sin } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5} x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} x^3 + \text{etc.}$$

Hier ist $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{3}{2}$, mithin die erforderliche Bedingung erfüllt; es folgt also $\alpha', \beta', \delta' = 1, 1, 1$; $\gamma', \varepsilon' = \frac{3}{2}, 2$. Demnach

$$z = \frac{(\text{arc. sin } \sqrt{x})^2}{x} = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} x + \frac{2.4}{3.5} \cdot \frac{1}{3} x^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7} \cdot \frac{1}{4} x^3 + \text{etc.}$$

11.

Beitrag zur Theorie der Reihen.

(Von Herrn Th. Clausen zu Altona.)

Da es häufig vorkommt, dass man das Product zweier Reihen sucht: so glaube ich, dass die Auflösung der Aufgabe: zu finden in welchen Fällen das Product der zwei Reihen

$$y = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta \cdot \beta + 1}{\gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta \cdot \beta + 1 \cdot \beta + 2}{\gamma \cdot \gamma + 1 \cdot \gamma + 2} x^3 + \dots$$

$$z = 1 + \frac{\alpha'}{1} \cdot \frac{\beta'}{\gamma'} x + \frac{\alpha' \cdot \alpha' + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta' + 1}{\gamma' \cdot \gamma' + 1} x^2 + \frac{\alpha' \cdot \alpha' + 1 \cdot \alpha' + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\beta' \cdot \beta' + 1 \cdot \beta' + 2}{\gamma' \cdot \gamma' + 1 \cdot \gamma' + 2} x^3 + \dots$$

von der Form

$$u = 1 + \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{e} x + \frac{a \cdot a + 1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{b \cdot b + 1}{d \cdot d + 1} \cdot \frac{c \cdot c + 1}{e \cdot e + 1} x^2 \\ + \frac{a \cdot a + 1 \cdot a + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b \cdot b + 1 \cdot b + 2}{d \cdot d + 1 \cdot d + 2} \cdot \frac{c \cdot c + 1 \cdot c + 2}{e \cdot e + 1 \cdot e + 2} x^3 + \dots$$

sey, nicht uninteressant sein dürfte.

Die Eigenschaften dieser Reihen werden durch folgende Differentialgleichungen ausgedrückt:

$$(1.) \quad (x^2 - x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \{(1 + \alpha + \beta)x - \gamma\} \frac{\partial y}{\partial x} + \alpha \beta y = 0.$$

$$(2.) \quad (x^2 - x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \{(1 + \alpha' + \beta')x - \gamma'\} \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha' \beta' z = 0.$$

$$(3.) \quad (x^2 - x) \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \{(3 + \alpha + \beta)x - (1 + \gamma)\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (1 + \alpha + \beta + \alpha \beta) \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

$$(4.) \quad (x^2 - x) \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \{(3 + \alpha' + \beta')x - (1 + \gamma')\} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1 + \alpha' + \beta' + \alpha' \beta') \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

$$(5.) \quad (x^3 - x^2) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \{(3 + a + b + c)x^2 - (1 + d + e)x\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+ \{(1 + a + b + c + ab + ac + bc)x - de\} \frac{\partial u}{\partial x} + abc u = 0.$$

Es sei nun

$$u = yz, \text{ so ist}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = z \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + y \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Nach Substitution dieser Werthe muß der Gleichung (5.) durch (1.), (2.), (3.) und (4.) Genüge gethan werden. Multiplicirt man also diese resp. mit $Az + Bx \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$, $Cy + Dx \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$, xz , xy (die Factoren können nemlich nur diese Form haben), und vergleicht die Summe der Producte mit der Gleichung (5.), so findet man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 (6.) \quad & 3 + a + b + c = 3 + \alpha + \beta + A \\
 (7.) \quad & = 3 + \alpha' + \beta' + C \\
 (8.) \quad & 1 + d + e = 1 + \gamma + A \\
 (9.) \quad & = 1 + \gamma' + C \\
 (10.) \quad & 3 = B \\
 (11.) \quad & 3 = D \\
 (12.) \quad & 2(3 + a + b + c) = B(1 + \alpha + \beta) + D(1 + \alpha' + \beta') \\
 (13.) \quad & 2(1 + d + e) = B\gamma + D\gamma' \\
 (14.) \quad & 1 + a + b + c + ab + ac + bc = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta + (1 + \alpha + \beta)A + \alpha'\beta'D \\
 (15.) \quad & = 1 + \alpha' + \beta' + \alpha'\beta' + (1 + \alpha' + \beta')C + \alpha\beta B \\
 (16.) \quad & de = \gamma A \\
 (17.) \quad & = \gamma' C \\
 (18.) \quad & abc = \alpha\beta A + \alpha'\beta' C.
 \end{aligned}$$

Diese 13 Gleichungen geben außer der Bestimmung der 9 Größen $A, B, C, D, a, b, c, d, e$ noch 4 Bedingungsgleichungen zwischen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. Durch (6.) (13.) findet man:

$$\begin{aligned}
 (19.) \quad & A = \frac{1}{2}\gamma + \frac{3}{2}\gamma' - 1 \\
 (20.) \quad & B = 3 \\
 (21.) \quad & C = \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma' - 1 \\
 (22.) \quad & D = 3 \\
 (23.) \quad & a + b + c = \frac{3}{2}(\alpha + \beta + \alpha' + \beta') \\
 (24.) \quad & d + e = \frac{3}{2}(\gamma + \gamma') - 1
 \end{aligned}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 (25.) \quad & \alpha + \beta = \gamma - \frac{1}{2} \\
 (26.) \quad & \alpha' + \beta' = \gamma' - \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

durch deren Hülfe man ferner aus (14.) (17.) folgende zwei findet:

$$\begin{aligned}
 (27.) \quad & \gamma - \gamma' = 4(\alpha\beta - \alpha'\beta') \\
 (28.) \quad & \gamma(\gamma - 2) = \gamma'(\gamma' - 2).
 \end{aligned}$$

Diesen letzteren kann auf zwei Arten Genüge gethan werden:
I. durch die Annahme $\gamma = \gamma'$; die Gleichungen (25.), (26.), (27.) geben

in diesem Fall:

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$$

$$\alpha\beta = \alpha'\beta',$$

mithin wären die beiden Reihen y und z einander gleich, welchen Fall ich schon früher behandelt habe *), und also hier übergehe; II. durch die Gleichung $\gamma' = 2 - \gamma$; und dann giebt die Addition von (25.) und (26.)

$$(29.) \quad \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = \gamma + \gamma' - 1 = 1,$$

die Subtraction und Vergleichung mit (27.):

$$(30.) \quad \gamma - \gamma' = \alpha + \beta - (\alpha' + \beta') = 4\alpha\beta - 4\alpha'\beta',$$

aus welchen beiden Gleichungen

$$(31.) \quad \alpha' = \frac{1}{2} - \alpha$$

$$(32.) \quad \beta' = \frac{1}{2} - \beta \text{ folgt.}$$

Mit den 4 Bedingungsgleichungen (25.), (26.), (31.) und (32.) findet man nun leicht:

$$(33.) \quad \alpha + b + c = \frac{3}{2}$$

$$(34.) \quad \alpha b + \alpha c + b c = \frac{3}{4} - (\alpha - \beta)^2$$

$$(35.) \quad \alpha b c = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2$$

woraus sich für a, b, c die Werthe:

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \alpha - \beta$$

$$\frac{1}{2} - \alpha + \beta$$

ergeben. Ferner

$$(36.) \quad d + e = \gamma + \gamma'$$

$$(37.) \quad de = \gamma\gamma'.$$

Wir haben also, wenn das Product der zwei verschiedenen Reihen y und z von der Form u ist, welches mit den 4 Bedingungen:

$$\alpha + \beta = \gamma - \frac{1}{2}$$

$$\alpha' = \frac{1}{2} - \alpha$$

$$\beta' = \frac{1}{2} - \beta$$

$$\gamma' = 2 - \gamma$$

zugleich Statt findet, die Werthe von a, b, c (die unter sich verwechselt werden können):

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \alpha - \beta$$

$$\frac{1}{2} - \alpha + \beta$$

*) Hier oben Seite 89.

und die Werthe von d, e :

$$\gamma$$

$$2 - \gamma.$$

Als Beispiel mögen die beiden Reihen

$$y = 1 + \frac{4}{7}x + \frac{4.6}{7.9}x^2 + \frac{4.6.8}{7.9.11}x^3 + \dots$$

$$z = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1.1}{2.4}x^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}x^3 - \dots$$

dienen. Hier ist $\alpha = 1$, $\beta = \frac{4}{2}$, $\gamma = \frac{7}{2}$, $\alpha' = -\frac{1}{2}$, $\beta' = -\frac{3}{2}$, $\gamma' = -\frac{3}{2}$, und demnach sind die erforderlichen Bedingungen erfüllt. Es wird also $\alpha = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = \frac{7}{2}$, $e = -\frac{3}{2}$, und folglich

$$u = yz = 1 + \frac{1.1.3}{2.7.3}x - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1.1}{7.9} \cdot \frac{3.5}{3.1}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1.1.3}{7.9.11} \cdot \frac{3.5.7}{3.1.1}x^3$$

$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \frac{1.1.3.5}{7.9.11.13} \cdot \frac{3.5.7.9}{3.1.1.3}x^4 - \dots$$

$$u = 1 + \frac{5.1}{5.7} \cdot \frac{1}{2}x - \frac{5.1}{7.9} \cdot \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{5.3}{9.11} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 - \frac{5.5}{11.13} \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \dots$$

In einem Schreiben des Herrn Verfassers obigen Aufsatzes an den Herausgeber dieses Journals bemerkt derselbe, daß sich die Lambertische Reihe $x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 2x^7 + \dots$, welche gleich

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \dots + \frac{x^n}{1-x^n} + \dots$$

ist, und in welcher die Exponenten der Glieder, welche 2 zum Coefficienten haben, der Reihe nach Primzahlen, die Coefficienten der übrigen Glieder aber die Zahlen der ganzzahligen Theiler der Exponenten der nemlichen Glieder sind (man sehe die Aufgabe 16. S. 99. im 2ten Bande dieses Journals) in folgende Reihe:

$$x \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + x^4 \left(\frac{1+x^2}{1-x^2} \right) + x^9 \left(\frac{1+x^3}{1-x^3} \right) + x^{16} \left(\frac{1+x^4}{1-x^4} \right) + \dots + x^{n^2} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right) + \dots$$

verwandeln lasse, welche für ein sehr kleines x sehr schnell convergirt.

12.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

Lehrsätze über den Zusammenhang von Combinationen mit Variationen und jener unter einander; von Herrn Prof. Scherk zu Halle.

1. Man bilde alle Variations-Formen der $(h+1)$ ten Classe, und zur Summe $h+k$ aus den Größen $1, 2, 3, \dots k$. Jede derselben werde durch $m, m, m, \dots m$ dargestellt. Setzt man nun $m = s$; $s + m - 1 = s$; $s + m - 1 = s, \dots s + m - 1 = s$, so ist der Complexus der Combinationen, mit Wiederholungen aus denselben Größen $1, 2, 3, \dots k$; zur h ten Classe, $= \sum s s s \dots s$, wo das Summenzeichen sich auf alle verschiedenen Variations-Formen erstreckt.

Ist z. B. $h = 2, k = 3$, so sind alle Combinationen zur 3ten Classe und zur Summe s aus den Größen $1, 2, 3, = 113, 122$, also die Variationen $113, 131, 311, 122, 212, 221$. Hieraus erhält man nach der angegebenen Regel $11, 13, 33, 12, 22, 23$, oder geordnet: $11, 12, 13, 22, 23, 33$, welches die Combinationen der 2ten Classe mit Wiederholungen aus den gegebenen Größen $1, 2, 3$ sind.

2. Bildet man auf dieselbe Weise alle Variations-Formen der $(h+1)$ ten Classe und zur Summe $k+1$ aus den Größen $1, 2, 3, \dots (k-h+1)$, und verfährt ganz wie vorher, so ist der Complexus der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Größen $1, 2, 3, \dots k$, zur h ten Classe, $= \sum s(s+1)(s+2) \dots (s+h-1)$. Ist z. B. $h = 3, k = 5$, so sind alle Combinationen zur 4ten Classe, und zur Summe 6, aus den Größen $1, 2, 3, = 1113, 1122$, folglich die Variationen, $1113, 1131, 1311, 3111, 1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211$. Hieraus erhält man nach der angegebenen Regel, $123, 125, 145, 345, 124, 134, 135, 234, 235, 245$, oder geordnet: $123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345$, welches die Combinationen, ohne Wiederholungen aus den Größen $1, 2, 3, 4, 5$ zur dritten Classe sind.

3) Man bilde alle Combinations-Formen ohne Wiederholungen zur h ten Classe aus den Gröſsen $1, 2, 3, \dots, k-h+1$, ziehe von jeder in der ersten Stelle jeder Form stehenden Zahl 0 , von jeder in der 2ten Stelle stehenden Zahl 1 , in der 3ten 2 , $\dots$ in der h ten $h-1$ ab, so erhält man alle Combinations mit Wiederholungen zur h ten Classe aus den Gröſsen $1, 2, 3, \dots, k$, und zwar so, daſs diese nach demselben Prinzip geordnet sind, nach welchem jene geordnet waren. Ist z. B. $h=3$, $k=3$, so sind alle Combinations ohne Wiederholungen aus den Gröſsen $1, 2, 3, 4, 5$ zur 3ten Classe, auf gewöhnliche Weise geordnet:

1.2.3, 1.2.4, 1.2.5, 1.3.4, 1.3.5, 1.4.5, 2.3.4, 2.3.5, 2.4.5, 3.4.5,
hiervon ab: 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2,
bleibt: 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.2.2, 1.2.3, 1.3.3, 2.2.2, 2.2.3, 2.3.3, 3.3.3,
also die Combinations mit Wiederholungen aus den Gröſsen $1, 2, 3$ zur 3ten Classe.

Es bedarf keiner Erwähnung, daſs alle drei Sätze auch umgekehrt ausgesprochen werden können. Da aber jeder von ihnen eine Folge der beiden anderen ist, so braucht man nur zwei derselben (etwa einen der beiden ersten und den letzten, weil es bei diesen leicht angehet) zu beweisen, und zwar wünscht man, daſs dieser Beweis rein combinato-
risch sei.

Aufgaben von Anderen *).

4) Man beweiset, daſs jede auf Null gebrachte algebraische Gleichung mit Einer unbekannten Gröſſe, in welcher die Exponenten der Potenzen der unbekannten Gröſſe ganze Zahlen sind, nothwendig entweder reelle oder imaginaire Wurzeln hat. Z. B. Cauchy thut es sehr sinnreich in seinem *Cours d'analyse*, tome I. p. 331. etc. Der Beweis geht davon aus, daſs jede reelle oder imaginaire Gröſſe durch $u + v\sqrt{-1}$ ausgedrückt werden kann, wo u und v , wie es der Beweis fordert, nothwendig reelle Gröſſen sind. Haben die Wurzeln einer beliebigen Gleichung diese Form, so folgt von selbst, daſs sie Paarweise $u + v\sqrt{-1}$ und $u - v\sqrt{-1}$ da sein müssen, weil $\sqrt{-1}$ die Zeichen $+$ und $-$ zugleich hat. Sind nun aber u und v reell, so bezeichnet der Ausdruck

*) Man sehe wegen der Ueberschrift „Von Anderen“ hier und in der Folge die Bemerkung S. 395. im 2. Bande dieses Journals.

$u \pm v\sqrt{-1}$ eine reelle GröÙe nur dann, wenn v Null ist, welches dann auf zwei gleiche Wurzeln deutet. Dieses trifft aber schon bei der quadratischen Gleichung, z. B. $x^2 - ax + b^2 = 0$ nicht zu, wo zwar die Wurzeln allerdings von der Form $u \pm v\sqrt{-1}$ sind, aber v , im Falle $a^2 > 4b$ ist, nicht Null sein kann, sondern vielmehr imaginair ist. Dieses schon scheint einer Erläuterung zu bedürfen.

Ferner ist bekanntlich leicht zu zeigen, daß einer Gleichung vom n ten Grade, sobald man ihr Eine Wurzel zugestehet, dann nothwendig n zukommen. Es fragt sich aber, ob überhaupt nach der Existenz Einer Wurzel gefragt werden kann. Im Allgemeinen scheint es, wenn man z. B. schreibt:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \dots + a_n = 0,$$

Voraussetzung zu sein, daß dann x wirklich existire, nemlich als Zeichen, nicht als GröÙe. Fragt man nach der Existenz der Wurzel als GröÙe, so kann man dieselbe, wie es scheint, nicht beweisen wollen, weil selbst eine einzelne Wurzel wirklich nicht immer existirt. Denn eine Gleichung mit lauter imaginairen Wurzeln hat wirklich keine Wurzel (als GröÙe betrachtet).

Endlich scheint es, daß man den Wurzeln einer Gleichung, indem man ihnen den Ausdruck $u \pm v\sqrt{-1}$ zuschreibt, geschlossene algebraische Ausdrücke gebe. Gleichwohl beweisen Riccati und Abel (letzterer im 1sten Heft des 1sten Bandes dieses Journals S. 65.), daß den Gleichungen von höherem als dem vierten Grade nicht allgemein geschlossene algebraische Ausdrücke der Wurzeln genug thun.

Es fragt sich also, eines Theils, was eigentlich in Rücksicht der Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu beweisen gefordert werden könne und müsse, wie der zu beweisende Satz eigentlich zu verstehen sei, und dann, wie er mit der behaupteten Nicht-Existenz allgemeiner algebraischer Ausdrücke der Wurzeln höherer Gleichungen zu vereinigen sei.

In jedem Falle scheint dieser Gegenstand nicht völlig aufgeklärt, und es wäre wohl zu wünschen, daß es geschehe, und zwar auf eine Weise, die so deutlich wäre, daß sie sich, wie man zu sagen pflegt, für die Elemente eigne. Möglich muß diese sogenannte elementare Darstellung nothwendig sein, so viele Schlüsse auch bis zum Ziele mö-

gen auf einander gehäuft werden müssen, denn was wahr ist, ist auch klar. Und umgekehrt, nur was klar ist, wenigstens in der Mathematik, ist wahr.

5. Die Curven in der Kugelfläche zu untersuchen, deren Gleichungen zwischen Abscissen und Ordinaten vom ersten und vom zweiten Grade sind, wenn man den Umfang eines beliebigen kleinen Kreises in der Kugel zur Abscissen-Axe, und die darauf senkrechten grössten Kreise zu Ordinaten nimmt.

6. Auf einer gegebenen krummen Fläche einen bestimmten Flächenraum mit der möglich-kürzesten Linie einzuschließen.

7. Die Gleichung einer krummen Fläche zwischen rechtwinkligen Coordinaten x , y und z ist gegeben. Man soll in der Fläche eine Curve so ziehen, daß z. B. die z der Curve für gleich-lange Bogenstücke derselben gleich viel von einander verschieden sind.

8. Die Gleichung einer Curve im Raume ist gegeben. Man lege durch alle Punkte derselben und durch einen und denselben bestimmten Punkt gerade Linien, so daß eine Kegelfläche entsteht, deren Spitze der bestimmte Punkt ist. Diese Kegelfläche werde von einer krummen Fläche geschnitten. Welche muß die Gleichung dieser krummen Fläche sein, damit ihr Durchschnitt mit der Kegelfläche eine bestimmte Gestalt habe?

9. In einem cylinderförmigen Gefäße, dessen Querschnitte, senkrecht auf die gerade Linie im Mantel des Cylinders, Kreise sind, und dessen Axe lothrecht steht, befinde sich eine schwere, unelastische Flüssigkeit, und das Gefäß werde mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Axe gedrehet. Man sucht die Gestalt der Oberfläche der Flüssigkeit.

10. Bekanntlich können den 12 Tönen der chromatischen Tonleiter nicht völlig die reinen Verhältnisse gegeben werden, die ihnen auf dem Monochord zukommen, z. B. nicht alle Quinten können $\frac{2}{3}$, nicht alle Quartan $\frac{3}{4}$ etc. des Grundtons sein, weil 12 Quinten übereinander nicht 7 Octaven, 12 Quartan nicht 5 Octaven, u. s. w. ausmachen, indem $(\frac{2}{3})^{12}$ nicht gleich $(\frac{1}{2})^7$, $(\frac{3}{4})^{12}$ nicht gleich $(\frac{1}{2})^5$ ist etc. Die sogenannte gleichschwebende Temperatur vertheilt die nothwendige Abweichung gleichförmig. Sie ist aber der practischen Musik nicht günstig, weil sie einen vorzüglichen Reiz derselben, nemlich die Verschiedenheit der Tonarten, oder die Enharmonik aufhebt. Die Regeln anderer Temperaturen sind willkürlich.

Die beste für die Praxis dürfte sein, welche den verschiedenen Tonarten die meiste charakteristische Verschiedenheit giebt, ohne den sogenannten vollkommenen Consonanzen und nach Verhältniß den unvollkommenen zu viel von ihrer Reinheit zu nehmen. Wenn auch diese Regel für den Calcul noch zu unbestimmt sein mag, und auch vielleicht nicht gut bestimmter mag ausgedrückt werden können, so läßt sich doch fragen, ob Temperaturen möglich sind, in welchen die nothwendigen Abweichungen von der reinen Stimmung in den 12 verschiedenen, den 12 chromatischen Tönen zugehörigen diatonischen Tonleitern bei den vollkommenen Consonanzen wenigstens nicht größer sind, als bei den unvollkommenen, also z. B. bei den Quinten nicht größer als bei den Quartan, Terzen u. s. w. Wenn solche Temperaturen möglich sind, so werden die Regeln derselben und die zugehörigen enharmonischen Systeme verlangt.

13.

Ueber die Integration logarithmisch-rationaler Differentiale.

(Von Herrn Prof. Dr. C. J. Hill zu Lund *).

Bekanntlich reduciren sich viele Aufgaben der Geometrie und Physik zuletzt auf die Auflösung von Gleichungen, welche in den schwierigeren Fällen sowohl die unbekannten Gröſſen als deren Ableitungen (Differential-Coefficienten) enthalten können. Zuweilen lassen sich in solchen Gleichungen entweder die veränderlichen Gröſſen absondern, oder es lassen sich wenigstens Ausdrücke für die unbekannten Gröſſen mit Hülfe bestimmter Integrale (*intégrales définies*) finden. In beiden Fällen beruht zuletzt die Auflösung auf Integrationen nach Einer Veränderlichen, wie $\int dx \cdot fx$, welche im Allgemeinen Quadraturen heißen, und welche also für beliebige Functionen wie fx verlangt werden. Die Mathematik löset im Allgemeinen ihre Aufgaben durch vorausgerechnete Tafeln, in welchen für jeden Werth der willkürlich veränderlichen Gröſſen die zugehörigen Werthe der Functionen gefunden werden. Solche Tafeln sind also im Allgemeinen für jede Function, die in den Elementen des Calculs vorkommt, nothwendig. Wenn z. B. das Product zweier Zahlen verlangt wird, so findet man dasselbe in der Producten-Tafel, oder dem sogenannten Einmaleins. Ob die Tabelle niedergeschrieben sei, oder ob der Rechner sie im Gedächtniß habe, ist offenbar gleichgültig.

*) Diese Abhandlung hatte der Herr Verfasser, zuvorkommend gefällig, schon an seinem Wohnort ins Deutsche übersetzen lassen. Allein die Uebersetzung war zu wenig verständlich. Um den Herrn Verfasser nicht noch mehr zu bemühen, hat der Herausgeber versucht, den Styl der Abhandlung dem deutschen Sprachgebrauche mehr anzupassen. Dieses Unternehmen war, wegen der geringen Verständlichkeit der Uebersetzung und noch mehr wegen der Undeutlichkeit der Abschrift, besonders der Formeln, schwierig. Der Herausgeber ist daher nicht ganz sicher, daß der Sinn des Herrn Verfassers überall genau getroffen worden, und hat zu wünschen, daß er nicht bedeutend gefehlt haben möge.

Der Herausgeber.

Tafeln für gegebene Functionen rechnet man nach den Regeln, welche ihnen eigenthümlich sind, oder welche ihre Entstehung bezeichnen. Für Integral-Functionen aber, für welche noch die Reductionsformeln unbekannt sind hat man verschiedene sinnreiche Methoden erdacht, entweder dieselben durch convergente Reihen auszudrücken, oder die nöthigen Tafeln successive zu berechnen. Das erstere läßt sich gewöhnlich für beliebige Werthe der Veränderlichen nicht allgemein thun, sondern man muß, um Reihen zu finden, von welchen z. B. 4 bis 5 Glieder 7 Decimalstellen geben, wenn auch nicht die Eigenschaften der Integral-Functionen, wie $\int dx \cdot fx$ selbst, so doch wenigstens die ihrer Ableitungen fx zu Hülfe nehmen. Was das Letztere betrifft, so würde das allgemeine Verfahren, wenn es auch nicht, wie oft, Ausnahmen unterworfen wäre, für die Functionen, welche von $x = -\infty$ bis $= +\infty$ reichen, durch deren vielleicht unendlichen Umfang schwer auszuführen sein.

Es entsteht also sogleich folgende Frage: „Wenn man eine Tafel der Werthe einer Function innerhalb eines gewissen Umfanges hat, z. B. von $x = 0$ bis $x = 1$: wie kann man sich der innerhalb der Grenzen berechneten Werthe der Function bedienen, um die Werthe für jede Zahl außerhalb der Grenzen der Tafel zu finden, auf die Weise etwa, wie bei der Multiplication, deren Tafel nur von 0 bis 10 reicht, die aber dennoch die Producte aller Zahlen giebt.“ Die Beantwortung dieser Frage beruht auf der Untersuchung der Eigenschaften der Functionen, welche die wichtigste Aufgabe der Analysis ist.

Eine nahverwandte Frage ist die: Wie läßt sich der Tafel, welche bloß die Function für gewisse Zahlen giebt, und die folglich discontinuirlich ist, Continuität geben, d. h. wie kann man sich ihrer für Zahlen, die nicht in der Tafel gefunden werden, die aber zwischen den darin enthaltenen Zahlen liegen, bedienen.

Für die zweite Frage hat man die sogenannten Interpolations-Methoden; die Beantwortung der ersten hat aber große Schwierigkeiten, weil es weder allgemeine Methoden (die auch schwerlich zu finden sein möchten), noch sonst bestimmte Vorschriften giebt, in bestimmten Fällen zu den unbekannten Eigenschaften zu gelangen. Nur in einzelnen Fällen ist es möglich, und die Bemühung schien mir wichtig, mehrere zu entdecken. Ich kam durch einige Integral-Ausdrücke, auf welche die Anwendung eines gewissen Grundgesetzes für die mathematische Theo-

rie des Electro-Magnetismus führt, auf diejenige Classe von Integral-Functionen, von welcher hier die Rede sein wird.

Ehe ich beginne wird es aber gut sein, einige allgemeine Bemerkungen über das Quadratur-Problem vorzuschicken.

Wie schon erwähnt, beruht dasselbe auf der Realisirung eines Postulats. Nun ist es eine allgemeine Regel, daß der Postulate nicht allein so wenige sein müssen, als möglich, sondern daß sie auch möglichst einfach sein, und zur Auflösung möglichst vieler und umfassender Aufgaben dienen müssen. Also auch die Function, welche hier postulirt wird, muß so einfach sein als möglich, d. h. sie muß so wenige als möglich willkürlich-veränderliche Größen enthalten. Die einfachsten Functionen sind offenbar die, welche nur eine veränderliche Größe enthalten, wie $\log x$, $\tan x$. Dergleichen Functionen will ich *κατ' ἐξοχην* einfache, oder Functionen mit Einem Elemente nennen. (Daß die algebraischen Functionen noch elementarer sind, ist eine Einfachheit anderer Art.) Nach jenen kommen die doppelten Functionen, mit zwei Elementen wie x^a , $F(c, \phi)$ etc. Für mehr zusammengesetzte Functionen, als mit einem oder mit zwei Elementen, lassen sich schwerlich mehr Tafeln berechnen. Denn da die Tafel für eine Function mit einem Element, z. B. für die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000, schon einen ziemlichen Octav-Band füllt, so würde diejenige für eine Function mit zwei Elementen von gleichem Umfange 100000 Bände erfordern. Selbst wenn man sich mit dem hundertsten Theile des Umfanges begnügen, und z. B. nur von $x=0$ bis $x=1000$ und von $y=0$ bis $y=1000$ gehen wollte, würde doch die Tafel schon 10^6 Zahlen enthalten, und also 10 mal so groß sein, als die Logarithmen-Tafel, die nur 10^5 Zahlen enthält. Eine Tafel für eine Function von drei veränderlichen Größen, in dem Umfange von 0 bis 1000 für jedes Element, würde 10^9 Zahlen enthalten, also 10000 Bände, oder eine ganze Bibliothek füllen. Vollständig ausgerechnete Tafeln für dergleichen und noch mehr zusammengesetzte Functionen, wie z. B.

$$\int \frac{dx}{a+a_1x+a_2x^2} \cdot \log(b+b_1x+b_2x^2),$$

welche Function sieben willkürliche Größen a , a_1 , a_2 , b , b_1 , b_2 und x enthält, sind also weder auszurechnen, noch herauszugeben und zu benutzen möglich.

Eine wichtige Aufgabe bei der Untersuchung zusammengesetzter Integral-Formeln ist also: sie in andere zu zerlegen, welche weniger willkürliche Gröſsen enthalten. Je weiter die Zerlegung geht, je besser ist es. Es wäre z. B. wichtig, die dreifache elliptische Function Π auf zweifache zu bringen. Die Berechnung der zugehörigen Tafel würde dadurch erleichtert werden, wenn auch die Tafel selbst nicht dabei gewönne.

Die zweite Regel für die Postulate bei den Integral-Functionen erfordert, daſs sie einen so groſsen Umfang haben, d. i. eine so ausge dehnte Anwendung gestatten, als möglich, vorzüglich da, wo sie am häufigsten vorkommen, oder daſs man mit ihrer Hülfe so viele Differentiale integriren könne, als möglich. Die Functionen, welche am häufigsten vorkommen, und in welchen man durch eine leichte Substitution die Constanten auf mannigfaltige Art verändern kann, sind bekanntlich die algebraischen und insbesondere die rationalen. Wenn P, Q, R rationale Functionen bedeuten, und f bezeichnet irgend eine transcendente Function, so kann man ein Quadratur-Problem als reducirt ansehen, wenn es die Form $\int P dx f R$ hat, weil ein solches Differential im Allgemeinen auf die Form einer Summe mehrerer Producte gebracht werden kann, und die eigentliche Schwierigkeit nur in der Integration dieser liegt, die auch noch in Factoren aufgelöst werden können *). Nach der verschiedenen Bedeutung von f bekommt man verschiedene Arten von Differentialen, und jede setzt eine verschiedene Familie von Integral-Functionen voraus, nemlich diejenigen möglichst einfachen Functionen, mit welchen die Integration des gegebenen Differential-Ausdrucks ausführbar ist.

Ist z. E. fR constant, so hat man die gewöhnlichen rationalen Differentiale wie $P dx$, von welchen Joh. Bernoulli und Leibnitz ungefähr gleichzeitig **) zeigten, daſs sie mit Hülfe der Auflösung einer rationalen Bruch-Function in einzelne Functionen von einer von diesen Formen:

$$1. x^n, \quad 2. \frac{a}{(b+x)^n}, \quad 3. \frac{a+a_1 x}{(b^2+2bx \cos \beta + x^2)^n},$$

*) Wenn man bloſs $\int dx f x$ nehmen wollte, so ist klar, daſs, sobald man, um den Ausdruck zu vereinfachen, statt x eine rationale Function von z oder eine solche, deren Differential rational ist, setzte, dieselbe in die Form $\int dz P z . f R^1(z)$ übergehen würde, welche immer die allgemeine ist, die man also in ihrem ganzen Umfange zu untersuchen hat.

**) Montucla III. p. 132. und 147.

wo n eine ganze positive Zahl ist, vorzüglich auf Logarithmen und Kreisbogen zu bestimmten Tangenten gebracht werden können.

Bezeichnet dagegen f eine der einfachsten der irrationalen Formen, z. B. die zweite Wurzel, wie bei der Rectification der Curven, so entsteht schon eine unendliche Mannigfaltigkeit von Integral-Functionen, je nachdem R in $\sqrt{R}$ auf höhere Grade steigt. Für den Fall, daß R bloß eine ganze Function vom zweiten Grade ist, wie $a + a_1x + a_2x^2$, oder auch eine Bruch-Function vom ersten Grade, wie $\frac{a + a_1x}{b + b_1x}$, zeigte Newton in seiner „*quadratura curvarum*,“ daß die Integration von $Pdx\sqrt{R}$ auf den Ausdruck der Fläche elliptischer und hyperbolischer Ausschnitte führe. Späterhin zeigte Cotes, daß alle diese Integrationen auf einfachen Functionen, nemlich Logarithmen und Kreisbogen beruhen, deren Eigenschaften schon bekannt, und für welche schon Tafeln vorhanden waren, womit also die Quadratur oder die Untersuchung von $\int Pdx\sqrt{(a + a_1x + a_2x^2)}$ vollendet war.

Im Allgemeinen zerfällt jedes Quadratur-Problem in drei Theile. Sie sind folgende:

1) Die Zerlegung, d. h. die Aufsuchung der einfachsten Functionen, fx , gx etc., mittelst welcher, wenn man sie als gelöst voraussetzt, die Integration aller zu einerlei Classe gehörigen Differentiale möglich ist.

2) Die Vergleichung, d. h. die Untersuchung der Theorie der postulirten Functionen oder derjenigen Eigenschaften derselben, mittelst welcher beliebige Functionen von einerlei Form mit einander verglichen werden können; z. B. wenn man ein Paar Werthe einer Function f , wie fx , fy kennt, einen anderen fz , und durch Wiederholung, beliebige andere zu finden.

3) Die Berechnung von Tafeln der Functionen, welche durch die Kenntniß ihrer Eigenschaften sehr erleichtert wird, oder wenigstens nach Belieben muß controllirt werden können.

Jede Function von eigenthümlicher Art hat ihre besonderen Eigenschaften, und kann als ein für sich selbst bestehendes Ganze bloß in und durch sich selbst berechnet werden. Da eine Differential-Gleichung im Allgemeinen nichts anders ist, als der analytische Ausdruck der Aufgabe, eine Function zu finden, die so und so beschaffen sei, so ist klar, daß

eine gesuchte Function nicht immer bloß eine Combination bekannter Functionen sein darf, und daher kommt es, daß die gegebene Differential-Gleichung nicht sowohl dient, die unbekannte Function selbst zu finden, als vielmehr diejenigen Eigenschaften zu finden, nach welcher die Tafel ihrer Werthe zu berechnen sei. So muß es sich auch bei dem Quadratur-Problem oder bei der Auflösung der Gleichung $dy = f(x) dx$ verhalten. Wenn diese Gleichung im Allgemeinen und abstract, für den Fall, daß $f(x)$ rational ist, gegeben würde, und man konnte bloß die algebraischen Functionen, so würde man durch einen consequenten Versuch, die Gleichung in geschlossener Form zu lösen, nothwendig auf die Idee der Logarithmen und Kreisbogen, als der nächsten Functionen mit einem Element, die mit in die Combination gehören, welche y ausdrückt, geführt worden sein. Es gereichte zu großer Erleichterung, daß ihre Eigenschaften schon bekannt und Tafeln dafür ausgerechnet waren *). Der einzige Fall **), wo man auf rein analytischem Wege zu einer vollständigen Kenntniß neuer Functionen gelangte, ist der, in welchem

$$f(x) = \sqrt{(a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)}.$$

Schon Maclaurin und d'Alembert fingen die Zerlegung an, indem sie zeigten, daß mehrere dahin gehörige Integrationen auf der Rectification der Ellipse und Hyperbel und gewisser Curven vom dritten Grade beruhen. Euler, Landen, und hauptsächlich Legendre, welcher zeigte, daß jedes $\int P dx \sqrt{(a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4)}$ auf drei neuen elliptischen Functionen $F(c, \phi)$, $E(c, \phi)$, $\Pi(n, c, \phi)$ beruhe, von welchen zwei, Functionen mit zwei Elementen sind, und eine, eine Function mit drei Elementen ist, vollendeten die Zerlegung. Die Vergleichung derselben wurde von Fagnani vorbereitet, welcher zuerst die Bisection der beiden ersteren fand, von Euler aber vollendet, der die allgemeinen Eigenschaften der

*) Die Hauptformeln für die trigonometrischen Functionen finden sich schon (geometrisch ausgedrückt) beim Ptolemaeus. Peurbachius machte darauf aufmerksam, und Regiomontanus bediente sich ihrer, nebst den Differenzen, zu der Berechnung der trigonometrischen Tafeln. Ich weiß nicht, wie unter diesen Umständen Montucla, *Hist. des mathém.* III. p. 277. sagen kann: „Je ne vois pas que ces expressions $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ etc. fussent connus aux premiers calculateurs de nos tables trigonometriques.“

**) Daß man, ohne die allgemeinen Eigenschaften einer Function zu kennen, dennoch Tafeln für dieselbe hat ausrechnen können, wie es bei den Soldnerschen, Krampischen u. s. w. der Fall ist, beweiset bloß die Geduld der Rechner, und die Vervollkommenung der Rechen-Methoden gehört aber nicht hierher, wo vielmehr von der vollständigen Entwicklung einer ganzen Classe von Integral-Functionen die Rede ist.

ersten entdeckte, so wie von Legendre, der die Eigenschaften der letzteren fand, und Tafeln dafür, jedoch nur mit größeren Zwischenräumen rechnete.

Betrachtet man $\int P dx \sqrt{x}$ weiter, so scheint dieser Ausdruck immer neue Integral-Functionen vorauszusetzen, je nachdem R auf höhere Grade steigt; jedoch kann er im Allgemeinen, wenn R nicht über den sechsten Grad geht, noch auf die obigen gebracht werden, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde. Die elliptischen Functionen hat man als diejenigen transcendenten Functionen angesehen, welche von nächst höherer Ordnung sind, als die Logarithmen, welche die erste Ordnung der Integral-Functionen erreichen. Diejenigen, welche hier abgehandelt werden sollen, gehören aber, meines Erachtens, ebenfalls in die nächst höhere Ordnung. Zuerst ist leicht zu sehen, daß wenn z. B. eine wiederholte Integration, wie $\int dx \int y dx$ zu machen ist, wo y eine rationale Function von x oder y bedeutet, die zweite Integration auf $\int dx P \log R$ oder $\int dx P \arctan R$, also sehr oft auf diejenige Classe von Integrationen führen werde, welche hier abgehandelt werden soll. Die Functionen aber, welche diese Integration voraussetzt, entstehen gleichsam durch die Wiederholung derjenigen Operation, welche den ersten Integral-Functionen den Ursprung gab. Sie gehören also, in gerade-aufsteigender Linie, in die nächst höhere Ordnung. Heißen also jene logarithmische, so würden die von der nächst höheren Ordnung bilogarithmische zu nennen sein. Sie übertreffen übrigens die elliptischen sowohl an Einfachheit, da Eine oder höchstens zwei von ihnen bloß einfach sind, und Eine zweifach ist, als auch an ausgedehntem Gebrauche, weil R von beliebigem Grade sein kann, ja selbst P und R rationale Functionen, sowohl von x als von $\sqrt{(a + a_1 x + a_2 x^2)}$, und selbst allgemein jede beliebige irrationale Größe, die sich durch irgend eine Substitution rational machen läßt, sein können. Auch lassen sich noch viele andere Integrationen darauf bringen, z. B.:

$$\begin{aligned} & \int \phi d\phi R[\sqrt{(a + a_1 e^\phi + a_2 e^{2\phi})} \cos \phi], \\ & \int \phi d\phi R(\sin \phi, \cos \phi), \\ & \int d\phi \log R[e^\phi \sqrt{(b + b_1 e^\phi + b_2 e^{2\phi})}], \\ & \int d\phi \log R(\sin \phi, \cos \phi), \\ & \int d\phi \arctan R(e^\phi) \text{ etc.,} \end{aligned}$$

wo R immer eine rationale Function bedeutet.

Ich glaube also, daß die drei neuen Functionen, deren Entstehung und Gebrauch ich vortragen will, einige Aufmerksamkeit verdienen, um so mehr da sie, wie sich in der Folge zeigen wird, mehrere Eigenschaften haben, die denen der elliptischen Functionen ähnlich sind, und mit deren Hülfe auch die Construction und Berechnung von Tafeln ihrer Werthe sehr erleichtert werden kann. Einstweilen, bis Jemand die Berechnung solcher Tafeln unternimmt, will ich die merkwürdigsten Werthe der Functionen mittheilen, und convergirende Reihen geben, durch welche man mit etwa 5 Gliedern die Werthe wenigstens bis auf 7 Decimalstellen finden kann.

Allgemein sind diese Functionen, so viel mir bekannt, noch nicht untersucht worden. Man findet nur entweder Reihen für verschiedene hierher gehörige Integrale, z. B. (bei M. Hirsch, Integral-Tafeln S. 291.; bei Du Bourguet, *calcul différentiel et intégral. tome I. p. 449*), oder einige bestimmte Integrale (*intégrales définies*) (bei Du Bourguet, bei Poisson, *Journ. de l'Ecole polytechnique cah. X. p. 612.*, welcher S. 617. sagt: „*cela conduit à une classe nombreuse d'intégrales définies, qui n'ont pas encore été considérées par les géomètres*,” bei Euler, *act. Petrop. T. VII*), von welchen sich aber zeigen wird, daß sie nur unmittelbare Corollarien der Eigenschaften der Functionen sind. Was eigentlich in der Theorie dieser Functionen bis jetzt Bedeutenderes gefunden, ist die Formel für die erste Function, welche ich weiterhin durch $\lambda(x)$ bezeichne. Sie ist von Landen gegeben und von Legendre (*Exercices de calc. int. tome I. p. 244.*) bewiesen. Er fügt hinzu: „*jusqu'à présent on n'est pas allé plus loin dans la théorie de ces sortes de transcendentes*.” D. Bernoulli hat in den *nov. Comment. Petrop. 1772 p. 4.*, die Summe einer Reihe gegeben, welche einem hierher gehörigen bestimmten Integral gleich kommt. Ich finde eine Arbeit von einem Engländer, Namens Spener „*Essay on Logarithmic transcendents*” angeführt, habe sie aber nicht zu Gesicht bekommen können, weiß also nicht, ob sie hierher Gehöriges enthält.

Die Zerlegung einer gegebenen Differential-Formel $dx f x$ muß im Allgemeinen darauf ausgehen, sie in Summen mehrerer einfachen Functionen zu zertheilen, z. B. so, daß $f x = \phi x + \psi x$, und

$\int f x dx = \int \phi x dx + \int \psi x dx$ *). Ist die Formel nicht schon an sich selbst von der Art, daß es sich thun läßt, so muß man sie durch irgend eine Substitution so zu verwandeln suchen, daß es geschehen kann. Enthält $f x$ mehrere willkürliche Constanten oder Potenzen davon, so läßt sich im Allgemeinen $\int dx f x$, wie leicht zu sehen, nicht in andere einfachere Ausdrücke auflösen, ohne durch die Substitution wenigstens wiederum eben so viele willkürliche Constanten einzuführen, welche dann theils zur Wegschaffung der anfänglichen willkürlichen Größen, theils zu der beabsichtigten Auflösung in Summen mehrerer einzelnen Functionen dienen. Die Formen für die Substitutionen, die man zunächst versuchen wird, sind die algebraischen und insbesondere die rationalen, weil sie immer zugleich eine solche Trennung erlauben. Wenn man nemlich in $dx f x = dy$ irgend eine rationale Function R von z für x setzt, so daß $dy = dz P.fR$, so kann, wie leicht zu sehen, der äußere Theil P , als rationale Function von z , immer nach bekannten Zerlegungs-Regeln (man sehe die Beilage I.) in eine Summe von mehreren einzelnen Theilen von der Form:

- 1) z^n ,
- 2) $\frac{a}{(b+z)^n}$ und
- 3) $\frac{a+a_1 z}{(b^2+2bz \cos x+z^2)^n}$

aufgelöst werden, so daß man nunmehr bloß einzelne Theile, wie

- 1) $\int z^n dz fR$,
- 2) $\int \frac{a dz}{(b+z)^n} fR$ und
- 3) $\int \frac{(a+a_1 z) dz fR}{(b^2+2bz \cos x+z^2)^n}$

zu untersuchen hat, und die weitere Zerlegung beruhet dann darauf, die in R eingeführten willkürlichen Constanten so zu bestimmen, daß entweder fR ebenfalls in eine Summe von einfacheren Functionen aufgelöst werde, oder daß wenigstens die Zahl der willkürlichen Coefficienten

*) Die Auflösung in Producte, wie $f x = \phi x . \psi x$, hat im Allgemeinen keinen Nutzen, außer wenn $\psi x = F(\int \phi x dx)$, so daß

$$\int F x dx = \int \phi x dx . F \int \phi x dx = F^1 \int \phi x dx \dots,$$

wo $dF^1 x = dx F x$ ist, oder auch, wenn z. B. ein Factor rational ist, und daher in mehrere Glieder aufgelöst werden kann.

ten geringer werde. Durch das Verfahren, immer neue willkürliche Größen statt der vorigen zu setzen, gelingt es in der Regel, die gegebene Form so zu verwandeln, daß man einen einfacheren und regelmässigeren Ausdruck erhält.

Specielle Regeln für die weitere Zerlegung zu geben, scheint im Allgemeinen nicht möglich *), da sie sich offenbar nach der jedesmaligen Art der Function f richten müssen. Ich will bloß diejenige anzeigen, deren ich mich bei der gegenwärtigen Untersuchung mit Erfolg bedient habe. Wenn man nemlich aus einer Differential-Formel, welche 6 bis 7 willkürliche Constanten enthält, dieselben wegschaffen, oder sie wenigstens bestimmen will, so scheint es beim ersten Anblick, daß man gleich Anfangs eine Substitution machen müsse, welche wiederum wenigstens eben so viele neue Arbitrairen einführt. Es scheint mir indessen besser, schrittweise zu verfahren, und erst einige wenige einzuführen, z. B. zwei, deren man sich bedient, um die gegebene Differential-Formel erst einigermaßen zu zerlegen, z. B. in zwei etwas einfachere Theile. Man wiederholt dann die Operation, bis man zu möglichst einfachen Differentialen gelangt. Der Nutzen dieses Verfahrens besteht theils darin, daß, weil die Zahl der zu bestimmenden willkürlichen Constanten geringer ist, die Elimination erleichtert wird, und die algebraische End-Gleichung auf einen minder hohen Grad steigt, theils darin, daß man bei jeder neuen Substitution eine andere Form für die, willkürliche Constanten enthaltenden Functionen wählen kann. Auf diese Weise kann man in jedem einzelnen Falle entweder unmittelbar oder durch einen besondern analytischen Calcul finden, welche Form der substituirt Function am besten zum Ziele führt. Auch partielle Differentiationen und Integrationen gewähren zuweilen einige nicht zu übersehende Vortheile.

Auf diese Weise ist es mir gelungen, die gegebenen allgemeinen Differentiale erst in einzelne, noch ziemlich zusammengesetzte Theile, darauf diese wieder in zweifache, und endlich die meisten auch in einfache aufzulösen.

Es ist merkwürdig, wie die Schwierigkeiten zunehmen, je weiter man in der Zerlegung kommt, fast auf die Art, wie bei der chemischen Analyse, wo die erste Zerlegung zuweilen sehr leicht ist, die endliche

*) Die allgemeinste Regel drückt die bekannte und wichtige Formel $\int p dq = pq - \int q dp$ aus.

Trennung der einzelnen Elemente aber oft fast unüberwindliche Schwierigkeiten hat. Die letzte Zerlegung dieser oder jener Function mit zwei Elementen fand ich nicht eher, bis ich versuchte, sie als eine eigene neue Function, oder als ein Element zu betrachten, und ihre Eigenschaften zu untersuchen.

Diesemnach will ich nun zuerst zeigen:

- 1) Wie das logarithmische Integral $\int P dx \log R$ in andere, weniger zusammengesetzte aufgelöst werden kann.
- 2) Wie eben dieses mit dem Kreisbogen-Integral $\int P dx \arctan R$ geschieht.
- 3) Wie die solchergestalt erhaltenen, minder zusammengesetzten Integrale in Functionen mit zwei Elementen zertheilt werden können.
- 4) Wie diese Functionen mit zwei Elementen in Functionen mit einem Element aufgelöst, oder wenigstens eine durch die andere ausgedrückt werden können.

Hierdurch ist die Zerlegung der gegebenen Differential-Formeln geschehen. Die Aufgabe ist dann ferner, die Eigenschaften der neuen Functionen zu finden, und Tafeln dafür zu berechnen.

Der Kürze wegen wollen wir uns folgender Bezeichnung bedienen.

Bezeichnung der Functionen.

1. Eine Function mit einem Element soll durch einen grossen oder wenigstens langen Buchstaben bezeichnet werden, welcher unmittelbar vor das Element gesetzt wird. Eine unbekannte Function soll durch griechische Buchstaben, wie z. B. ϕx , ψx , eine gegebene durch lateinische, z. B. wie fx , gx bezeichnet werden. Also:

Sinus x durch Sx ,

Cosinus x durch Cx ,

Tangens x durch Tx ,

Logarithmus x durch Lx ,

$\int \frac{1}{x} L(1+x)$ durch λx .

2. Die umgekehrten Functionen sollen durch das umgekehrte Zeichen, oder auch durch einen Strich über dem Zeichen der directen Function bezeichnet werden. Also:

arcus sinus x durch $\bar{S}x$ oder durch $\imath x$,

arcus cosinus x durch $\bar{C}x$ oder durch $\mathfrak{C}x$,

(demnach $\cos x$ durch $\overline{O}x$)

arcus tangens x durch $\overline{T}x$ oder durch $\mathcal{L}x$.

(Diese letzte Bezeichnung $\mathcal{L}$, als $\mathcal{L}L$ betrachtet, scheint sehr gut an die zwei L (log) in dem imaginären Ausdrücke von $\arctang x$:

$$\frac{1}{2i} [L(1+ix) - L(1-ix)]$$

zu erinnern.)

3. Zusammengesetzte Functionen sollen durch eine Complexion mehrerer Buchstaben bezeichnet werden, z. B. eine ganze Function vom n ten Grade durch $\binom{a}{n}x$ oder $\left. n \right|_a x$. Dieser Ausdruck hat also entwickelt folgende Form:

$$\left. n \right|_a x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \binom{a}{n} x.$$

Die Function $\left. 2 \right|_a x$ vom zweiten Grade ist auf diese Weise im Allgemeinen $= a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. (Diejenige mit imaginären Factoren von der nemlichen Ordnung, nemlich $a^2 + 2axC\alpha + x^2$ ist besonders merkwürdig, und soll, wo es nothwendig, durch $\binom{a}{\alpha}x$ oder $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) x$ bezeichnet werden. Der Winkel wird immer mit demselben griechischen Buchstaben bezeichnet, den die Constante aus dem lateinischen Alphabet hat.)

Ferner soll bezeichnet werden

$\int dx \sqrt{1 - c^2 Sx^2}$ durch E_x^c , wie bei Legendre,

$\int \frac{dx}{x} L(1 + 2xC\alpha + x^2)$ durch D_x^α ,

$\int \frac{dx}{1+x} L(n^2 + x^2)$ durch H_x^n .

Der Kürze wegen kann man die Variabeln, welche mehreren Functionen gemein sind, oder die sich leicht von selbst verstehen, weglassen, also Ex , Ez statt E_x^c , E_z^c ; Dx , Dz statt D_x^α , D_z^α ; ja selbst C statt $C\alpha$; $\left. 2 \right|_a$ statt $\left. 2 \right|_a x$ etc., z. B. $\binom{a}{\alpha}$ oder $\left(\begin{smallmatrix} a \\ \alpha \end{smallmatrix} \right)$ statt $a^2 + 2axC + x^2$ oder $a^2 + 2ax\cos\alpha + x^2$ etc. schreiben.

Dieser Bezeichnungen und Abkürzungen werde ich mich bei der Rechnung bedienen; in den Resultaten aber werde ich die gewöhnlichen Bezeichnungen beibehalten.

I. Allgemeine Zerlegung von $\int P dx LR$.

Eine erste Zerlegung dieses Ausdrucks ist leicht. Denn da eines-

theils R von der Form $\frac{\binom{\alpha}{m} x}{\binom{\beta}{n} x}$ ist, so ist $LR = L\binom{\alpha}{m} x - L\binom{\beta}{n} x$, und

$\binom{\alpha}{m} x$, $\binom{\beta}{n} x$, als ganze Functionen, können in einfache oder quadratische Factoren von der Form $(c + c_1 x)^n$ oder $(e^2 + 2exC\beta + x^2)^n$ zerlegt werden. Also ist LR eine Summe von Größen, wie $nL(c + c_1 x)$ und $nL(e^2 + 2exC\beta + x^2)$; anderntheils aber kann P als rationale Function

von der Form $\frac{\binom{\gamma}{m} x}{\binom{\delta}{n} x}$, nach bekannten Regeln (Beil. I.) in mehrere Theile von der Form

$$x^m, \\ (a + a_1 x)^{-r} \text{ oder} \\ \frac{a + a_1 x}{(b^2 + 2bx C\beta + x^2)^n}$$

aufgelöst werden.

Durch diese beiden Zerlegungen, welche nur die Auflösung algebraischer Gleichungen voraussetzen, findet man also:

$$P = \sum \alpha x^m + \sum \frac{1}{(a + a_1 x)^r} + \sum \frac{a + a_1 x}{(b^2 + 2bx C + x^2)^n}$$

und

$$LR = \sum n L(c + c_1 x) + \sum \rho L(e^2 + 2exC + x^2);$$

folglich ist $\int P dx \cdot LR$ in

$$\int dx \left[\sum n \alpha x^m L(c) + \sum \frac{n \cdot L(c)}{(a)^r} + \sum \frac{n(a) L(c)}{(b^2)^n} \right. \\ \left. + \sum \alpha \rho x^m L(e^2) + \sum \frac{\rho L(e^2)}{(a)^r} + \sum \rho \frac{(a) L(e^2)}{(b^2)^r} \right]$$

zerlegt worden, wo $\sum(Fx)$ die Summe der vorhandenen Functionen von der Form $F(x)$ bedeutet, und der Kürze wegen nur das erste Glied statt der Functionen selbst gesetzt ist [z. B. (b^2) statt $b^2 + 2bx C + x^2$].

Durch diese Vorbereitung ist also nun so viel gewonnen, daß man nur noch die sechs Ausdrücke einzeln zu untersuchen braucht, welche entstehen, wenn jede von den zwei Formeln aus LR mit jeder von den drei aus P multiplicirt werden, und welche, wie folgt, bezeichnet werden sollen:

$$\begin{aligned}
 A &= \int x^n dx L \binom{a}{1} x = \int x^n dx L(a + a_1 x), \\
 B &= \int x^n dx L \binom{a}{\alpha} x = \int x^n dx L(a^2 + 2 a x C \alpha + x^2), \\
 C &= \int \frac{dx}{\left[\binom{b}{1} x\right]^n} \cdot L \binom{a}{1} x = \int \frac{dx}{(b + b_1 x)^n} \cdot L(a + a_1 x), \\
 D &= \int \frac{dx}{\left[\binom{b}{1} x\right]^n} \cdot L \binom{a}{\alpha} x = \int \frac{dx}{(b + b_1 x)^n} \cdot L(a^2 + 2 a x C \alpha + x^2), \\
 E &= \int \frac{\binom{a}{1} x dx}{\left[\binom{b}{\beta} x\right]^n} \cdot L \binom{c}{1} x = \int \frac{(a + a_1 x) dx}{(b^2 + 2 b x C \beta + x^2)^n} \cdot L(c + c_1 x), \\
 F &= \int \frac{\binom{a}{1} x dx}{\left[\binom{b}{\beta} x\right]^n} \cdot L \binom{c}{\beta} x = \int \frac{(a + a_1 x) dx}{(b^2 + 2 b x C \beta + x^2)^n} \cdot L(c^2 + 2 c x C \beta + x^2).
 \end{aligned}$$

Um nun diese Ausdrücke zu integrieren, kann man sich der bekannten Reductions-Formel

$$\int p dq = pq - \int q dp$$

bedienen.

Ist nemlich $LR = p$ und $\int P dx = Q$, so ist nach dieser Formel:

$$\int P dx LR = Q LR - \int \frac{dR}{R} Q,$$

welche Formel beinahe alles, was bisher über logarithmische Integrale gesagt worden, ausdrückt. (Man sehe z. B. Lacroix *Tr. du Calc. différ. et intégr. sec. édit. Tom. II. p. 23 sq.*) Ist Q oder $\int P dx$ rational, so ist die logarithmische Integration schon auf die gewöhnliche rationale reducirt, leider aber enthält Q häufig Logarithmen oder Kreisbogen, so daß man sich nur im Cirkel bewegt. (In der von Lacroix a. a. O. gegebenen Formel für $\int P dx (Lx)^n$ enthalten die dortigen Größen M, L, K etc. nicht allein dergleichen, sondern noch andere höhere transcendente Größen, die nicht angedeutet sind.)

In dem gegenwärtigen Falle ist P entweder x^n , oder $\left[\binom{b}{1} x\right]^{-n}$ oder

$$\begin{aligned}
 &\frac{\binom{a}{1} x}{\left[\binom{b}{\beta} x\right]^n}, \text{ und } Q \text{ entweder } \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ oder } \frac{-\binom{b}{1} x^{-n+1}}{n-1}, \text{ oder} \\
 &-\frac{\frac{1}{2} a_1}{(n-1) \left[\binom{b}{\beta} x\right]^{n-1}} + (a - a_1 b C \beta) \int \frac{dx}{\left[\binom{b}{\beta} x\right]^n}.
 \end{aligned}$$

Nach bekannten Integrations-Regeln ist

$$\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^n} = \frac{bC+x}{n-1} \left\{ \frac{a}{\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^n} + \frac{a_1}{\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{\left(\frac{b}{\beta}\right)x} \right\} + \frac{k}{bS\beta} \cdot \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta},$$

woselbst a, a_1 etc. und k gewisse Constanten sind. (Hirsch. Int. Tafeln p. 106.)

Uebrigens ist R entweder von der Form $a + a_1x$ oder $a^2 + 2axCx + x^2$, und demnach $dR = a dx$, oder $2(aCx + x)dx$ und $\frac{dR}{R} = \frac{a_1 dx}{a + a_1x}$, oder

$$= \frac{2 \cdot (aCx + x) dx}{a^2 + 2aCx + x^2}.$$

Hieraus erhellet, dafs im Allgemeinen durch diese Reduction sowohl A und B , als C und D auf Integrale rationaler Differentiale reducirt sind, E und F aber, wenn nicht etwa $a = a_1bC\beta$ ist, nothwendig Theile von der Form

$$\int \frac{c_1 dx}{c + c_1x} \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta}, \text{ oder}$$

$$\int \frac{dx(cC\gamma + x)}{C^2 + 2cxC\gamma + x^2} \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta}$$

enthalten. Diese beiden Ausdrücke mit $\mathcal{L}$ sind demnach solche, die sich nicht durch die allgemeine Reductions-Formel auf Integrale rationaler Differentiale bringen lassen, und die folglich nicht durch L und $\mathcal{L}$ ausgedrückt werden können. Durch weitere partielle Integration erhält man nemlich

$$\mathfrak{B.} \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{c_1 dx}{c + c_1x} \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta} = L\left(\frac{c}{1}\right)x \cdot \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta} - \frac{1}{bS\beta} \int \frac{dx}{\left(\frac{b}{\beta}\right)x} L\left(\frac{c}{1}\right)x, \\ 2 \int \frac{(cC\gamma + x) dx}{C^2 + 2cxC\gamma + x^2} \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta} = L\left(\frac{c}{\gamma}\right)x \cdot \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta} - \frac{1}{bS\beta} \int \frac{dx}{\left(\frac{b}{\beta}\right)x} \cdot L\left(\frac{c}{\gamma}\right)x, \end{array} \right.$$

also besondere Fälle von E und F , nemlich mit dem Exponenten $n = 1$, welche demnach ausgenommen werden müssen, und durch E^1 und F^1 bezeichnet werden können.

Dergleichen Ausnahmen finden sich auch im Vorhergehenden, nemlich in A und B , wenn $n = -1$, in welchem Falle $Q = Lx$ und in C und D , wenn $n = 1$, in welchem Falle $Q = \frac{1}{b_1} L(b + b_1x)$ ist und demnach $\frac{QdR}{R}$ wieder dieselbe Form bekommt, nemlich logarithmisch-rational wird. A^{-1} und B^{-1} aber können entweder auf dem Wege, auf

welchem wir sie erhalten sollten, nicht vorkommen, oder wenigstens als besondere Fälle von E und D (nemlich für $b=0$) angesehen werden. Es sind also nur folgende Ausnahme-Fälle weiter zu untersuchen.

$$\textcircled{E} \left\{ \begin{aligned} C^1 &= \int \frac{dx}{b+x} L(a+a_1x), \\ D^1 &= \int \frac{dx}{b+x} L(a^2+2axCa+x^2), \\ E^1 &= \int \frac{dx(a+a_1x)}{b^2+2bxC\beta+x^2} L(c+c_1x), \\ F^1 &= \int \frac{dx(a+a_1x)}{b^2+2bxC\gamma+x^2} L(c^2+2cxC\gamma+x^2), \end{aligned} \right.$$

von welchen schon, weil sie von der allgemeinen Integrations-Formel eine Ausnahme machen, zu vermuthen ist, daß sie eigenthümliche Functionen enthalten, die als bekannt vorausgesetzt werden müssen, wenn die Integration möglich sein soll.

Die drei ersten Ausdrücke könnten als besondere Fälle des vierten

F^1 , unter die allgemeine Form $\int \frac{\binom{a}{1} x dx}{\binom{b}{2} x} L\left(\binom{c}{2}\right) x$ gebracht, angesehen werden;

doch würde dieses gegen unsere Absicht sein, weil gerade einfachere Functionen gesucht werden. Diese drei einfacheren Formen aus der Acht zu lassen, würde schon errungene Vortheile aufgeben heißen.

Bevor wir zur weiteren Untersuchung dieser Functionen schreiten, wird es gut sein, erst noch eine andere Classe von Functionen zu betrachten, nemlich die mit $\mathcal{L}$, von welcher schon einige specielle Fälle bei der Untersuchung der logarithmisch-rationalen Ausdrücke vorkamen, und welche demnach mit diesen verwandt sein müssen.

2. Allgemeine Zerlegung von $\int P dx \cdot \text{arc. tang. } R$.

Dieselbe beruhet theils auf der bekannten Zerlegung der rationalen Function P in Partialbrüche, theils auf einer weniger bekannten Eigenschaft der Function $\mathcal{L}$ (arc. tang.), daß nemlich die arc. tang. zu rationalen Functionen (d. h. die Bogen, deren Tangenten rational sind und die ich rationale $\mathcal{L}$ nenne), in eine Summe von arc. tang. vom ersten Grade (d. h. von Bogen, deren Tangenten rationale Functionen vom ersten Grade sind) zerlegt werden können. (S. Beilage II.)

Nach diesem Satze kann man annehmen, daß

$$\mathcal{L}R = \mathcal{L} \frac{a_1}{x+b_1} + \mathcal{L} \frac{a_2}{x+b_2} + \dots = \Sigma \mathcal{L} \frac{a_r^1}{x+b_r^1}, \text{ oder auch} \\ = C - \Sigma \mathcal{L} \frac{x+b_r^1}{a_r^1},$$

schon durch Auflösung einer algebraischen Gleichung zerlegt ist.

Nun ist aber, wenn $\int P dx = Q$,

$$\int P dx \mathcal{L}R = Q \mathcal{L}R - \int \frac{dR}{1+R^2} \cdot Q.$$

Dem Vorhergehenden zufolge darf man also nur für R eine von den Größen $\frac{x+b_r^1}{a_r^1}$, oder anders bezeichnet, $a+a_1x$ nehmen, so daß

$$\frac{dR}{1+R^2} = \frac{a_1 \cdot dx}{1+(a+a_1x)^2};$$

statt Q aber muß, da P nach geschehener Zerlegung die Form x^n , oder $\frac{b_1}{(b+b_1x)^n}$, oder $\frac{a+a_1x}{(b^2+2bxC+x^2)^n}$ haben muß, entweder $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, oder $\frac{-1}{(n-1)(b+b_1x)^{n-1}}$, oder endlich

$$\frac{-a_1}{2(n-1) \left[\left(\frac{b}{\beta} \right) x \right]^{n-1}} + \frac{(a-a_1bC\beta)(bC\beta+x)}{n-1} \left\{ \frac{a}{\left[\left(\frac{b}{\beta} \right) x \right]^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{\left(\frac{b}{\beta} \right) x} \right\} + k \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta}$$

gesetzt werden.

Die möglicherweise hierher gehörigen einfacheren Formen der rationalen Kreisbogen-Differentiale (deren offenbar, da $\mathcal{L}R$ sich nur in die eine einfachere Form $\mathcal{L}(a+a_1x)$ auflöst, nicht mehrere, als der verschiedenen Formen der Partialbrüche der rationalen Function P , nemlich drei, sein können) müssen demnach, wie folgt, ausgedrückt und allgemein integrirt werden, nemlich:

$$\mathfrak{D}. \begin{cases} \alpha = \int x^n dx \mathcal{L} \binom{a}{1} x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \mathcal{L} \binom{a}{1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{a_1 x^{n+1} dx}{1 + \left[\left(\frac{a}{1} \right) x \right]^2}, \\ \beta = \int \frac{dx}{(b+x)^n} \cdot \mathcal{L} \binom{a}{1} x = \frac{-\mathcal{L} \binom{a}{1} x}{(n-1)(b+x)^{n-1}} + \frac{a_1}{n-1} \int \frac{dx}{(b+x)^n \left[1 + \left(\left(\frac{a}{1} \right) x \right)^2 \right]}, \\ \gamma = \int \frac{\binom{a}{1} x \dots dx}{\left[\left(\frac{b}{\beta} \right) x \right]^n} \cdot \mathcal{L} \binom{c}{1} x = \mathcal{L} \binom{c}{1} x \left\{ \frac{-a_1}{2(n-1) \left[\left(\frac{b}{\beta} \right) x \right]^{n-1}} + \mathcal{L} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{b}{\beta} \right) x \right]^n} \right\} \\ + \int \left\{ \frac{a_1}{2(n-1) \left[\left(\frac{b}{\beta} \right) x \right]^{n-1}} - \mathcal{L} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{b}{\beta} \right) x \right]^n} \right\} \frac{c_1 dx}{1 + \left[\left(\frac{c}{1} \right) x \right]^2}. \end{cases}$$

Man sieht hieraus, daß die beiden ersten α und β sich auf Integrale rationaler Differentiale bringen lassen, und demnach im Allgemeinen durch $\mathcal{L}$ und L ausgedrückt werden; die dritte γ aber, da $\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{b}{\beta}\right)x\right]^n}$ immer $\mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta}$ enthält, einen besondern Fall von sich selbst, nemlich:

$$\int \frac{dx}{1+\left[\left(\frac{c}{1}\right)x\right]^2} \cdot \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta}$$

voraussetzt.

Es bietet sich daher γ für $n=1$ immer als ein besonders zu untersuchender Ausdruck dar. Dergleichen Ausnahme-Fälle giebt es auch in α , für $n=-1$, und in β für $n=+1$; der erste aber (α^{-1}) ist, wie man siehet, nur ein besonderer Fall von dem letzteren (β'). Demnach sind aus dem allgemeinen zusammengetzten Integrale $\int P dx \mathcal{L} R$ nur folgende abzusondern, von welchen zu vermuthen, daß sie eigenthümliche, einfachere Bestandtheile enthalten; nemlich:

$$\mathfrak{E}. \begin{cases} \beta' = \int \frac{dx}{b+x} \mathcal{L}(a+a_1x), \\ \gamma' = \int \frac{(a+a_1x)dx}{b^2+2bxC\beta+x^2} \mathcal{L}(c+c_1x), \end{cases}$$

wovon jedoch das erste, β' , durch partielle Integration in

$$\beta' = L(b+x) \mathcal{L}(a+a_1x) - \int \frac{a_1 dx}{1+\left[\left(\frac{a}{1}\right)x\right]^2} L(b+x)$$

übergeht, und folglich auf dem vorher aus den logarithmischen Integralen herkommenden E^1 beruhet; das letzte, γ' , aber wird

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{a_1}{2} L\left(\frac{b}{\beta}\right)x + A \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta} \right] \cdot \mathcal{L}\left(\frac{c}{1}\right)x \\ &- \int \frac{c_1 dx}{1+\left[\left(\frac{c}{1}\right)x\right]^2} \cdot \left[\frac{a_1}{2} \cdot L\left(\frac{b}{\beta}\right)x + A \mathcal{L} \frac{x+bC\beta}{bS\beta} \right], \end{aligned}$$

wo $A = \frac{a-a_1bC\beta}{bS\beta}$, und beruhet daher theils auf einem besondern Falle von dem vorher gefundenen F^1 , theils auf einem besondern Falle von sich selbst, nemlich, wenn $a_1=0$, oder

$$\mathfrak{F}. \delta = \int \frac{dx}{c^2+2cxC\gamma+x^2} \cdot \mathcal{L}(b+b_1x),$$

welches daher der einzige den rationalen $\mathcal{L}$ Differentialen eigenthümliche Integral-Ausdruck ist.

3. Zerlegung der bis hierher gefundenen Ausdrücke in Functionen mit zwei Elementen.

Das Vorhergehende zeigt, daß die Integrale von $PdxLR$ und $PdxLR$, wenn P und R rationale Functionen von x bezeichnen, außer den bekannten Functionen weiter keine andere neue enthalten können, als diejenigen, welche sich in C^1 , D^1 , F^1 und δ befinden. Wir brauchen uns daher nur mit diesen zu beschäftigen, um die darin vielleicht enthaltenen Elemente auszuscheiden, das heißt: die einfacheren Functionen zu finden, die als bekannt angenommen werden müssen, wenn die Integration möglich sein soll. In dieser Absicht werden die fünf gefundenen Ausdrücke so viel als möglich zu vereinfachen gesucht werden müssen.

Erstlich: C^1 oder $\int \frac{dx}{b+x} L(a+a_1x)$,

wird

$$= \int \frac{dy}{y} LA(1+y) = LyLA + \lambda y,$$

wenn man

$$A = a - a_1b, \quad x = \frac{A}{a_1}y - b$$

und

$$\int \frac{dy}{y} L(1+y) = \lambda y$$

setzt.

Die Function C^1 mit vier Elementen (nemlich a , a_1 , b und x) reducirt sich demnach auf die einfache Function, die ich durch λy bezeichne, weil einestheils C und Γ schon andere Functionen bedeuten, andernteils, weil die Function λ mit $L(\log)$ merkwürdige Aehnlichkeiten hat.

Bei diesem Integrale C^1 sind einige besondere Fälle zu erwägen.

a) Wenn $a = a_1b$ ist, so wird

$$C^1 = \frac{1}{2} [L(a+a_1x)]^2.$$

Denn setzt man $a+a_1x = z$, so wird $b+x = b + \frac{z-a}{a_1} = \frac{z}{a_1}$, und folglich

$$\int \frac{dx}{b+x} L(a+a_1x) = \int \frac{dz}{z} Lz = \frac{1}{2} (Lz)^2 + \text{Const.}$$

b) Wenn $a < a_1b$, oder $A (= a - a_1b)$ negativ, $= -c^2$ ist, so scheint beim ersten Anblick eine andere Form der Function mit einem Element angenommen werden zu müssen. Man kann indessen die Integration auf

folgende Weise auf λ reduciren. Wenn man nemlich $x = \frac{c^2}{a} \cdot \frac{1}{z} - b$ setzt, so findet man $dC^1 = -\frac{dz}{z} \cdot Lc^2\left(\frac{1-z}{z}\right)$, und integrirt,

$$C^1 = -Lc^2 \cdot Lz + \frac{1}{2}(Lz)^2 - \lambda(-z).$$

Daraus folgt, daß λ die einzige Function ist, die zur Integration aller zu C^1 gehörigen Ausdrücke zu postuliren nöthig ist.

Zweitens. D^1 oder $\int \frac{dx}{b+x} \cdot L(a^2 + 2axCa + x^2)$,
wird

$$= \int \frac{dy}{y} L[a^2 - 2abCa + b^2 + 2(aCa - b)ay + a^2y^2],$$

wenn man $x = ay - b$ setzt. Nun ist

$$a^2 - 2abCa + b^2 = \binom{a}{a}(-b),$$

also positiv, weil $\binom{a}{a}x$ nur imaginaire Factoren hat, und folglich durch keinen reellen Werth, und noch weniger (z. E. durch $x = -b$) negativ werden kann. Wir können daher $a^2 = \binom{a}{a}(-b)$ setzen. Dieses giebt:

$$(aCa - b)^2 = < a^2 \text{ (oder } a^2 - 2abCa + b^2),$$

und folglich kann

$$\frac{aCa - b}{a} = C\beta$$

gesetzt werden.

Hiedurch wird nun D^1 in $LyLa^2 + D_y^\beta$ verwandelt, wenn man der Kürze wegen die Function $\int \frac{dy}{y} L(1 + 2yC\beta + y^2)$ durch D_y^β bezeichnet, welche offenbar eine Function mit zwei Elementen ist, mit deren Hülfe jedes Differential von der Form dD^1 integrirt werden kann.

$$\begin{aligned} \text{Drittens. } E^1 \text{ oder } \int \frac{(a + a_1x)dx}{b^2 + 2bxC\beta + x^2} L(c + c_1x) \\ = \int \frac{\binom{a}{c} x d\alpha}{\binom{b}{\beta} x} \cdot L\binom{c}{1} x \end{aligned}$$

kann zuerst

$$= \frac{1}{2}a_1 \cdot \int \frac{d\binom{b}{\beta} x}{\binom{b}{\beta} x} L\binom{c}{1} x + A \int \frac{dx}{\binom{b}{\beta} x} L\binom{c}{1} x = \frac{1}{2}a_1 E_1^1 + A E_1^1.$$

gesetzt werden, woraus A durch Differentiation $= a - ba_1C\beta$ gefunden wird. Durch partielle Integration findet sich alsbald für den ersten Theil

$$E_1^1 = \int \frac{d \binom{b}{\beta} x}{\binom{b}{\beta} x} \cdot L \binom{c}{1} x = L \binom{b}{\beta} x \cdot L \binom{c}{1} x - \int \frac{c_1 dx}{\binom{c}{1} x} \cdot L \binom{b}{\beta} x,$$

welcher solchergestalt auf D^1 reducirt, und folglich durch die Function mit zwei Elementen: D_y^β gefunden werden kann.

Setzt man $x = ay + b$, so verwandelt sich der zweite Theil

$$E_0^1 = \int \frac{dx}{\binom{b}{\beta} x} \cdot L \binom{c}{1} x,$$

in

$$\int \frac{ady L(c + c_1 b + c_1 ay)}{\binom{b}{\beta} b + 2ab^1 y + a^2 y^2},$$

wo $b^1 = bC\beta + b$ ist.

Nun kann man $a = \pm \sqrt{\left[\binom{b}{\beta} b\right]}$, mit demselben Zeichen wie c_1 nehmen, wodurch ac_1 positiv wird, und entweder $b^1 = 0$ (und folglich $b = -bC\beta$, und $a = bS\beta$), oder auch $c + c_1 b = 0$; wodurch sich, wie man sieht, der zweite Theil E_0^1 entweder auf

$$\int \frac{dy}{1+y^2} L(A+y)^2 = I_y^A,$$

oder auf

$$\int \frac{dy}{1+2yC\alpha+y^2} \cdot Ly = E_y^a$$

reducirt, und da beide nur eine arbitraire Constante enthalten, so kann E^1 durch Functionen mit zwei Elementen gefunden werden: nemlich durch D_y^β , und entweder durch I_y^A oder E_y^a , von welchen I_y^A am dienlichsten zu sein scheint. Setzt man nemlich $x = b(yS\beta - C\beta)$ und $A = \frac{c - c_1 b C \beta}{c_1 b S \beta}$, so findet man:

$$E_0^1 = \frac{1}{bS\beta} \cdot (Ly L c_1 b S \beta + \frac{1}{2} I_y^A).$$

Viertens. F^1 oder $\int \frac{(a + a_1 x) dx}{b^2 + 2bx C \beta + x^2} \cdot L(c^2 + 2cx C \gamma + x^2).$

Eben wie in E^1 kann man den logarithmischen Theil in dP von dem Kreisbogen-Theil absondern, wenn man

$$F^1 = A \int \frac{dx}{\binom{b}{\beta} x} \cdot L \binom{c}{\gamma} x + \frac{1}{2} a_1 \cdot \int \frac{d \binom{b}{\beta} x}{\binom{b}{\beta} x} \cdot L \binom{c}{\gamma} x$$

setzt, indem man, wenn man wieder differentiirt, $A = a - a_1 b C \beta$ er-

hält. Setzt man nun, um die Absonderung weiter zu treiben, $x = c(yS\beta - C\gamma)$, so reducirt sich F^1 , ausser auf J und L , noch auf zwei neue Functionen von der Form:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} \cdot L(a^2 + 2ayCa + y^2) = \int \left[dJ \cdot y \cdot L\left(\frac{a}{\alpha}\right) y \right]$$

und

$$\int \frac{2y dy}{1+y^2} L(a^2 + 2ayCa + y^2) = \int dL(1+y^2) \cdot L\left(\frac{a}{\alpha}\right) y,$$

deren jede eine Function mit drei Elementen ist, nemlich a , α und y enthaltend, wenn nicht etwa ein bestimmtes Verhältniß zwischen den gegebenen Coefficienten Statt findet, wodurch $a=1$ oder $Ca=0$ wird, wie z. B., wenn $bCb = cC\gamma$; wie wir weiter unten sehen werden.

Durch diese Sonderungen und Substitutionen gelangt man daher zu der gesuchten Zerlegung von F^1 in Functionen mit zwei Elementen nicht. Man muß also eine andere Art der Substitution versuchen.

Unter den algebraischen Formen ist $\frac{\alpha + \alpha_1 y}{\beta + \beta_1 y}$ besonders merkwürdig, weil man dadurch drei willkürliche Größen einführen kann, ohne durch die Substitution den Grad der Function zu ändern. Bei Untersuchungen wie die gegenwärtige, ist es daher rathsam, diese Form nicht unversucht zu lassen. Im gegenwärtigen Falle gelingt der Versuch. Setzt man nemlich $x = \frac{m+ny}{1+y}$, so findet man:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{(n-m)dy}{(1+y)^2}, \quad \left(\frac{c}{2}\right)x = \frac{c(1+y)^2 + 2c_1(1+y)(m+ny) + (m+ny)^2}{(1+y)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{c}{2}\right)m + 2(c+mn+c_1(m+n))y + \left(\frac{c}{2}\right)n \cdot y^2}{(1+y)^2}, \end{aligned}$$

wo $\left(\frac{c}{2}\right)z$, $c + 2c_1z + z^2$ bedeutet.

Eine gleiche Form ergibt sich für $\left(\frac{b}{2}\right)x$.

Nimmt man nun aber m und n so, daß $m+n = \frac{b-c}{c_1-b_1}$, und $mn = \frac{c_1b-b_1c}{b_1-c_1}$ ist, so reducirt sich $\left(\frac{c}{2}\right)x$ auf

$$\frac{\left(\frac{c}{2}\right)m + \left(\frac{c}{2}\right)n \cdot y^2}{(1+y)^2}, \text{ und } \left(\frac{b}{2}\right)x \text{ auf } \frac{\left(\frac{b}{2}\right)m + \left(\frac{b}{2}\right)n \cdot y^2}{(1+y)^2},$$

folglich F^1 oder

$$\int \frac{\binom{a}{1} x dx}{\binom{b}{2} x} \cdot L \binom{c}{2} x \text{ auf}$$

$$(n-m) \cdot \int \frac{\left[\binom{a}{1} m + \binom{a}{1} n y \right] dy}{(1+y) \left[\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n \cdot y^2 \right]} \cdot L \frac{\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n \cdot y^2}{(1+y)^2}.$$

Dieser beim ersten Anblick noch verwickeltere Ausdruck kann nach den Principien der ersten Abtheilung einfacher aufgelöst werden. Der außerhalb des Logarithmenzeichens befindliche Factor kann nemlich als rationale Bruch-Function in Theile von der Form

$$\frac{A}{1+y} + \frac{B+Cy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n \cdot y^2}$$

zerlegt werden. (Man sehe das Beispiel in der Beilage I.)

Der logarithmische Factor selbst löset sich, wie leicht zu sehen, in die Summe

$$L \left[\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n \cdot y^2 \right] - L(1+y)^2$$

auf. Und da jeder von diesen zwei Gröſsen in jede von den drei vorigen,

$$\frac{A}{1+y} + \frac{B}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n \cdot y^2} + \frac{Cy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n \cdot y^2}$$

multiplicirt werden muß, um dF^1 zu finden, so entstehen folgende sechs Integral-Formen, in welche nun F aufgelöst ist, nemlich:

- 1) $\int \frac{dy}{1+y} \cdot L(1+y)^2,$
- 2) $\int \frac{dy}{1+y} \cdot L \left[\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n \cdot y^2 \right],$
- 3) $\int \frac{dy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n \cdot y^2} \cdot L(1+y)^2,$
- 4) $\int \frac{dy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n \cdot y^2} \cdot L \left[\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n \cdot y^2 \right],$
- 5) $\int \frac{y dy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n \cdot y^2} \cdot L(1+y)^2,$
- 6) $\int \frac{y dy}{\binom{b}{2} m + \binom{b}{2} n \cdot y^2} \cdot L \left[\binom{c}{2} m + \binom{c}{2} n \cdot y^2 \right].$

Von diesen Integralen ist das erste offenbar $= \frac{1}{2} [L(1+y)^2]$, oder das

Quadrat eines Logarithmus; das sechste, wenn man $y^2 = z$ setzt, reducirt sich auf C^1 und kann daher durch λ gefunden werden; das zweite beruht auf einer besonderen Form von D^1 , nemlich

$$\int \frac{dy}{1+y} L(t^2 + y^2),$$

wo $t^2 = \frac{\binom{c}{2}_m}{\binom{c}{2}_n}$, welche man durch $\overset{t}{D}y$ bezeichnen und durch D_x^β finden kann.

Eben so beruht das dritte auf einer besonderen Form von

$$E^1 = \int \frac{dy}{a^2 + y^2} L(1 + y)^2 = {}^a E y,$$

wo $a^2 = \frac{\binom{b}{2}_m}{\binom{b}{2}_n}$; und das fünfte ebenfalls auf einer besonderen Form von

$$E^1 = \int \frac{y dy}{a^2 + y^2} L(1 + y)^2,$$

welche durch G_y^a bezeichnet werden mag.

Unter allen sechs Integralen ist daher keines weiter, welches sich nicht auf die obigen reduciren ließe, als das vierte, welches auf die Form $\int \frac{a dy}{a^2 + y^2} L(t^2 + y^2)$ gebracht werden kann, und noch dreifach zu sein scheint, jedoch durch eine leichte Verwandlung in $L a^2 . \mathcal{L} u + H_u^v$ übergeht, wenn man nemlich $y = a u$ und $\frac{t}{a} = v$ setzt; desgleichen

$\int \frac{du}{1+u^2} . L(v^2 + u^2) = H_u^v$, welche Form daher die einzige aus F^1 entspringende eigene Function ist, die aber nur zwei Elemente hat.

Wir haben daher nunmehr alle logarithmisch-rationalen Differentiale so weit reducirt, daß sie wenigstens durch Functionen mit zwei Elementen integrirt werden können. Um aber gewiß zu sein, daß es mit F^1 immer gelinge, müssen wir sehen, ob auch die so eben vorgenommene Sonderung von F^1 nicht etwa Ausnahme-Fälle habe, die nicht auf Functionen mit zwei Elementen gebracht werden könnten.

Als solche bieten sich besonders die dar, wenn $n = m$ ist, oder wenn n und m imaginair sind.

Erster Fall, wenn $n = m$. Alsdann wäre $x = \text{Const.}$ und die Substitution unbrauchbar. In diesem Falle muß $2n = \frac{b-c}{c_x - b_x}$ und

$n^2 = \frac{c_1 b - b_1 c}{b_1 - c_1}$, folglich $(b - c)^2 = 4(b_1 - c_1)(c_1 b - b_1 c)$ sein. Diese Gleichung nach b_1 aufgelöst giebt

$$b_1 = c_1 \cdot \frac{b+c}{2c} \pm \frac{b-c}{2c} \cdot \sqrt{(c_1^2 - c)}.$$

Bei diesem Verhältniß zwischen den Coefficienten ist die Substitution unmöglich, weil sie $x = \text{Const.}$ giebt.

Die Relation kann zwar, wie leicht zu sehen, oft Statt finden, indessen behaupte ich, daß es nur geschehen kann, wenn die quadratischen Functionen $\binom{b}{2}x$, $\binom{c}{2}x$ reelle Factoren haben; nicht, wenn dieselben imaginair sind, welches eben der Fall der Formel F^1 ist; nemlich in

$$F^1 = \int \frac{\binom{a}{1}x dx}{\binom{b}{\beta}x} \cdot L \binom{c}{\gamma}x.$$

Setzt man nemlich $\binom{c}{\gamma}x$ und $\binom{b}{\beta}x$ statt $\binom{c}{2}x$ und $\binom{b}{2}x$, d. h. beziehlich c^2 , $cC\gamma$ und b^2 , $bC\beta$ statt c , c_1 , b , b_1 , so bekommt man $c_1^2 - c = c^2 C\gamma^2 - c^2 = -c^2 S\gamma^2$, also b_1 oder $bC\gamma$ imaginair, wenn nicht zugleich $b = c$, in welchem Falle $b_1 = c_1$ oder $bC\beta = cC\gamma$ ist. Hieraus erhellet, daß der einzige mögliche Ausnahme-Fall in dieser Hinsicht

$$F^1 = \int \frac{\binom{a}{1}x \cdot dx}{\binom{c}{\gamma}x} \cdot L \binom{c}{\gamma}x$$

ist.

Dieser Fall aber, der beim ersten Anblick sehr zusammengesetzt zu sein scheint, kann glücklicherweise durch die schon früher angewandte Zerlegung von F^1 auf eine, eben der Ausnahme wegen, merkwürdige Function mit einem Element, nemlich H_u^1 oder $\int \frac{du}{1+u^2} L(1+u^2)$ reducirt werden.

Setzt man nemlich $x = c(uS\gamma - C\gamma)$, so wird

$$F^1 = \frac{1}{4}a_1 \left[L \binom{c}{\gamma}x \right]^2 + A \int \frac{dx}{\binom{c}{\gamma}x} L \binom{c}{\gamma}x,$$

und

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\binom{c}{\gamma}x} L \binom{c}{\gamma}x &= \frac{1}{cS\gamma} \int \frac{du}{1+u^2} [L(cS\gamma^2) + L(1+u^2)] \\ &= \frac{1}{cS\gamma} \cdot [L(c^2S\gamma^2) \cdot Lu + H_u^1]. \end{aligned}$$

Zweiter Fall. Wenn n oder m imaginair ist.

In diesem Falle muß

$$\frac{1}{4}(b-c)^2 - (b_1-c)(c_1b-b_1c)$$

negativ sein, und also $= -r^2$ gesetzt werden. Diese Gleichung giebt aufgelöst,

$$b_1 = c_1 \frac{b+c}{2c} \pm \frac{b-c}{2c} \sqrt{\left(c_1^2 - c - \frac{4cr^2}{(b-c)^2}\right)},$$

so daß b_1 imaginair ist, wenn man $c = k^2$ und $c_1 = kC\gamma$ setzt, um zu dem eigentlichen F^1 oder zu

$$\int \frac{\binom{a}{1} x \cdot dx}{\binom{b}{\beta} x} \cdot L \binom{k}{\gamma} x$$

zu gelangen. Nun muß aber die gegebene Form F^1 immer reelle Coefficienten haben, folglich kann dieser Fall nicht Statt finden, oder es muß wenigstens eine von den quadratischen Functionen, hier $\binom{c}{2} x$, reelle einfache Factoren haben, wodurch offenbar F^1 auf E^1 gebracht wird.

Hierdurch ist nunmehr, da die Substitution $x = \frac{m+ny}{1+y}$ nicht mehrere Ausnahme-Fälle zuläßt als die eben betrachteten, vollständig erwiesen, daß F^1 immer durch Functionen von höchstens zwei Elementen ausgedrückt werden kann. Das Nemliche wurde aber oben von C^1 , D^1 und E^1 bewiesen. Also kann jede Integration logarithmisch-rationaler Differentiale durch Functionen mit zwei Elementen bewerkstelligt werden.

Um das Gleiche auch von den Kreisbogen Differentialen zu beweisen, dürfen wir nur die Zerlegung von

$$5. \quad \delta = \int \frac{dx}{c^2 + 2cx C\gamma + x^2} \cdot L(b + b_1 x) \left(= \int \frac{dx}{\binom{c}{\gamma} x} \cdot L \binom{b}{1} x \right)$$

zeigen. Setzen wir

$$x = c(zS\gamma - C\gamma),$$

und der Kürze wegen:

$$\binom{a}{1} z = b - b_1 c C\gamma + b_1 C\gamma \cdot z,$$

so wird sogleich

$$\delta = \frac{1}{cS\gamma} \int \frac{dz}{1+z^2} \cdot L(a + a_1 x),$$

und diese Form

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \mathcal{L} \left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix} \right) x = {}^a\delta x,$$

welche schon nur drei Elemente hat, läßt sich, wie folgt, noch vereinfachen:

Setzt man nemlich

$$x = \frac{\alpha + z}{1 - \alpha z},$$

so wird

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dz}{1+z^2}$$

und

$$\left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix} \right) x = \alpha - \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_1 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)}{1 - \alpha z},$$

und folglich

$$\mathcal{L} \left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix} \right) x = \mathcal{L} \left(\alpha - \frac{\alpha_1}{\alpha} \right) + \frac{\pi}{2} - \mathcal{L} \frac{A + A_1 z}{\alpha_1 (1 + \alpha^2)},$$

wenn der Kürze wegen

$$A = \alpha \left[1 + \left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \alpha \cdot \left(\begin{smallmatrix} a \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \frac{-1}{\alpha} \right]$$

und

$$A_1 = -\alpha^2 \left[1 + \left(\alpha - \frac{\alpha_1}{\alpha} \right)^2 \right]$$

gesetzt wird.

Multiplicirt man daher die obige Differential-Gleichung mit dieser Kreisbogen-Gleichung, und integrirt, so findet man:

$${}^a\delta x = \left[\mathcal{L} \left(\alpha - \frac{\alpha_1}{\alpha} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \mathcal{L} z - {}^a\delta z + \text{Const.},$$

eine Gleichung, die sehr gut als Ausdruck einer Eigenschaft von ${}^a\delta$ angesehen werden könnte, die wir aber nur zur Vereinfachung dieser Formel anwenden wollen. Dieses kann auf verschiedene Weise geschehen, je nachdem das arbitraire α verschieden bestimmt wird. Ich habe mehrere Formen mit zwei Elementen versucht, wie die Form

$$\int \frac{dz}{1+z^2} \mathcal{L}(\alpha + z),$$

die immer, oder

$$\int \frac{dz}{1+z^2} \cdot \mathcal{L} \alpha (1 + z),$$

die nicht immer zum Ziele führt. Die folgende

$$\int \frac{dz}{1+z^2} \mathcal{L}(bz)$$

hat mir die zweckmäfsigste erschienen, theils weil sich δ am leichtesten

auf dieselbe reduciren läßt, theils weil sie der obigen logarithmischen am nächsten verwandt ist.

Die Reduction geschieht, wenn man $A = 0$ setzt, wodurch man für α eine Gleichung von der Form

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = 2k = \frac{a_r}{a} - \frac{a}{a_r} - \frac{1}{a a_r}$$

erhält, so daß

$$\alpha = k \pm \sqrt{(k^2 + 1)},$$

und folglich immer reell ist. Hieraus erhellet, daß δ immer auf

$$\int \frac{dz}{1+z^2} L(A_1 z)$$

gebracht werden, und demnach $\int P dx L R$ auch immer durch Functionen mit nur zwei Elementen gefunden werden kann.

4. Versuch, die gefundenen Functionen mit zwei Elementen in Functionen mit nur einem Element aufzulösen, oder wenigstens durch einander auszudrücken.

Bis hier gelang es uns, alle zu den rationalen logarithmischen und Kreisbogen-Differentialen gehörigen Integral-Ausdrücke auf Functionen mit nur zwei Elementen zurückzuführen. Sobald man aber diese Functionen auf andere mit nur einem Element bringen will, häufen sich die Schwierigkeiten.

Die Functionen mit zwei Elementen durch einander auszudrücken, hat im Allgemeinen keine besondere Schwierigkeit; auch ist es bei mehreren schon oben geschehen. Wir brauchen daher nur darauf hinzuweisen. Um die Uebersicht zu erleichtern, wollen wir die verschiedenen Functionen mit zwei Elementen in Classen eintheilen, so daß die, welche durch einander ausgedrückt werden können, vereinigt werden.

Erste Classe. $B_y^a = \int \frac{dy}{y} L(a+y), \quad \int \frac{du}{1+u^2} L(a+u)^2 = I_u^a,$

$$E_x^a = \int \frac{dx \cdot Lx}{1+2xCa+x^2}, \quad E_a^x = \int \frac{dx}{a^2+x^2} L(1+x)^2.$$

Zweite Classe. $H_u^a = \int \frac{du}{1+u^2} L(a^2+u^2)$, wovon besonders die Function mit nur einem Element:

$$H_u^1 = \int \frac{du}{1+u^2} \cdot L(1+u^2)$$

zu bemerken ist.

Dritte Classe. $(\lambda x = \int \frac{dx}{x} L(1+x)$, mit nur einem Element)
 (aus C^1), $D_x^\beta = \int \frac{dx}{x} L(1+2x C\beta + x^2)$ (aus D^1)

$${}^tD x = \int \frac{dx}{1+x} \cdot L(t^2 + x^2); \quad G_y^a = \int \frac{y dy}{a^2 + y^2} \cdot L(1+y)^2.$$

Vierte Classe. $\delta_x^a = \int \frac{dx}{1+x^2} \cdot L(ax)$, ${}^a\delta x = \int \frac{dx}{1+x^2} \cdot L(a+x)$.

Zur Rechtfertigung dieser Eintheilung müssen wir kürzlich zeigen, daß die in eine und dieselbe Classe gebrachten Functionen durch einander ausgedrückt werden können.

Daß es bei denen in der ersten Classe der Fall ist, folgt daraus, daß sie alle besondere Formen von E_0^1 sind; von welchen schon gezeigt wurde, daß man sie durch I_u^a finden kann; und daher umgekehrt diese durch jene. Eben so sind die der dritten Classe besondere Formen von D^1 , außer G_y^a , welches partiell integrirt,

$$= \frac{1}{2} L(a^2 + y^2) \cdot L(1+y)^2 - \int \frac{dy}{1+y} L(a^2 + y^2)$$

ist, und sonach eben auf D^1 gebracht werden können. Also können alle Functionen von der dritten Classe durch D_x^β gefunden werden, und umgekehrt. Die in der vierten Classe, als besondere Formen von δ , können auch durch einander ausgedrückt werden. Man kann daher jede Classe als eine einzige Transcendente ansehen.

Hieraus ergibt sich also, daß man zu der bezweckten Integration höchstens nur vier Functionen mit zwei Elementen, und eine oder zwei transcendente Functionen mit einem Element, die aber als besondere Fälle der ersten anzusehen sind, zu postuliren braucht. Da sich nicht voraus sehen liefs, welche von den verschiedenen Formen der Transcendenten die regulärste (d. h. die, deren Eigenschaften sich am einfachsten ausdrücken lassen) sei, so habe ich alle oben angeführten verschiedenen Formen, wie sie aus der vorhergehenden Analyse unmittelbar hervorgingen, untersuchen müssen, um keine merkwürdige Form bei der Auswahl zu übergehen. Um aber die vier transcendenten Functionen wo möglich auf eine geringere Anzahl zu bringen, oder auch in einfache zu zerlegen, wird es gut sein, sie noch anders einzutheilen.

Ich bemerke, daß alle hierhergehörigen Functionen nur von zweierlei Art sind, nemlich:

- 1) solche, deren Differential ein Product eines Logarithmus in das Differential eines Kreisbogens ist, oder umgekehrt, die also von der Form:

$$\int d\mathcal{L}.L \text{ oder } \int dL.\mathcal{L}$$

sind. (Classe 1. und 2.)

- 2) Solche, deren Differential ein Product eines Logarithmus in das Differential eines Logarithmus, oder auch eines Kreisbogens in das Differential eines Kreisbogens ist, die also von der Form:

$$\int dL.L^1 \text{ oder } \int dL.\mathcal{L}^1$$

sind. (Classe 3. und 4.)

Diese Eintheilung wird sich in der Folge rechtfertigen. Daß die Functionen der ersten Art durch einander ausgedrückt werden können, ergiebt sich im Allgemeinen daraus, daß

$$\int d\mathcal{L}.L + \int dL.\mathcal{L} = L.\mathcal{L}$$

ist, woraus zu vermuthen, daß sie alle nur eine neue transcendente Function von zwei Elementen voraussetzen: ja, daß sie selbst alle durch eine und dieselbe Function H_x^1 von einem Elemente ausgedrückt werden können. Wie von den Functionen der ersten Art, die als transcendente Producte logarithmischer und circularirer, also ungleicher Functionen betrachtet werden können, kann ein Gleiches von der zweiten Art, welche transcendente Producte gleicher Functionen sind, erwartet werden. Hier kommt in einer höheren, transcendenten Bedeutung dasjenige wieder vor, was in den Elementen bei den entgegengesetzten Größen Statt findet, daß nemlich gleiche Zeichen positive, ungleiche Zeichen negative Producte geben. Kreisbogen und Logarithmen sind hier die entgegengesetzten Functionen, und man kann $\mathcal{L}$ als einen negativen, oder, wie gewöhnlich, imaginären Logarithmen betrachten. Die Functionen der ersten Art, als aus ungleichen entspringend, müssen daher negative, d. h. zu den circularen gehörende Functionen geben (was sich auch bestätigt). Mit hin werden die der zweiten Art positive, oder dem Logarithmus analoge Functionen geben. Auch fand ich, dieser Analogie folgend, im Voraus, daß die Function δ , die so verschieden von D zu sein scheint, gleichwohl durch letztere ausgedrückt werden kann. Wenn nemlich ϕ und

φ^1 zwei Bogen sind, deren Tangenten die Form $\frac{\alpha + \alpha_1 v}{\alpha + \alpha_2 v}$ haben, desgleichen r und r^1 von der Form $\sqrt{(c + c_1 v + c_2 v^2)}$, so kann man δ oder $\int \frac{dv}{v^2 + \beta^2} L(v - b)$ auf

$$\frac{1}{4\beta} (D_r^\varphi - D_{r^1}^\varphi) + AL(v^2 + \beta^2) + BL \frac{v}{\beta} + C$$

bringen. Die Bestimmung der Constanten übergehe ich, da sich bald eine einfachere Art, δ durch D auszudrücken, zeigen wird.

Functionen von der ersten Art: $\left\{ \begin{matrix} \int dJ.L \\ \int dL.L \end{matrix} \right\}$.

Da die weitere Zerlegung nicht gelang, so fing ich an, die Eigenschaften der hierher gehörigen Functionen (besonders I_u^a und H_u^a) zu suchen. Vorzugsweise zog ich die in der obigen Analyse sich besonders auszeichnende einfache Function H_a^1 oder $\int \frac{du}{1+u^2} L(1+u^2)$ in Betracht. Besonders schien die Substitution $u = \frac{\alpha+x}{1-\alpha x}$ gelingen zu müssen: sie gab aber statt der gesuchten Eigenschaften der Function mit einem Element H_u^1 die eben so gewünschte Zerlegung der Function I_u^t von zwei Elementen, die sich durch jene so ausdrücken läßt:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} \cdot L(t+x)^2, \text{ oder}$$

$$\text{Lehrsatz I. } I_x^t = H\left(\frac{1-tx}{t+x}\right) + H_x^1 + LxL(1+t^2) + C.$$

Denn setzt man $\frac{1-tx}{t+x} = u$, so wird $\frac{du}{1+u^2} = -\frac{dx}{1+x^2}$ und

$$1+u^2 = \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t+x)^2},$$

folglich

$$dH_u^1 = \frac{-dx}{1+x^2} \cdot L \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t+x)^2},$$

und daher

$$\begin{aligned} & d(H_u^1 + H_x^1 + Lx \cdot L(1+t^2)) \\ &= \frac{dx}{1+x^2} \left(-L \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t+x)^2} + L(1+x^2) + L(1+t^2) \right), \end{aligned}$$

$$\text{d. h. } = \frac{dx}{1+x^2} L(t+x)^2 = d.I_x^t.$$

Integriert man nun, so erhält man den obigen Lehrsatz, aus welchem

mehrere merkwürdige Corollarien gezogen werden können; nemlich

$$1) \quad I_x^0 = H_x^1 + H_{\left(\frac{1}{x}\right)}^1 + C = \int \frac{dx}{1+x^2} Lx^2,$$

welcher Ausdruck auch für H_x^0 und $I_{\left(\frac{1}{x}\right)}^0 + B$ gilt.

$$2) \quad I_{\left(\frac{1}{a}\right)}^a = J \frac{1}{a} \cdot L(1+a^2),$$

und wenn $I_0^\infty = 0$, welches ein bestimmtes Integral (*intégrale définie*) ist,

$$\int_{\left(\frac{1}{a}\right)}^0 \frac{dx}{1+x^2} L(a+x)^2 = J \frac{1}{a} \cdot L(1+a^2) \left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen den Grenzen} \\ x=0 \text{ und } x=\frac{1}{a} \end{array} \right\}.$$

$$3) \quad \text{Eben so } I_1^1 = \frac{1}{4} \pi L 2 = -I_{(-1)}^{(-1)},$$

$$4) \quad I_x^a + I_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{a}} = I_x^0 J x L a^2,$$

$$5) \quad I_x^a - I_a^x = L(1+a^2) J x - L(1+x^2) J a + I_x^0 - I_a^0,$$

$$6) \quad I_\infty^t + I_t^0 = \frac{\pi}{2} L(1+t^2), \text{ folglich } I_\infty^0 = 0,$$

$$7) \quad I_{-x}^a + I_x^{-a} + 2H_{\left(\frac{1}{a}\right)}^1 = 0,$$

nebst mehreren bestimmten Integralen, die ich übergehe.

Da auf diese Weise die Zerlegung von I_x^a oder $\int \frac{dx}{1+x^2} \cdot L(a+x)^2$ glücklich gefunden war, nahm ich die noch übrigen vor. Besonders schien die aus D entsprungene Function $\int \frac{x dx}{1+x^2} L(a+x)^2$, oder $\int \frac{dx}{a+x} L(1+x^2)$ eben so auflöslich zusammengesetzt zu sein, wie I_x^a , wovon sie nicht sehr verschieden zu sein schien. Leider aber glückte eine andere Zerlegung, als die sich unmittelbar darbietende imaginaire, aller Mühe ungeachtet, nicht. Ein so geringer Erfolg bei dem einfacheren Falle versprach zwar nicht viel für H_x^a oder $\int \frac{dx}{1+x^2} \cdot L(a^2+x^2)$, wovon, da die Function nur imaginaire Factoren enthält, noch weniger eine reelle Zerlegung zu hoffen war. Gleichwohl ist dieselbe vollkommen gelungen.

Bevor ich sie vollständig vortrage, will ich historisch anzeigen, auf welche Standpunkte ich die Zerlegung successive brachte.

Zuerst fand ich, daß $H_x^a + H_{\left(\frac{a}{x}\right)}$ durch I , und folglich durch H^1 ausgedrückt werden kann, woraus sich schon eine Zerlegung hoffen liefs. Späterhin fand ich noch, daß H_u^a wenigstens auf zwei verschiedene Arten durch I gefunden werden kann, nemlich

$$1) \quad H_u^a = \frac{1}{2} \left(I_{u^1}^{a^1} - I_{u''}^{a''} \right) + \text{einer Summe von } L \times J$$

wo $a^1 = \frac{a}{u}$, $u^1 = \frac{u - \frac{a}{u}}{1 + a}$ und $u'' = \frac{u + \frac{a}{u}}{a - 1}$.

$$2) \quad H_u^a = I_{\left(\frac{a}{u}\right)}^{\frac{1}{u}} - I_{\left(\frac{a}{u}\right)}^{-\frac{1}{u}} + 2I_u^0 + \Sigma(L \times J),$$

woraus schon erhellet, daß H_u^a durch H_x^1 mit Hülfe unseres ersten Lehrsatzes ausgedrückt werden kann. Von den verschiedenen Verfahren, durch welche man zur Zerlegung von H_x^a gelangt, will ich nur das einfachste anführen, obgleich es nicht immer zum Ziele führt, z. E. nicht die Zerlegung von I_x^a giebt. Diese ist eine Variation von H_x^a , in Rücksicht des Parameters (a), und nochmaliger Integration. Weil nemlich H_x^a eine Function sowohl von x als von a ist, so kann man die Ableitung nach a finden, welche völlig bestimmt sein muß, wenn man den Anfang des Integrals festsetzt, z. E. $H_0^a = 0$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} H_x^a &= H^1 = \int \frac{dx}{1+x^2} \cdot \frac{d}{da} L(a^2 + x^2) \\ &= \int \frac{dx}{1+x^2} \cdot \frac{2a}{a^2 + x^2} = \int \frac{2a dx}{a^2 - 1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{a^2 + x^2} \right) \\ &= \frac{2a}{a^2 - 1} Lx - \frac{2}{a^2 - 1} L \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Nach geschehener Entwicklung und Integration wird aber

$$H_x^a = x L a^3 + \frac{x^3}{3} \left(\frac{1}{a^2} - L a^2 \right) - \text{etc.},$$

und daher

$$\frac{d}{dx} H_x^a = x \cdot \frac{2}{a} - \frac{x^3}{3} \left(\frac{2}{a^3} + \frac{2}{a} \right) + \dots \text{etc.}$$

d. h. $\frac{d}{da} H_0^a = 0$, und folglich $C = 0$. Es ist also

$$\frac{d}{da} H_x^a = \frac{2a}{a^2-1} Lx - \frac{2}{a^2-1} \cdot L\left(\frac{x}{a}\right);$$

und also, wenn man mit da multiplicirt, sodann integrirt, und der Kürze wegen $\frac{x}{a} = u$ setzt:

$$\begin{aligned} H_x^a &= \int \left(\frac{2a da}{a^2-1} \right) Lx - \int \frac{2 da}{a^2-1} L u \\ &= L(a^2-1) Lx - L u L \frac{a-1}{a+1} + \int \frac{du}{1+u^2} L \frac{a-1}{a+1}. \end{aligned}$$

Nun ist aber, weil $a = \frac{x}{u}$, wie leicht zu sehen:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1+u^2} \cdot L \frac{a-1}{a+1} &= \int \frac{du}{1+u^2} \cdot L \frac{x-u}{x+u} = \int \frac{du}{1+u^2} \cdot L(x-u) - \int \frac{du}{1+u^2} L(x+u) \\ &= \frac{1}{2} \left(-I_{-u}^x - I_u^x \right) + C, \end{aligned}$$

folglich wird

$$H_x^a = \frac{1}{2} \left(-I_{-u}^x - I_u^x \right) + L(a^2-1) Lx + L u L \frac{a+1}{a-1} + C.$$

Es kann aber I_z^x nach dem ersten Lehrsatz durch H_v^1 ausgedrückt werden. Thut man dieses, und bestimmt gehörig die Constante, so ergibt sich folgende vereinfachte Zerlegung von $2H_u^a$, nemlich:

Zweiter Lehrsatz.

$$\begin{aligned} 2H_u^a &= H^1 \left(\frac{u-au^{-1}}{1+a} \right) + H^1 \left(\frac{u+au^{-1}}{1-a} \right) + 2H^1(u^{-1}) \\ &\quad + L u \cdot L(1-a^2)^2 + L \frac{u}{a} \cdot L \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^2 + C, \end{aligned}$$

ein merkwürdiges Theorem, welches wir mehrerer Vollständigkeit und Deutlichkeit wegen, auch noch besonders beweisen wollen.

Da im Allgemeinen

$$dH_v^1 = \frac{dv}{1+v^2} \cdot L(1+v^2)$$

ist, so wird

$$dH^1 \left(\frac{u-au^{-1}}{1+a} \right) = \frac{du(1+au^{-2})(1+a)}{(1+a)^2 + (u-au^{-1})^2} \cdot L \frac{(1+a)^2 + (u-au^{-1})^2}{(1+a)^2},$$

und weil

$$(ab + a_1 b_1)^2 + (ab_1 - a_1 b)^2 = (a^2 + a_1^2) \cdot (b^2 + b_1^2),$$

so ist

$$(1+a)^2 + (u-au^{-1})^2 = (1+u^2)(1+a^2u^{-2}),$$

und folglich auch

$$= (1-a)^2 + (u + au^{-1})^2,$$

wenn a negativ genommen wird.

Es ist also

$$dH^1\left(\frac{u-au^{-1}}{1+a}\right) = du\left(\frac{1}{1+u^2} + \frac{a}{(a^2+u^2)}\right)L\frac{(1+u^2)(1+a^2u^{-2})}{(1+a)^2}$$

und

$$dH^1\left(\frac{u+au^{-1}}{1+a}\right) = du\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{a}{a^2+u^2}\right)L\frac{(1+u^2)(1+a^2u^{-2})}{(1-a)^2}.$$

Die Summe dieser beiden Differentiale ist, wie leicht zu sehen:

$$\begin{aligned} &= \frac{2du}{1+u^2} \cdot L(1+u^2)(1+a^2u^{-2}) \\ &- \frac{du}{1+u^2} [L(1+a)^{-2} + L(1-a)^{-2}] \\ &- \frac{adu}{a^2+u^2} [L(1+a)^{-2} - L(1-a)^{-2}], \end{aligned}$$

wenn nemlich die Brüche und Logarithmen partiell aufgelöst werden. Durch eine leichte Verwandlung erhält man:

$$\begin{aligned} &d\left[H^1\left(\frac{u-au^{-1}}{1+a}\right) + H^1\left(\frac{u+au^{-1}}{1-a}\right)\right] \\ &= \frac{2du}{1+u^2} [L(1+u^2) + L(a^2+u^2) - Lu^2] \\ &+ \frac{adu}{a^2+u^2} L\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 - \frac{du}{1+u^2} \cdot L(1-a^2)^2, \end{aligned}$$

und folglich durch Integration:

$$\begin{aligned} &H^1\left(\frac{u-au^{-1}}{1+a}\right) + H^1\left(\frac{u+au^{-1}}{1-a}\right) \\ &= \text{Const.} + 2H_u^1 + 2H_u^a - 2I_u^0 + L\frac{u}{a} \cdot L\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 - Lu \cdot L(1-a^2)^2, \end{aligned}$$

eine Gleichung, die unmittelbar H_u^a giebt, und mit Hülfe des ersten Zusatzes zum ersten Lehrsatz den obigen Lehrsatz beweiset.

Erster Zusatz. $H_2^a + H_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{a}} = Lz \cdot La^2 + I_2^0 + C.$

Zweiter Zusatz. Wenn $H_0^a = 0$, so ist $H_{\infty}^{\pm a} = \pi L(1+a)$, welches ein bestimmtes Integral (*intégrale définie*) giebt, nemlich:

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} L(a^2+u^2) = \pi L(1+a) \left\{ \begin{matrix} u = 0 \\ u = a \end{matrix} \right\}.$$

Dritter Zusatz. Wenn $a=1$ ist, und die Constante gehörig bestimmt wird, so ist

$$H_u^1 - H_{\left(\frac{1}{u}\right)}^1 = \frac{1}{2} H_{\frac{1}{2}}^1 \left(u - \frac{1}{u}\right) + (Lu - L1) LH,$$

welches eine Bisectionsformel für die Function H^1 von einem Element ist. Nimmt man hier $u = \infty$, so findet sich

$$H_\infty^1 = \pi L2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} L(1+u^2),$$

welches ein bekanntes *intégrale définie* ist. Hieraus erhellet nun deutlich, daß alle Functionen erster Art nur die einzige neue H_x^1 oder

$$\int \frac{dx}{1+x^2} L(1+x^2)$$

voraussetzen, durch welche sie alle ausgedrückt werden können.

Functionen von der zweiten Art:

$$(\int dL \cdot L^1 \text{ und } \int dL \cdot L^1).$$

Diese können im Allgemeinen nicht durch Functionen eines Elements, (wie z. B. λx) ausgedrückt werden, wohl aber eine durch die andere, so daß nur eine Function zweier Elemente zu postuliren nöthig ist. Im Allgemeinen scheint es zwar gleichgültig, welche von den hierher gehörigen Functionen zweier Elemente man zum Grunde legen will; jedoch ist dazu offenbar die einfachste die beste. Man kann daher nur erst wählen, nachdem die Eigenschaften der Function untersucht worden sind. Durch nähere Untersuchung habe ich gefunden daß die Function D_x^a oder

$$\int \frac{dx}{x} \cdot L(1 + 2xC\alpha + x^2)$$

am leichtesten zu berechnen ist, und die einfachsten und merkwürdigsten Eigenschaften hat, und also am meisten dazu geeignet ist, die übrigen hierher gehörigen Functionen darauf zu beziehen.

Ich habe vielfältig vergebens versucht, D_x^a in allgemeine und reelle Functionen Eines Elements aufzulösen. Eine imaginaire Sonderung dagegen ist leicht.

Da nemlich

$$1 + 2xC\alpha + x^2 = (1 + xe^{ai})(1 + xe^{-ia}),$$

so wird

$$\begin{aligned} D_x^a &= \int \frac{dx}{x} L(1 + xe^{ai}) + \int \frac{dx}{x} L(1 + xe^{-ia}) \\ &= \lambda(xC\alpha + xS\alpha i) + \lambda(xC\alpha - xS\alpha i) \end{aligned}$$

$$(\text{wo } i^2 = -1).$$

Das merkwürdigste hierbei ist, daß dieser im Allgemeinen imaginaire Ausdruck in unzähligen Fällen reell gemacht werden kann. Es kann nemlich theils, wenn α mit π commensurabel ist, D_x^α durch mehrere λ ausgedrückt werden, wie z. B.

$$D_x^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{3}\lambda x^3 - \lambda x,$$

theils können im Allgemeinen für jeglichen Werth von α (der auch incommensurabel mit π sein kann) unzählige Werthe von x angegeben, und die Uebergänge zum Reellen auf unzählige Arten auf die Weise bewerkstelligt werden, daß man D_x^α durch mehrere λ erhält. Dennoch kann D_x^α im Allgemeinen nicht anders als durch eine unendliche Reihe von λ reell ausgedrückt werden. Ich werde dieses weiter unten näher auseinandersetzen.

Für jetzt kommt es nur darauf an, zu zeigen, daß alle Functionen zweiter Art durch D_x^α , diese Function als bekannt vorausgesetzt, ausgedrückt werden können.

Zuerst ist, wie leicht zu sehen,

$$\lambda x = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} L(1+x^2) = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} L(1+2x C 0 + x^2) = \frac{1}{2} D_x^0.$$

Jedoch muß λx als Function eines Elements nicht übersehen werden; weshalb wir sie noch besonders betrachten wollen. Zweitens haben wir schon bemerkt, daß alle aus D^1 und E^1 entspringende, hierher gehörige Integrale durch D_x^α gefunden werden, während alle dergleichen aus F^1 auf D^1 und E^1 zurückgeführt werden, und daher ebenfalls durch D_x^α gefunden werden können. Die einzige noch zweifelhafte Form ist daher die Kreisbogen-Form δ_x^α oder $\int \frac{dx}{1+x^2} L \alpha x$, die aber auch auf D_x^α , wie folgt, gebracht werden kann. Da nemlich D_x^α eine Function zweier Elemente ist, so muß sie auch eine Ableitung nach dem Parameter α haben. Es ist aber, wie leicht zu sehen,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} D_x^\alpha &= D^1 = \frac{d}{d\alpha} \int \frac{dx}{x} L(1+2x C \alpha + x^2) \\ &= \int \frac{dx}{x} \cdot \frac{d}{d\alpha} L(1+2x C \alpha + x^2) = \int \frac{dx}{x} \cdot \frac{-2x S \alpha}{1+2x C \alpha + x^2} \\ &= -2S \alpha \int \frac{dx}{(S \alpha)^2 + (x+C \alpha)^2} = -2 \cdot L \frac{x+C \alpha}{S \alpha} + C 0 x, \end{aligned}$$

wo $C_0 x$ eine von x unabhängige GröÙe oder sogenannte Constante ist, die aber eine Function von α sein kann, welche sich, wie folgt, bestimmen läÙt. Da durch unmittelbare Entwicklung

$$\begin{aligned} D_x^\alpha &= 2 \int \frac{dx}{x} \left(x C_\alpha - \frac{x^2}{2} C_{2\alpha} + \frac{x^3}{3} C_{3\alpha} - \dots \right) \\ &= 2 \left(x C_\alpha - \frac{x^2 C_{2\alpha}}{2} + \frac{x^3 C_{3\alpha}}{3} - \dots \right), \end{aligned}$$

so kann man $D_0^\alpha = 0$ setzen. Alsdann ist

$$\frac{d}{d\alpha} D_x^\alpha = -2(x S_\alpha - \frac{1}{2} x^2 S_{2\alpha} + \dots) = 0,$$

und für $x = 0$,

$$\frac{d}{d\alpha} D_0^\alpha = 0 = -2L \frac{C_\alpha}{S_\alpha} + C_0 x,$$

folglich

$$C_0 x = 2L \frac{C_\alpha}{S_\alpha};$$

mithin

$$\frac{d}{d\alpha} D_x^\alpha = 2 \left(L \frac{C_\alpha}{S_\alpha} - L \frac{C_\alpha + x}{S_\alpha} \right) = -2L \frac{x S_\alpha}{1 + x C_\alpha};$$

folglich

$$D_x^\alpha = - \int 2 d\alpha L \frac{x S_\alpha}{1 + x C_\alpha}.$$

Nach bekannten trigonometrischen Formeln (oder nach Beisp. 1. Beil. 2.) ist aber

$$L \frac{x S_\alpha}{1 + x C_\alpha} = \frac{1}{2} \alpha - L \frac{1-x}{1+x} T_{\frac{1}{2}\alpha},$$

und hieraus

$$D_x^\alpha = \int 2 d\alpha L \frac{1-x}{1+x} T_{\frac{1}{2}\alpha} - \int \alpha d\alpha;$$

folglich umgekehrt:

$$\int 2 d\alpha L \frac{1-x}{1+x} T_{\frac{1}{2}\alpha} = D_x^\alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{C}{(0\alpha)},$$

d. i. wenn man $\frac{1-x}{1+x} = a$, oder $x = \frac{1-a}{1+a}$, und $T_{\frac{1}{2}\alpha} = t$, oder $\alpha = 2L t$ und $d\alpha = \frac{2 dt}{1+t^2}$ setzt:

$$4) \int \frac{dt}{1+t^2} L(a.t) = D_{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)}^{2Lt} + 2(Lt)^2 + \text{Const.}$$

d. h.:

Dritter Lehrsatz. $\partial_t^\alpha = \frac{1}{4} \left(D_{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)}^{(2Lt)} + 2(Lt)^2 \right) + \text{Const.}$, welches

der dritte merkwürdige Lehrsatz ist, durch welchen die Kreisbogen-Formeln auf die einfacheren logarithmischen gebracht werden können.

Aus der bisherigen Untersuchung geht nun hervor, daß man zur Integration aller möglichen rationalen, logarithmischen und Kreisbogen-Differentiale $\int P dx L R$ und $\int P dx \cdot \text{arc. tang. } R$ nur diese zwei neuen elementaren Functionen

$$H_x^1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \cdot L(1+x^2) \text{ und}$$

$$D_x^\alpha = \int_0^1 \frac{dx}{x} L(1+2x C\alpha + x^2)$$

als bekannt oder berechnet zu postuliren braucht, wozu ihrer Einfachheit wegen noch die dritte

$$\lambda x = \int \frac{dx}{x} L(1+x)$$

kommt.

Statt der ersten kann man auch die Form

$$H\varphi = \int d\varphi L(S\varphi)^{-2}$$

nehmen (indem man der Kürze wegen $H_r^1 \varphi$ durch $H\varphi$ bezeichnet).

Wenn man nemlich $x = \cot \varphi$ oder $T\varphi = \frac{1}{x}$ setzt, so ist

$$d\varphi = \frac{-dx}{1+x^2} \text{ und } 1+x^2 = \frac{1}{S\varphi^2},$$

folglich

$$\int \frac{dx}{1+x^2} L(1+x^2) = -\int d\varphi L(S\varphi)^{-2} = \int d\varphi L(S\varphi)^2,$$

$$\text{d. h. } H_x^1 = \text{Const.} - H\varphi.$$

Als elementare bilogarithmische Functionen kann man daher annehmen:

$$\lambda x = \int \frac{dx}{x} L(1+x) ^*),$$

$$D_x^\alpha = \int \frac{dx}{x} L(1+2x C\alpha + x^2),$$

$$H\varphi = \int d\varphi \cdot L(S\varphi)^{-2},$$

durch deren Hülfe beliebige rationale logarithmische Differential-Formeln integrirt werden können.

Da die rationalen logarithmischen Differentiale schon für sich einen weit größeren Umfang haben, als die rationalen und einer noch weite-

*) Man könnte auch $x = e^\alpha = {}^1\lambda \varphi$, ${}^e D_e \varphi = {}^1 D \varphi$ setzen, so daß $\lambda \varphi = \int d\varphi L(1+e^\varphi)$ und ${}^1 D_\varphi^\alpha = \int d\varphi L(1+2e^\varphi C\alpha + e^{2\varphi})$ wäre; dieses aber gewährt keine besonderen Vortheile.

ren Ausdehnung durch Verwandlung fähig sind *), so schienen mir diese drei neuen Functionen von einem so ausgedehnten Gebrauche und von eben solcher Wichtigkeit wie die logarithmischen (circulären) und elliptischen. Ich habe deshalb keine Mühe gespart, ihren Eigenschaften nachzuspüren, die ich auch endlich fand. Ein Freund ist mir bei der begonnenen Berechnung von Tafeln für dieselben behülflich gewesen, vermöge welcher die Functionen nunmehr als bekannt angesehen werden können **).

Wenn man diese Functionen als bekannt voraussetzt, so kann man z. B. folgende Integrationen synthetisch bewerkstelligen. Wir setzen dieselben her, damit der Gebrauch der neuen Functionen besser einleuchten möge.

Aufgabe 1.

$$dy = \frac{dt}{1+t^2} \cdot L(t + T\psi)^2$$

zu integrieren.

Auflösung. Man setze $t = T\phi$, so wird

$$dy = d\phi L(T\phi + T\psi)^2 = d\phi [L(\phi + \psi)^2 - LC\phi^2 - LC\psi^2],$$

folglich, weil

$$\int d\phi L(S\phi)^{-2} = H\phi,$$

und mithin

$$\int d\phi L(C\phi)^{-2} = -H(R - \phi) \text{ ist,}$$

durch Integration:

$$y = -H(\phi + \psi) - H(R - \phi) - \phi LC\psi^2 + \text{Const.}$$

*) Es können nemlich unzählige Ausdrücke darauf reducirt werden, z. B.

$$\delta y = \phi d\phi R[e_1^{\phi}, \sqrt{(a + a_1 e^{\phi} + e^{2\phi})}].$$

Setzt man

$$\sqrt{(a + a_1 e^{\phi} + e^{2\phi})} = z + e^{\phi},$$

so ist

$$e^{\phi} = \frac{z^2 - a}{a_1 - 2z} \text{ und } d\phi = \left(\frac{2z}{z^2 - a} + \frac{2}{a_1 - 2z} \right) dz,$$

und folglich

$$\frac{dy}{\phi} = \left(\frac{2z}{z^2 - a} + \frac{2}{a_1 - 2z} \right) dz R \left(\frac{z^2 - a}{a_1 - 2z} z + \frac{z^2 - a}{a_1 - 2z} \right),$$

d. h. rational, und demnach $\int \frac{dy}{\phi}$ von der Form $Z + LZ'$, und

$$y = \phi(Z + LZ') - \int \left(\frac{2z}{z^2 - a} + \frac{2}{a_1 - 2z} \right) dz (Z + LZ'),$$

also durch obige drei neue Functionen zu finden.

**) Ich habe einige der Hauptpunkte der Tafeln für λ und H mit Hülfe der gefundenen Eigenschaften berechnet, und füge sie zur Probe in der Beilage III. bei.

Aufgabe 2. $dy = \frac{dt}{1+t^2} L(a^2 + t^2)$ oder $= d\varphi L(a^2 + T\varphi^2)$
zu integrieren.

Auflösung. Man setze $t = T\varphi = aT\beta$, so wird

$$a^2 + T\varphi^2 = T\varphi^2 \left(1 + \frac{1}{T\beta^2}\right) = \frac{T\varphi^2}{S\beta^2} = \frac{S\varphi^2}{C\varphi^2 S\beta^2};$$

daher:

$$dy = d\varphi LS\varphi^2 - d\varphi L(C\varphi^2 S\beta^2).$$

Weil aber $a = \frac{T\varphi}{T\beta}$, so ist

$$1 \pm a = \frac{T\beta \pm T\varphi}{T\beta} = \frac{S(\beta \pm \varphi)}{S\beta C\varphi},$$

und folglich

$$\frac{1+a}{1-a} = \frac{S(\beta+\varphi)}{S(\beta-\varphi)}, \text{ und}$$

$$1-a^2 = \frac{S(\beta+\varphi) \cdot S(\beta-\varphi)}{S\beta^2 C\varphi^2},$$

woraus

$$S\beta^2 C\varphi^2 = \frac{S(\beta+\varphi) S(\beta-\varphi)}{1-a^2},$$

und mithin

$$d\varphi L(S\beta^2 C\varphi^2) = d\varphi LS(\beta+\varphi) + d\varphi LS(\beta-\varphi) - d\varphi L(1-a^2),$$

$$\text{d. i.} = \left\{ \begin{aligned} &(d\varphi + d\beta) LS(\beta+\varphi) + (d\varphi - d\beta) LS(\beta-\varphi) - d\varphi L(1-a^2) \\ &\quad - d\beta LS(\beta+\varphi) + d\beta LS(\beta-\varphi) \end{aligned} \right\}$$

oder

$$= d(\varphi+\beta) LS(\varphi+\beta) + d(\varphi-\beta) LS(\beta-\varphi) - d\varphi L(1-a^2) - d\beta L \frac{1+a}{1-a}$$

folgt, daher

$$dy = d\varphi LS\varphi^2 - d(\varphi+\beta) LS(\varphi+\beta) + d(\beta-\varphi) LS(\beta-\varphi) \\ + d\varphi L(1-a^2) + d\beta L \frac{1+a}{1-a},$$

und integriert:

$$y = -H\varphi + \frac{1}{2} [H(\varphi+\beta) + H(\varphi-\beta)] + \varphi L(1-a^2) + \beta L \frac{1+a}{1-a} + \text{Const.} \\ = \int L(a^2 + T\varphi^2) d\varphi, \text{ wo } T\beta = \frac{1}{a} T\varphi,$$

welches das obige zweite Theorem ist, auf eine neue Art hergeleitet.

Aufgabe 3. $dy = d\varphi L(a^2 + 2aC\alpha T\varphi + T\varphi^2)$ oder

$$= \frac{dt}{1+t^2} L(a^2 + 2aCat + t^2)$$

zu integrieren.

Auflösung. Man setze $\varphi = \psi - \beta$, oder $T\varphi = \frac{T\psi - T\beta}{1 + T\psi T\beta}$, und
nehme β so, daß

$$1) \quad a^2 T\beta + a C\alpha (1 - T\beta^2) = T\beta,$$

so wird

$$dy = d\psi L \frac{\left(\frac{\bar{a}}{\alpha}\right) T\beta + T\psi^2 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right) (a T\beta)}{(1 + T\beta T\psi)^2},$$

d. h.

$$dy = d\psi \cdot L \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right) a T\beta}{T\beta^2} \cdot \frac{c^2 + T\psi^2}{(\cot\beta + T\psi)^2}, \quad \text{wo } c^2 = \frac{\left(\frac{\bar{a}}{\alpha}\right) T\beta}{\left(\frac{1}{\alpha}\right) a T\beta}.$$

Durch Auflösung des Logarithmen und Integrirung findet man daher

$$y = \psi L \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right) a T\beta}{(T\beta)^2} + \int d\psi L(c^2 + T\psi^2) - \int d\psi L(\cot\beta + T\psi)^2,$$

und es kann folglich y mit Hülfe der beiden vorigen Aufgaben weiter entwickelt und ganz durch H ausgedrückt werden.

Die Gleichung (1.) für β giebt

$$T\beta = \frac{a^2 - 1 \pm \sqrt{a^4 + 2a^2 C\alpha + 1}}{2a C\alpha},$$

welcher Werth in $\left(\frac{a}{\alpha}\right) T\beta$ und $\left(\frac{1}{\alpha}\right) a T\beta$ gesetzt, einen noch verwickelteren Ausdruck für die Constante der Integral-Gleichung wie c etc. giebt. Ich habe deshalb den Ausdruck derselben durch folgenden trigonometrischen Calcul zu vereinfachen gesucht:

Die Gleichung (1.) kann offenbar so geschrieben werden:

$$\frac{1 - T\beta^2}{2T\beta} = \frac{1 - a^2}{2a C\alpha},$$

und giebt daher, wenn man $a = T\alpha$ setzt,

$$T2\beta = C\alpha \cdot T2\alpha \quad (\text{oder } 2\beta = L C\alpha T2\alpha \text{ etc. } < \pi)$$

woraus $C\alpha = \frac{T2\beta}{T2\alpha}$. Substituirt man dieses in

$$a) \quad \left(\frac{\bar{a}}{\alpha}\right) T\beta \text{ oder } = a^2 - 2a C\alpha T\beta + T\beta^2,$$

so nimmt dieser Ausdruck successive folgende Formen an:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\bar{a}}{\alpha}\right) T\beta &= T\alpha^2 + T\beta^2 - \frac{2T\alpha}{T2\alpha} \cdot T\beta \cdot T2\beta = T\alpha^2 + T\beta^2 - (1 - T\alpha^2) T\beta T2\beta \\ &= T\alpha^2 (1 + T\beta T2\beta) - T\beta (T2\beta - T\beta) \\ &= (T2\beta - T\beta) \left(T\alpha^2 \cdot \frac{1 + T\beta T2\beta}{T2\beta - T\beta} - T\beta \right) \\ &= (T2\beta - T\beta) \left(T\alpha^2 \cdot \frac{1}{T\beta} - T\beta \right) = \frac{(T2\beta - T\beta)(T\alpha^2 - T\beta^2)}{T\beta} \\ &= \frac{S\beta}{C2\beta C\beta T\beta} (T\alpha + T\beta)(T\alpha - T\beta) = \frac{S(a+\beta)S(a-\beta)}{C2\beta \cdot C\alpha^2 C\beta^2} = \left(\frac{\bar{a}}{\alpha}\right) T\beta. \end{aligned}$$

Substituirt man ferner $C\alpha = \frac{T2\beta}{T2\alpha}$ in

$$b) \left(\frac{1}{\alpha} \right) \alpha T\beta = 1 + 2\alpha C\alpha T\beta + \alpha^2 T\beta^2,$$

so erhält man eben so, successive:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \alpha T\beta &= 1 + T\alpha^2 T\beta^2 + \frac{2T\alpha}{T2\alpha} \cdot T\beta T2\beta \\ &= 1 + T\alpha^2 T\beta^2 + (1 - T\alpha^2) T\beta T2\beta = 1 + T\beta T2\beta + T\alpha^2 T\beta (T\beta - T2\beta) \\ &= (T2\beta - T\beta) \left(\frac{1 + T\beta T2\beta}{T2\beta - T\beta} - T\alpha^2 T\beta \right) = \frac{T2\beta - T\beta}{T\beta} (1 - T\alpha^2 T\beta^2) \\ &= \frac{(1 - T\alpha T\beta)(1 + T\alpha T\beta)}{C2\beta} = \frac{C(\alpha + \beta) \cdot C(\alpha - \beta)}{C2\beta \cdot C\alpha^2 C\beta^2} = \left(\frac{1}{\alpha} \right) \alpha T\beta. \end{aligned}$$

Hierdurch wird nun

$$\frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha} \right) T\beta}{\left(\frac{1}{\alpha} \right) \alpha T\beta} = \frac{S(\alpha + \beta) \cdot S(\alpha - \beta)}{C(\alpha + \beta) \cdot C(\alpha - \beta)},$$

und daher

$$c = \sqrt{[T(\alpha + \beta) \cdot T(\alpha - \beta)]}$$

und

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha} \right) \alpha T\beta}{(T\beta)^2} = \frac{C(\alpha + \beta) \cdot C(\alpha - \beta)}{C2\beta \cdot C\alpha^2 \cdot S\beta^2}.$$

Setzt man noch

$$c = T\mathfrak{A}, \text{ und } \frac{T(\varphi + \beta)}{c} = T\gamma,$$

so wird

$$1 - c^2 = \frac{C(\alpha + \beta) \cdot C(\alpha - \beta) - S(\alpha + \beta) \cdot S(\alpha - \beta)}{C(\alpha + \beta) C(\alpha - \beta)} = \frac{C2\alpha}{C(\alpha + \beta) C(\alpha - \beta)} = \frac{2T\mathfrak{A}}{T2\mathfrak{A}}.$$

Nun ist aber nach der zweiten Aufgabe

$$fd\psi L(c^2 + T\psi^2) \text{ oder } fd\psi L(T\mathfrak{A}^2 + T\psi^2)$$

$$= \frac{1}{2} [H(\psi + \gamma) + H(\psi - \gamma)] - H\psi + \psi L \frac{2T\mathfrak{A}}{T2\mathfrak{A}} + \gamma L [T(\frac{1}{2}R + \mathfrak{A})],$$

und nach der ersten Aufgabe

$$fd\psi L(T\psi + T\beta^1)^{-2} = H(\psi + \beta^1) + H(R - \psi) + \psi L(C\beta^1)^2.$$

Also wird, wenn man alles zusammennimmt, indem man $\beta^1 = R - \beta$ (wo $R = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ ist) und $\psi = \varphi + \beta$ setzt:

$$\begin{aligned} \gamma \text{ oder } fd\varphi L(T\alpha^2 + 2C\alpha T\alpha T\varphi + T\varphi^2) &= F_0 \\ &= \frac{1}{2} [H(\varphi + \beta + \gamma) + H(\varphi + \beta - \gamma)] - H(\varphi + \beta) + H[R - (\varphi + \beta)] \\ &\quad + H(R + \varphi) + \gamma L T(\frac{1}{2}R + \mathfrak{A}) + \varphi L \frac{C2\alpha}{C2\beta C\alpha^2} + \text{Const.}, \end{aligned}$$

wozu nur folgende einfache Hülfsleichungen nöthig sind:

$$T2\beta = C\alpha \cdot T2\alpha,$$

$$T\mathfrak{A} = \sqrt{[T(\alpha + \beta) \cdot T(\alpha - \beta)]}$$

und

$$T\gamma = \frac{T(\varphi + \beta)}{T\mathfrak{A}}.$$

Mit Hülfe der Eigenschaften von H kann dieser Integral-Ausdruck noch etwas vereinfacht werden, wie ich weiterhin zeigen werde.

Anmerkung. $\int d\psi L(\alpha^2 - 2\alpha C\alpha T\psi + T\psi^2)$ findet man, wenn man in den vorigen Ausdrücken $\psi = -\varphi$ setzt.

Zusammenstellung.

I. Integration der einfachen logarithmisch-rationalen Differentiale.

1. Wenn

$$\lambda x = \int \frac{dx}{x} L(1+x)$$

$$\alpha + \beta x = u,$$

so ist

$$C^1 = C^a_x =$$

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x} L(\alpha + \beta x) = \frac{1}{\beta} \int \frac{du}{u} \cdot L \frac{\alpha\beta - b\alpha + bu}{\beta},$$

$$\int \frac{du}{u} L(\alpha^2 + bu) = \lambda \frac{bu}{\alpha^2} + \frac{1}{2} L\alpha^2 L u^2,$$

$$\int \frac{du}{u} L(bu - \alpha^2) = \frac{1}{2} [L(bu)]^2 - \lambda \left(\frac{-\alpha^2}{bu} \right),$$

$$\int \frac{du}{u} Lbu = \frac{1}{2} [L(bu)]^2,$$

$$\int \frac{du}{u} L(1 + au^n) = \frac{1}{n} \cdot \lambda(au^n),$$

$$\int \frac{r z^{r-1} dz}{\alpha + \beta z^r} \cdot L(\alpha + \beta z^r) = C^a_{(z^r)}.$$

2. Wenn

$$D^\beta_y = \int \frac{dy}{y} L(1 + 2yC\beta + y^2),$$

$$y = \frac{b + b_1 x}{a},$$

$$a^2 = a^2 b_1^2 - 2ab b_1 C\alpha + b^2,$$

$$C\beta = \frac{ab_1 C\alpha - b}{a},$$

so ist

$$\begin{aligned}
 D^1 &= D_{\frac{a}{b}}^a x \\
 &= \int \frac{dx}{b + b_1 x} L(a^2 + 2axC\alpha + x^2) \\
 &= \frac{1}{b_1} \left(D_y^\beta + \frac{1}{2} L(b + b_1 x)^2 L \frac{a^2}{b_1^2} \right).
 \end{aligned}$$

Besonders zu bemerken ist

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x} L(1 + ax + b^2 x^2) &= D_{bx}^{\frac{a}{2b}}, \\
 \int \frac{dx}{1+x} L(x^2 + T\beta^2) &= D_{-(1+x)C\beta}^\beta - \frac{1}{2} L C \beta^2 L(1+x)^2
 \end{aligned}$$

und wenn $T\beta = \frac{b}{a}$,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dy}{a+y} L(b^2 + y^2) &= D_{-(1+\frac{y}{a})C\beta}^\beta + \frac{1}{2} L \frac{a^2}{C\beta^2} L(a+y)^2, \\
 \int \frac{dy}{\cot \alpha + y} L(1 + y^2) &= D_{-(1+yT\alpha)C\alpha}^a + \frac{1}{2} L s_\alpha^{-2} L(\cot \alpha + y)^2 \\
 &= D_{-(C\alpha + yS\alpha)}^a - \frac{1}{2} L(S\alpha)^2 L(\cot \alpha + y)^2.
 \end{aligned}$$

3. Wenn

$$\begin{aligned}
 A &= a - a_1 b C \beta, \\
 a^2 &= b^2 c_1^2 - 2 b c c_1 C \beta + c^2, \\
 C\alpha &= \frac{b c_1 C \beta - c}{a},
 \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}
 E^1 &= \frac{a}{b} E^c x \\
 \int \frac{(a + a_1 x) dx}{b^2 + 2 b x C \beta + x^2} L(c + c_1 x) &= \frac{a_1}{2} \cdot \frac{b}{b} E^c x + A \cdot \frac{a}{b} E^c x, \\
 1) \frac{b}{b} E^c x &= \int \frac{2(b C \beta + x) dx}{b^2 + 2 b x C \beta + x^2} \cdot L(c + c_1 x) \\
 &= L(c + c_1 x) L \cdot \frac{(b^2 + 2 b x C \beta + x^2) c_1^2}{a^2} - D_{\frac{c + c_1 x}{a}}^a,
 \end{aligned}$$

und wenn

$$\begin{aligned}
 x + b C \beta &= b S \beta \cdot T \phi, \\
 c - b c_1 C \beta &= b c_1 S \beta \cdot T \psi, \\
 H \phi &= \int d \phi L S_\phi^{-2},
 \end{aligned}$$

so ist

$$2) \frac{a}{b} E^c x = \int \frac{dx L(c + c_1 x)}{b^2 + 2 b x C \beta + x^2} = \frac{-1}{2 b S \beta} \left(H(\phi + \psi) + H(R - \phi) + \phi L \frac{C \psi^2}{(b c_1 S \beta)^2} \right).$$

Besonders zu bemerken ist:

Wenn

$$T\alpha = \frac{bc_1}{c},$$

$$a = \frac{c}{C\alpha},$$

$$1) \int \frac{2x dx}{b^2 + x^2} L(c + c_1 x) = L \frac{(b^2 + x^2) c_1^2}{a^2} L(c + c_1 x) - D \frac{\alpha}{c + c_1 x}.$$

Wenn

$$a = T\alpha,$$

$$2) G_y^a = \int \frac{\gamma d\gamma L(1+\gamma)^2}{a^2 + \gamma^2} = L \frac{a^2 + \gamma^2}{a^2 + 1} L(1+\gamma) - D \frac{\alpha}{(1+\gamma) C\alpha}.$$

Wenn

$$\gamma = t\phi,$$

$$t = T\psi,$$

so ist

$$3) \frac{1}{2} F_y^t = \int \frac{d\gamma}{1+\gamma^2} L(t+\gamma) = \int d\phi L(T\phi + T\psi) \\ = -\frac{1}{2} [H(\phi + \psi) + H(R - \phi) + \phi L C \psi^2].$$

Wenn

$$x + C\alpha = S\alpha \cdot T\phi,$$

so ist

$$4) E_y^a = \frac{1}{a} \left(L \frac{\gamma}{a} L a^2 + I \frac{1}{\frac{\gamma}{a}} \right) = \int \frac{d\gamma}{a^2 + \gamma^2} L(1+\gamma)^2,$$

$$E_x^a = \int \frac{dx Lx}{1 + 2x C\alpha + x^2} = -\frac{1}{2S\alpha} [H(\phi + R + \alpha) + H(R - \phi)] = E_{\frac{1}{x}}^a.$$

$$\text{Zusatz 1. } \int_{\infty}^{\circ} dE_x^a = 0; \quad 2) \frac{H\alpha - 2H\frac{1}{2}\alpha}{2S\alpha} = \int_{\frac{1}{x}}^{\circ} dE_x^a.$$

4. Wenn

$$1) x = b(T\phi S\beta - C\beta) = -b \frac{(\phi + \beta)}{C\phi}.$$

$$T\alpha^2 = \frac{c^2 - 2bc C\beta C\gamma + b^2 C\beta^2}{(bS\beta)^2},$$

$$C\alpha = \frac{cC\gamma - bC\beta}{bS\beta T\alpha},$$

$$2) T2b = C\alpha \cdot T2a,$$

$$T\mathfrak{A} = \sqrt{[T(a+b) \cdot T(a-b)]},$$

$$3) T\psi = \frac{T(\phi + b)}{T\mathfrak{A}},$$

so ist

$$\begin{aligned}
 F^1 &= \frac{a}{b} F^c x \\
 &= \int \frac{(a + a_1 x) dx L(c^2 + 2cx C\gamma + x^2)}{b^2 + 2bx C\beta + x^2} = A \cdot \frac{0}{b} F^c x + \frac{1}{2} a_1 \cdot \frac{b}{b} F^c x, \\
 \frac{0}{b} F^c x &= \int \frac{dx L(c^2 + 2cx C\gamma + x^2)}{b^2 + 2bx C\beta + x^2} \\
 &= \frac{1}{b S \beta} \cdot \left\{ \frac{1}{2} [H(\varphi + b + \psi) + H(\varphi + b - \psi) - H 2(\varphi + b)] \right\} \\
 &\quad + H(R + \varphi) + \psi L T(\frac{1}{2} R + \mathfrak{A}) + \varphi L \frac{(b S \beta)^2 C 2 a}{4 C 2 b C a^2} \}
 \end{aligned}$$

Wenn

$$\begin{aligned}
 4) \quad \varphi &= \eta - b, \\
 T\mathfrak{B} &= T b - T\mathfrak{A}, \\
 (x &= \frac{-b C(\varphi + \beta)}{C\varphi} \text{ etc. wie oben}),
 \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}
 \frac{b}{b} F^c x &= \int \frac{2(b C\beta + x) dx \cdot L(c^2 + 2cx C\gamma + x^2)}{b^2 + 2bx C\beta + x^2} \\
 &= 2D_{-(Cb + T\eta S b)} - 2D_{-(1 + T b T\eta) C\mathfrak{B}} - \lambda \frac{-C 2 a C \eta^2}{C(a+b) C(a-b)} \\
 &\quad + L(b^2 + 2bx C\beta + x^2) L \frac{(b S \beta)^2 C(a+b) C(a-b)}{C 2 b C a^2 S b^2} \\
 &\quad + 2 \left[L \left(\frac{C\varphi}{S b} \right) \right]^2 + L(\cot b + T\eta)^2 \cdot L \left(\frac{C\mathfrak{B}^2}{C b^2} \right).
 \end{aligned}$$

Besonders zu bemerken sind:

Für 2),

$$\begin{aligned}
 1) \quad \int d\varphi L(Ta^2 + 2T\varphi Ta C\alpha + T\varphi^2) &= \\
 \text{Const.} + \frac{1}{2} [H(\varphi + b + \psi) + H(\varphi + b - \psi) - H 2(\varphi + b)] & \\
 + H(R + \varphi) + \psi L T(\frac{1}{2} R + \mathfrak{A}) + \varphi L \frac{C 2 a}{4 C 2 b C a^2}. &
 \end{aligned}$$

Für 2) und 4)

$$y = T\varphi = T(\eta - b),$$

$$2) \int \frac{2y dy}{1+y^2} L(Ta^2 + 2y Ta C\alpha + y^2) = \text{Const.}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \left(D_{[(b + T\eta S b)} - D_{-(1 + T\eta T b) C\mathfrak{B}} \right) - \lambda \frac{-C 2 a C \eta^2}{C(a+b) C(a-b)} \\
 &+ L(1 + y^2) L \frac{C a (+b) \cdot C(a-b)}{C 2 b \cdot C a^2 S b^2} + 2 \left[L \left(\frac{C\varphi}{S b} \right) \right]^2 + L \left(\frac{C\varphi}{C\eta C b} \right)^2 L \left(\frac{C\mathfrak{B}^2}{C b^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{2y dy}{1+y^2} L(Ta + y)^2 = -2D_{-(Sa + y Ca)} + L(Ta + y)^2 L(1 + y^2) C a^2.$$

II. Integration der einfachen rationalen Kreisbogen-Differentiale.

Wenn

$$c + c_1 x = u = T\varphi,$$

$$b c_1 - c b_1 = b_1 T\psi,$$

so ist

$$1) \quad \beta = \beta^c x =$$

$$\int \frac{dx}{b + b_1 x} L(c + c_1 x) = \frac{1}{2b_1} [H(\varphi + \psi) + H(R - \varphi) + \varphi L\left(\frac{c_1 C\psi(b + b_1 x)^2}{b_1}\right)].$$

Wenn

$$A = \frac{\alpha - \alpha_1 b C \beta}{b S \beta},$$

so ist

$$2) \quad \gamma = \gamma^c x$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(\alpha + \alpha_1 x) dx}{b^2 + 2bx C\beta + x^2} L(c + c_1 x) \\ &= \left(\frac{1}{2} \alpha_1 L(b^2 + 2bx C\beta + x^2) + AL \frac{x + b C\beta}{b S \beta}\right) Lu \\ &\quad - \int \frac{du}{1 + u^2} \left(\frac{1}{2} \alpha_1 L(b^2 + 2bx C\beta + x^2) + AL \frac{x + b C\beta}{b S \beta}\right). \end{aligned}$$

Es kann aber $b^2 + 2bx C\beta + x^2$ auf die Form $\frac{B^2 + 2bu + C\beta + u^2}{c_1^2}$ gebracht, und daher

$$\int \frac{du}{1 + u^2} L(b + 2bx C\beta + x^2)$$

nach F^1 durch H^1 gefunden werden.

Wenn

$$a = \frac{c_1 b C \beta - c}{c_1 b S \beta},$$

$$a_1 = \frac{1}{c_1 b S \beta},$$

$$u = T\varphi = c + c_1 x,$$

$$T2a = \frac{2aa_1}{1 + a^2 - a_1^2},$$

$$n = aT\alpha - a_1,$$

$$\varphi = \alpha + \psi,$$

so ist

$$\begin{aligned}
 3) \int \frac{du}{1+u^2} L \frac{x+bC\beta}{bS\beta} &= \int \frac{du}{1+u^2} L(a+a_1u) \\
 &= \int d\phi L(a+a_1T\phi) = \int d\phi [L(a-a_1\cot\alpha) + \frac{1}{2}\pi - L n T\psi] \\
 &= -\phi L\left(\frac{1}{n}T\alpha\right) - \int d\psi L(nT\psi) \\
 &= -\phi L\left(\frac{1}{n}T\alpha\right) - \frac{1}{4}\left(D\frac{2\psi}{1-n} + 2\psi^2\right) + \text{Const.} \\
 \text{Cor. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \cdot L(a+a_1u) &= \pi \left[\alpha - L\left(\frac{1}{n}T\alpha\right) \right].
 \end{aligned}$$

Beilage I.

Einfache Art der Zerlegung rationaler Brüche.

1) Wenn der Zähler von höherem Grade als der Nenner ist, nem-
 $m > n$, so ist

$$\frac{\binom{\alpha}{\beta} x}{\binom{\beta}{n} x} \cong \binom{\varepsilon}{m-n} + \frac{\binom{\eta}{n-1} x}{\binom{\beta}{n} x}.$$

2) Wenn der Zähler niedriger als der Nenner oder $m < n$, also
 der bei (1.) zurückbleibende Bruchtheil $\frac{\binom{\eta}{n-1} x}{\binom{\beta}{n} x}$, wo $m = n - 1$, zu zer-
 legen ist, so geschieht dieses

a) in eine Summe von einzelnen Brüchen wie $\frac{a_r}{x-b_r}$, deren Nen-
 ner wie $x-b_r$ einfache Factoren des gegebenen Nenners $\binom{\beta}{n} x$ sind, wel-
 cher also in

$$(x-b_1)(x-b_2) \dots (x-b_r^1) \dots (x-b_n^1)$$

aufgelöst werden muß, und deren Zähler a_r ist, oder $= \frac{\binom{\eta}{m} b_r}{\binom{d\beta}{n} b_r}$, d. h.

diejenige GröÙe, in welche $\frac{\binom{\eta}{m} x}{\binom{d\beta}{n} x}$ oder $\frac{\binom{\eta}{m} x(x-b_r)}{\binom{\beta}{n} x}$ übergeht, wenn

man $x = b_r$ setzt, wo $\binom{\beta}{n} x = \frac{\binom{\beta}{n} x}{x-b_r}$ gleich dem Producte der übrige-
 gen Factoren des Nenners außer $x-b_r$ ist.

b) Hat dagegen der Nenner mehrere gleiche Factoren, z. B. wie $(x-b)^r$, so geschieht die Zerlegung am einfachsten nach einer von Hr. Magister Berlin hieselbst, in einer academischen Abhandlung (*de compositione fractionum rationalium*, Lund. 1824.) dargestellten Methode, die hauptsächlich darin besteht, $y+b$ statt x zu substituiren, wodurch der gegebene Bruch

$$\frac{\binom{n}{m} x}{\binom{\beta}{n} x} \text{ oder } \frac{\binom{n}{m} (b+y)}{\binom{\beta}{n} (b+y)},$$

nach geschehener Entwicklung, auf die Form $\frac{\binom{a}{m} y}{y^r \binom{c}{n-r} y}$ gebracht wird, welche sich leicht in

$$\frac{\left(\frac{a}{c}\right)_0}{y^r} + \frac{\left(\frac{a}{c}\right)_1}{y^{r-1}} + \frac{\left(\frac{a}{c}\right)_2}{y^{r-2}} + \frac{\left(\frac{a}{c}\right)_{r-1}}{y} + \frac{P^1}{\binom{c}{n-r} y}$$

zerlegen läßt, wenn man bloß $\binom{c}{n-r} y$ in $\binom{a}{m} y$ dividirt, doch so, daß man von den niedrigeren Potenzen von y anfängt, und also einen Quotienten von der Form

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{c}\right)_0 + \left(\frac{a}{c}\right)_1 \cdot y + \left(\frac{a}{c}\right)_2 \cdot y^2 + \dots &= \frac{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots}{c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots} \\ &= \frac{a_0}{c_0} + \frac{a_1 c_0 + a_0 c_1}{c_0^2} y + \dots \end{aligned}$$

bekommt. [Man kann auch, statt mit $c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots$ zu dividiren, mit $\frac{1}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} y + \left(\frac{c_1^2}{c_0^3} - \frac{c_2}{c_0^2}\right) y^2 - \left(\frac{c_1^3}{c_0^3} - \frac{2c_1 c_2}{c_0^3} + \frac{c_3}{c_0^3}\right) y^3 + \dots$ multipliciren. Alsdann sind die Coefficienten, nach Arbogast, die successiven Derivationen von c_0^{-1} .]

c) Hat endlich der Nenner einfache, imaginaire, oder positive quadratische Factoren, sie mögen ungleich oder gleich sein, wie $\left[\left(\frac{a}{\alpha}\right) y\right]^r$ oder $(y^2 + 2a y C + a^2)^r$, so setzt man $x + aC = x$ oder $y = x - aC$, wodurch der Factor $(x^2 + a^2 C^2)^r = (x^2 + e^2)^r$ wird, wenn $e = aSa$. Der Zähler T , nebst dem Producte der übrigen Factoren des Nenners P , werden Functionen von x . In diesem letzteren P werden nun die Glieder mit geraden und mit ungeraden Exponenten abgesondert, so daß es aus einer geraden Function $= F(x^2)$ und einer ungeraden $= x.G(x^2)$ besteht,

wie $P = F(x^2) + x \cdot G(x^2) = Px$. Für ein negatives x ist $F(x^2) - xG(x^2) = P(-x)$. Hiermit wird sowohl der Zähler als der Nenner multiplicirt. Dann wird der neue Nenner eine gerade Function $= (x^2 + e^2)^r \cdot N(x^2)$, wenn man der Kürze wegen $N(x^2) = [F(x^2)]^2 - x^2 [G(x^2)]^2$ setzt, und der neue Zähler kann durch Vereinigung aller geraden Potenzen [in $= H(x^2)$] und aller ungeraden [in $= xI(x^2)$], unter die Form $H(x^2) + xI(x^2)$ gebracht werden; so dafs man jetzt blofs

$$\frac{H(x^2)}{(x^2 + e^2)^r \cdot N(x^2)} \text{ und } \frac{I(x^2)}{(x^2 + e^2)^r \cdot N(x^2)},$$

jedes für sich, zu zerlegen hat, welches auf die obige Art leicht geschieht (nemlich dadurch, dafs $x^2 + e^2 = z$ gesetzt, und nach geschehener Entwicklung gehörig dividirt wird u. s. w.).

Auf diese Weise erhält man:

$$\frac{H(x^2)}{(x^2 + e^2)^r \cdot N(x^2)} \approx \frac{A}{(x^2 + e^2)^r} + \frac{A_1}{(x^2 + e^2)^{r-1}} + \text{etc.}$$

und

$$\frac{I(x^2)}{(x^2 + e^2)^r \cdot N(x^2)} \approx \frac{B}{(x^2 + e^2)^r} + \frac{B_1}{(x^2 + e^2)^{r-1}} + \text{etc.},$$

und folglich

$$\frac{\left(\frac{y}{m}\right)y}{(y^2 + 2ayC + a^2)^r \cdot P} = \frac{H(x^2) + xI(x^2)}{(x^2 + e^2)^r \cdot N(x^2)} = \frac{A + Bx}{(x^2 + e^2)^r} + \frac{A_1 + B_1x}{(x^2 + e^2)^{r-1}} + \text{etc.}$$

Dieses allgemeine Verfahren kann, wie leicht zu sehen, noch vereinfacht werden. Wenn man z. B. blofs den Nenner zu einer gegebenen Potenz eines der Factoren des Nenners sucht, so braucht man nur die Substitution und Division bis zum Grade des Exponenten, oder bis zum nächst niedrigeren fortzusetzen etc., welches weitere Detail ich übergehe.

Allgemeine Beispiele. 1.

$$\frac{a + \alpha y}{(1 + y)(b + \beta y^2)} \text{ in } \frac{A}{(1 + y)} + \frac{B + Cy}{b + \beta y^2}$$

zu zerlegen.

Auflösung. Setzt man -1 anstatt y in $\frac{a + \alpha y}{b + \beta y^2}$, so ergibt sich

$$A = \frac{a - \alpha}{b + \beta}.$$

Um B und C zu finden, multiplicire man $\frac{a + \alpha y}{1 + y}$ mit $\frac{1 - y}{1 - y}$, welches $\frac{a - \alpha y^2 + (\alpha - a)y}{1 - y^2}$ giebt. Setzt man hierin $-\frac{b}{\beta}$ statt y^2 (nicht statt y), so erhält man:

$$\frac{a + \alpha \frac{b}{\beta}}{1 + \frac{b}{\beta}} + y \cdot \frac{\alpha - a}{1 + \frac{b}{\beta}} = \frac{a\beta + b\alpha}{b + \beta} + y \cdot \frac{(\alpha - a)\beta}{b + \beta},$$

welches der gesuchte Zähler $B + Cy$ ist. Es ist also

$$\frac{a + \alpha y}{(1 + y)(b + \beta y^2)} = \frac{1}{b + \beta} \cdot \left(\frac{\alpha - a}{1 + y} + \frac{a\beta + b\alpha + y\beta(\alpha - a)}{b + \beta y^2} \right).$$

Anmerkung. 1. Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist leicht einzusehen, wenn man in dem verwandelten Bruche z anstatt y setzt, wodurch er in

$$\frac{a - \alpha z}{(1 - z)(b + \beta z)} + y \cdot \frac{\alpha - a}{(1 - z)(b + \beta z)}$$

übergeht, wo jedes Glied offenbar als rationale Function von z mit lineären Factoren im Nenner, zerlegt werden kann. Der Zähler zu $b + \beta z$ wird nach der gewöhnlichen Regel

$$= \frac{a + \alpha \frac{b}{\beta}}{1 + \frac{b}{\beta}} + y \cdot \frac{\alpha - a}{1 + \frac{b}{\beta}}$$

gefunden.

Anmerkung. 2. Die Regel kann auch so ausgedrückt werden.

Nachdem durch gehörige Substitution der quadratische Factor auf die Form $(x^2 + ez)^r$ gebracht worden, wird in dem Producte der übrigen Factoren $-x$ statt $+x$ gesetzt, und mit dem Resultate werden Zähler und Nenner multiplicirt; hierauf wird $x^2 + e^2 = z$ gesetzt und von z^0 an dividirt.

Ein nicht zu übersehender Vorthail bestehet darin, daß man den Nenner nicht im Voraus zu entwickeln braucht, sondern ihn als Product beibehalten und die Substitution in z gleichwohl bewerkstelligen kann. Dann werden bloß die niedrigeren Potenzen von z , wie z^0 , z^1 , z^2 entwickelt, nemlich höchstens bis zum Grade des fraglichen Factors, oder Eins weniger. Hierauf wird auch nur eben so weit dividirt.

Bisweilen kann es vortheilhaft sein, statt der gewöhnlichen Entwicklung und Division eine logarithmische anzuwenden, besonders wenn die Zahl der Factoren im Nenner und deren Exponenten ziemlich groß sind, außer dem des fraglichen Factors, welcher z. B. $=$ oder < 3 ist.

Aufgabe 2.

$$y = \frac{1 + 2x + 3x^2}{(4 + x^2)^2 \cdot (1 + x)^2 \cdot (2 + x)} = \frac{A + Bx}{(4 + x^2)^2} + \frac{A_1 + B_1x}{4 + x^2} + \frac{T}{(1 + x)^2 \cdot (2 + x)}.$$

Erste Auflösung. Man setze $x^2 + 4 = z$, also $x^2 = z - 4$, und multiplicire Zähler und Nenner mit

$$(1 - x)^2 \cdot (2 - x) = 2 - 5 \cdot x + 4x^2 - x^3 [= P(-x)],$$

so erhält man:

$$y = \frac{2 + 10x^4 - x(1 + 8x^2 + 3x^4)}{z^2 \cdot (5 - z)^2 (8 - z)},$$

oder, nach geschעהener Substitution:

$$y = \frac{16z - 8z + 6z^2 - x(17 - 16z + az^2)}{z^2(200 - 105z + 6z^2 + \dots)}.$$

Dividirt man nun mit $200 - 105z + \dots$ in $162 - 8z + \dots$, so erhält man:

$$\frac{81}{100} + \frac{101}{4000}z + \dots, \text{ oder } A + A_1z + \dots$$

Dividirt man mit $200 - 105z + \dots$ in $17 - 16z + \dots$, so erhält man:

$$\frac{17}{200} - \frac{283}{8000}z + \dots, \text{ oder } B + B_1z + \dots$$

Es ist daher

$$y = \frac{162 - 17x}{200(x^2 + 4)^2} + \frac{5,05 + 7,075x}{200(x^2 + 4)} + \frac{T}{P}.$$

Zweite Auflösung. Man bringe den gegebenen Zähler nebst $P(-x)$ unter die Form $p + xq$ und $p_1 + xq_1$, so daß p und q nur x^2 , und daher nach geschעהener Substitution ($x^2 = z - e^2$) nur z enthalten. Der neue Zähler wird dadurch nach geschעהener Entwicklung

$$pp_1 + x^2qq_1 + x(qp_1 + pq_1) = pp_1 + (z - e^2)qq_1 + x(qp_1 + pq_1),$$

oder

$$= a + a_1z + \dots + x(b + b_1z + \dots)$$

und in dem Beispiele

$$= (-14 + 4z - x(1 + z)(-11 + 3z + 2x))$$

$$= 162 - 8z + \dots - x(17 - 16z + \dots).$$

Statt der Entwicklung und der Division bedienen wir uns nun der Logarithmen. Wenn nemlich

$$L(a + a_1z + a_2z^2) = b + b_1z + b_2z^2 + \dots$$

ist, so ist

$$b = La \text{ oder } a = e^b; \quad a_1 = ab; \quad a_2 = a(b_2 + \frac{1}{2}b_1^2) \text{ etc.}$$

Hier ist

$$y_1 = \frac{162 - 80z}{z^2(5 - z)^2(8 - z)},$$

folglich

$$\begin{aligned} L(y_1 \cdot z^2) &= \left\{ \begin{array}{l} L162 - \frac{80}{100}z + \\ -L5^2 + \frac{2}{5}z + \\ -L8 + \frac{1}{8}z + \end{array} \right\} \\ &= L \frac{162}{8 \cdot 25} + \frac{101}{3240}z = L \left(\frac{81}{100} + \frac{101}{3240} \cdot \frac{81}{100}z + \right); \end{aligned}$$

folglich

$$y_1 \cdot z^2 = \frac{81}{100} + \frac{101}{4000}z + \dots =$$

dem Quotienten, der sich auf diese Weise durch eine einfachere Rechnung findet als vorhin. Eben so wird

$$L(y_2 \cdot z^2) = L \frac{17-16z}{(5-z)^2(8-z)} = L\left(\frac{7}{250} - \frac{283}{8000}z + \dots\right),$$

und daher

$$y = y_1 - xy_2 = \frac{162-17x}{200z^2} + \frac{202+283x}{8000z} + \frac{T}{P}.$$

Beilage II.

Ein Bogen, dessen Tangente eine rationale Function ist, kann in eine Summe mehrerer Bogen, deren Tangenten ganze rationale Functionen vom ersten Grade sind, aufgelöst werden; d. h. es ist

$$\mathcal{L} \left(\frac{\binom{c}{r} x}{\binom{b}{n} x} \right) = \Sigma \mathcal{L}(a + a_1 x).$$

1. Die höchste Zahl der Grade im Zähler kann immer geringer gemacht werden als die des Nenners.

a) Ist $r < n$, so ist es von selbst der Fall.

b) Ist $r > n$, so ist

$$\mathcal{L} \left(\frac{\binom{c}{r} x}{\binom{b}{n} x} \right) = \frac{1}{2} \pi - \mathcal{L} \left(\frac{\binom{b}{n} x}{\binom{c}{r} x} \right).$$

c) Ist endlich $r = n$, so gelangt man dazu auf folgende Weise:

Durch Division bekommt man

$$\frac{\binom{c}{n} x}{\binom{b}{n} x} = \frac{c \frac{1}{n}}{b \frac{1}{n}} + \frac{\binom{c}{n-1} x}{\binom{b}{n} x},$$

$$\text{wo } c_r^1 = \frac{c_n^1}{b_n^1} \cdot b_r^1 + e_r^1.$$

Nun ist aber.

$$\mathcal{L} R - \mathcal{L} S = \mathcal{L} \frac{R-S}{1+RS},$$

und daher, wenn man $R = \frac{\binom{c}{n} x}{\binom{b}{n} x}$, $S = \frac{c_n^1}{b_n^1}$ nimmt:

$$\mathcal{L} \frac{\binom{c}{n} x}{\binom{b}{n} x} = \mathcal{L} \frac{c_n^1}{b_n^1} + \mathcal{L} \frac{\binom{c}{n} x \cdot b_n^1 - \binom{b}{n} x \cdot c_n^1}{b_n^1 \binom{b}{n} x + c_n^1 \binom{c}{n} x},$$

wo der Zähler, wie leicht zu sehen, nur einen Grad niedriger ist als der Nenner, nemlich vom $(n-1)$ ten Grade, während der Nenner auf den n ten Grad steigt, und für reelle Coefficienten auch nie niedriger werden kann, weil

$$b_n^1 \cdot b_n^1 + c_n^1 \cdot c_n^1$$

nicht gleich Null werden kann.

Beispiel.

$$\mathcal{L} \frac{\binom{c}{2} x}{\binom{b}{2} x} \text{ oder } \mathcal{L} \frac{c + c_1 x + c_2 x^2}{b + b_1 x + b_2 x^2}.$$

Auflösung. Es ist

$$\frac{\binom{c}{2} x}{\binom{b}{2} x} = \frac{c_2}{b_2} + \frac{e + e_1 x}{\binom{b}{2} x},$$

wo $e = c - \frac{c_2}{b_2} b$ und $e_1 = c_1 - \frac{c_2}{b_2} b_1$; folglich wird

$$\mathcal{L} \frac{\binom{c}{2} x}{\binom{b}{2} x} = \mathcal{L} \frac{c_2}{b_2} + \mathcal{L} \frac{\binom{e}{1} x}{\binom{\varepsilon}{2} x},$$

wenn der Kürze wegen $\varepsilon_r^1 = b_r^1 + \frac{c_2}{b_2} c_r^1$, d. h. $\varepsilon = b + \frac{c_2}{b_2} c$, $\varepsilon_1 = b_1 + \frac{c_2}{b_2} c_1$, und $\varepsilon_2 = b_2 + \frac{c_2}{b_2} c_2 = \frac{b_2^2 + c_2^2}{b_2}$ gesetzt wird, welches wie man sieht, nicht gleich Null ist.

Oder auch $e_r^1 = b_2 c_r^1 - c_2 b_r^1$ und $\varepsilon_r^1 = b_r^1 + c_2 c_r^1$, wenn man mit b_2 abkürzt, da $\varepsilon_2 = b_2^2 + c_2^2$ und daher niemals $= 0$ ist.

2. Nachdem man dem Zähler nach (1.) einen geringeren Grad als den des Nenners gegeben hat, nemlich $r < n$, so geschieht die Zer-

legung von $\mathcal{L} \frac{\binom{a}{r} x}{\binom{b}{r} x}$, oder kürzer von $\mathcal{L} \frac{\binom{a}{r}}{\binom{b}{r}}$ (d. h. $\mathcal{L}$ in einen eigentlichen

Bruch) am einfachsten auf folgende Weise: Der Kürze wegen sei $dp = \frac{dp}{dx}$, wie bei Arbogast.

Weil

$$d\mathcal{L} \frac{\binom{a}{r}}{\binom{b}{r}} = \frac{(b) d(a) - (a) d(b)}{(a)^2 + (b)^2}$$

ein rationaler Bruch ist, so kann er als solcher aufgelöst werden. Da aber der Ausdruck $(a)^2 + (b)^2$, oder $\left[\binom{a}{r}x\right]^2 + \left[\binom{b}{n}x\right]^2$ immer positiv ist, so kann er durch keinen reellen Werth von x zu 0 gemacht werden, und hat deshalb bloß quadratische Factoren. Setzt man daher einen von diesen $= (x + \beta)^2 + \alpha^2 = (x + \beta + i\alpha)(x + \beta - i\alpha)$ (wo $i^2 = -1$), so muß einer der imaginären Factoren in diesem Factor einem der imaginären Factoren des vorigen gleich sein, z. B. $x + \beta + i\alpha$ in $(b) + i(a)$, während offenbar der andere $x + \beta - i\alpha$ ein Factor in $(b) - i(a)$ wird, wenn man das Zeichen von i verwechselt.

Anstatt nun gleich den ganzen Ausdruck

$$\frac{(b)d(a) - (a)d(b)}{(a)^2 + (b)^2}$$

zu zerlegen, verrichte man erst diese partielle Zerlegung:

$$\frac{(b)d(a) - (a)d(b)}{(a)^2 + (b)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{d(a) - id(b)}{(b) + i(a)} + \frac{d(a) + id(b)}{(b) - i(a)} \right),$$

deren Richtigkeit leicht durch wirkliche Addition in dem Gliede rechts

erhellet (Es ist nemlich: $\frac{1-y}{1+x} + \frac{1+y}{1-x} = 2 \cdot \frac{1+xy}{1-x^2}$). Man darf nun bloß

diese niedrigeren Brüche auflösen, nemlich $\frac{d(a) - id(b)}{(b) + i(a)}$ und $\frac{d(a) + id(b)}{(b) - i(a)}$,

oder bloß den einen, da sich die Auflösung des anderen durch Umkehrung des Zeichens von i ergibt. Weil aber nun $x + \beta + i\alpha$ einer der

Factoren in $(b) + i(a)$ ist, so ist $\frac{A}{x + \beta + i\alpha}$ einer der partiellen Brüche,

aus welchen $\frac{d(a) - id(b)}{(b) + i(a)}$ besteht, und $A = \frac{d(a) - id(b)}{d[(b) + i(a)]} = \frac{d(a) - id(b)}{d(b) - id(a)}$

$= -i$. Wenn also das Zeichen in i geändert wird, so ist ferner

$\frac{+i}{x + \beta - i\alpha}$ einer der partiellen Brüche, welche zusammen $\frac{d(a) + id(b)}{(b) - i(a)}$

ausmachen. Die halbe Summe

$$\frac{1}{2} \left(\frac{i}{x + \beta - i\alpha} - \frac{i}{x + \beta + i\alpha} \right) = \frac{-\alpha}{(x + \beta)^2 + \alpha^2},$$

ist also einer der partiellen Brüche in

$$\frac{(b)d(a) - (a)d(b)}{(b)^2 + (a)^2}.$$

Auf diese Art wird bewiesen, daß wenn die übrigen Factoren in $(b)^2 + (a)^2$ oder $\left[\binom{b}{n}x\right]^2 + \left[\binom{a}{r}x\right]^2$, $(x + \beta_1)^2 + \alpha_1^2$, $(x + \beta_2)^2 + \alpha_2^2$ etc.

sind, daß alsdann $\frac{-\alpha_1}{(x+\beta_1)^2+\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2}{(x+\beta_2)^2+\alpha_2^2}$ etc., zu den partiellen Brüchen gehören, in welche $\frac{(b)d(a)-(a)d(b)}{(b)^2+(a)^2}$ zerlegt wird, so daß dieser letztere Ausdruck,

$$dJ \frac{(a)}{(b)} = -\frac{\alpha}{(x+\beta)^2+\alpha^2} - \frac{\alpha_1}{(x+\beta_1)^2+\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2}{(x+\beta_2)^2+\alpha_2^2} - \text{etc.}$$

ist, folglich ist wenn man integrirt:

$$J \frac{(a)}{(b)} = J \frac{\alpha}{x+\beta} + J \frac{\alpha_1}{x+\beta_1} + J \frac{\alpha_2}{x+\beta_2} + \text{etc.} + \text{Const.} = J \left(\frac{(a_r)x}{(b_n)x} \right).$$

Es ist noch übrig die Constante C zu bestimmen, welches dadurch geschehen könnte, daß man $x=0$ setzte, so daß

$$J \frac{\alpha}{b} = C + J \frac{\alpha}{\beta} + J \frac{\alpha_1}{\beta_1} + J \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots$$

wäre. Sie wird aber leichter gefunden, wenn man

$$J \frac{\alpha}{x+\beta} + J \frac{\alpha_1}{x+\beta_1} + \dots$$

successive addirt. Man sieht leicht, daß die Summe von der Form:

$$J \frac{\binom{A}{n-1}x}{\binom{B}{n}x}$$

ist, denn man erhält successive

$$J \frac{\alpha}{x+\beta} + J \frac{\alpha_1}{x+\beta_1} = J \frac{\alpha(x+\beta_1) + \alpha_1(x+\beta)}{(x+\beta)(x+\beta_1) - \alpha\alpha_1} \approx J \frac{\binom{A}{1}x}{\binom{B}{1}x},$$

und allgemein:

$$J \frac{\binom{A}{n-1}x}{\binom{B}{n}x} + J \frac{\alpha}{x+\beta} = J \frac{\binom{A}{n-1}x \cdot (x+\beta) + \alpha \binom{B}{n}x}{\binom{B}{n}x(x+\beta) - \alpha \binom{A}{n-1}x} \approx J \frac{\binom{A}{n}x}{\binom{B}{n+1}x}.$$

Folglich ist der Zähler um einen Grad niedriger als der Nenner, und deshalb wird, wenn man $C = Jc$ setzt,

$$J \left(\frac{\binom{A}{r}x}{\binom{B}{n}x} \right) = Jc + J \left(\frac{\binom{A}{n-1}x}{\binom{B}{n}x} \right) = J \frac{c \binom{B}{n}x + \binom{A}{n-1}x}{\binom{B}{n}x - c \binom{A}{n-1}x},$$

folglich

$$\binom{A}{n}x = \binom{B}{n}x - c \binom{A}{n-1}x, \text{ und } \binom{A}{r}x = c \binom{B}{n}x + \binom{A}{n-1}x \approx \binom{A}{n}x,$$

welches (weil $r < n$) unmöglich ist, wenn nicht $c=0=TC$, und folglich $C = m\pi$ ist.

Wir haben daher folgenden Lehrsatz:

Wenn

$$(b) + i(a)x = (x + \beta_1 + i\alpha_1)(x + \beta_2 + i\alpha_2) \dots,$$

so ist

$$\mathcal{L} \frac{(a)x}{(b)x} = \mathcal{L} \frac{\alpha_1}{x + \beta_1} + \mathcal{L} \frac{\alpha_2}{x + \beta_2} + \dots \pm m\pi,$$

wenn für m eine solche ganze Zahl genommen wird, daß beiderseits ungefähr gleich viele halbe Umfänge sind.

Zugleich haben wir folgende Summe:

$$\mathcal{L} \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \mathcal{L} \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots + \mathcal{L} \frac{\alpha_n^1}{\beta_n^1} = \mathcal{L} \frac{a}{b} + m\pi,$$

wo

$$\begin{aligned} & [(x + \beta_1)^2 + \alpha_1^2] [(x + \beta_2)^2 + \alpha_2^2] \dots [(x + \beta_n^1)^2 + \alpha_n^1]^2 \\ &= \left[\binom{a}{n-1} x \right]^2 + \left[\binom{b}{n} x \right]^2 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Beispiel 1. $\mathcal{L} \frac{aSa}{1+aCa}$ oder $\mathcal{L} \frac{2at}{1+a+(1-a)t^2}$, wenn $t = T^{\frac{1}{2}}\alpha$.

Auflösung. Man setze

$$(1-a)t^2 + 1 + a + 2at.i = 0,$$

so ist

$$t = \frac{-\alpha i + i}{1-a},$$

d. h. t entweder $+1.i$ oder $-\frac{1+a}{1-a}.i$, daher

$$\mathcal{L} \frac{aSa}{1+aCa} = \mathcal{L} \frac{-1}{t} + \mathcal{L} \frac{1+a}{(1-a)t} = \mathcal{L} t - \mathcal{L} \frac{1-a}{1+a} t = \frac{1}{2}\alpha - \mathcal{L} \left(\frac{1-a}{1+a} T^{\frac{1}{2}}\alpha \right).$$

Zusatz. $\mathcal{L}R(S\alpha_1 C\alpha)$ kann auf gleiche Weise aufgelöst werden, da dieser Ausdruck offenbar auf $\mathcal{L}^1 R(T^{\frac{1}{2}}\alpha)$ zurückgeführt werden kann.

Beilage III.

x	$-\lambda(-x)$	x	$-\lambda(-x)$
1	1,644 934' 066 848'	0	0
0,9	1,299 714' 721 991'	0,1	0,102 617' 791 099'
$\frac{3}{4}$	0,978 469' 393 026'	$\frac{1}{4}$	0,267 652' 639 020'
$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	0,755 395' 619 093'	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	0,426 408' 805 724'
0,5	0,582 240' 526 465'	0,5	$\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}(L2)^2$

x	λx	x	λx
0	0	∞	∞
0,1	0,097 605' 235 229'	100	12,241 081' 518 111'
$\frac{1}{8}$	0,121 296' 628 923'	10	4,198 859' 487 058'
$\frac{1}{4}$	0,235 900' 297 680'	8	3,685 676' 000 552'
$\frac{1}{3}$	0,309 033' 126 451'	4	2,369 939' 797 102'
$\frac{1}{2}$	0,448 414' 206 956'	3	1,939 375' 420 869'
$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	0,542 191' 216 451'	2	1,436 746' 366 850'
1	0,822 467' 033 424'	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	1,218 525' 260 686'
		1	$\frac{1}{12}\pi^2$

ϕ	$H\phi$
0	0
$\frac{1}{12}\pi$	1,227 310' 146 118'
$\frac{2}{12}\pi$	1,740 803' 636 564'
$\frac{3}{12}\pi$	2,004 758' 639 330'
$\frac{4}{12}\pi$	2,128 351' 797 844'
$\frac{5}{12}\pi$	2,171 563' 403 089'
$\frac{1}{2}\pi$	2,177 586' 090 303' 584 130''
$\frac{1}{2}\pi + \psi$	$H\pi - H(\frac{1}{2}\pi - \psi)$
π	4,355 172' 180 607' = $\pi L4$.

14.

Recherches sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. N. H. *Abel*.)

(Suite du mémoire Nr. 12. tom. II. cah. 2. de ce journal *).

§. VIII.

Expression algébrique de la fonction $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ dans le cas,
ou $e=c=1$. Application à la lemniscate.

34.

Dans le cinquième paragraphe nous avons traité l'équation $P_n=0$, d'où dépend la détermination des fonctions $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\omega i}{n}\right)$. Cette équation, prise dans toute sa généralité, ne paroît guère résoluble algébriquement pour des valeurs quelconques de e et c ; mais néanmoins il y a des cas particuliers, où on peut la résoudre complètement, et par suite obtenir des expressions algébriques des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\omega i}{n}\right)$ en fonctions de e et c . C'est ce qui arrive toujours, si $\varphi\left(\frac{\omega i}{n}\right)$ peuvent être exprimés rationnellement par $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous ces cas l'équation $P_n=0$ peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'exposerai cette méthode dans un mémoire séparé, et je me contenterai pour le moment à considérer le cas le plus simple, et qui résulte de la supposition $e=c=1$ et $n=4\nu+1$. Dans ce cas on aura

$$208. \quad \begin{cases} \alpha = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} & \text{où } x = \varphi x, \\ f\alpha = \sqrt{1-\varphi^2\alpha}; & F\alpha = \sqrt{1+\varphi^2\alpha}. \end{cases}$$

De même

$$209. \quad \varphi(\alpha i) = i \cdot \varphi\alpha,$$

ce qui se fait voir, en mettant αi au lieu de i . Cette formule donne ensuite:

$$210. \quad f(\alpha i) = F\alpha; \quad F(\alpha i) = f\alpha.$$

*) L'auteur a fait parvenir cette continuation au rédacteur sous le date de 12. Février 1828.

Ces deux quantités e et c étant égales entres elles, il est clair, qu'il en sera de même de deux quantités que nous avons désignées par ω et ϖ . En effet on aura

$$211. \quad \frac{\omega}{2} = \frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{V(1-x^4)}.$$

35.

En posant dans les formules (10.) βi au lieu de β , on en tirera, en ayant égard aux équations 209. et 210.:

$$212. \quad \begin{cases} \varphi(\alpha + \beta i) = \frac{\varphi\alpha.f\beta.F\beta + i.\varphi\beta.f\alpha.F\alpha}{1 - \varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}, \\ f(\alpha + \beta i) = \frac{f\alpha.F\beta - i.\varphi\alpha.\varphi\beta.F\alpha.f\beta}{1 - \varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}, \\ F(\alpha + \beta i) = \frac{F\alpha.f\beta + i.\varphi\alpha.\varphi\beta.f\alpha.F\beta}{1 - \varphi^2\alpha.\varphi^2\beta}. \end{cases}$$

Donc, pour trouver les fonctions φ , f , F pour une valeur quelconque imaginaire de la variable, il suffira d'en connoître les valeurs pour des valeurs réelles.

En supposant $\alpha = m\delta$, $\beta = \mu\delta$, on voit que $\varphi(m + \mu i)\delta$; $f(m + \mu i)\delta$; $F(m + \mu i)\delta$ pourront être exprimés rationnellement par les six fontions suivantes:

$$\begin{aligned} &\varphi(m\delta), \quad \varphi(\mu\delta), \quad f(m\delta), \\ &f(\mu\delta), \quad F(m\delta), \quad F(\mu\delta) \end{aligned}$$

et par suite aussi par des fonctions rationnelles des trois fonctions $\varphi\delta$, $f\delta$, $F\delta$; si m et μ sont des nombres entiers.

En suivant ce développement, on voit également et sans peine que dans le cas, où $m + \mu$ est un nombre impair, on aura:

$$\varphi(m + \mu i)\delta = \varphi(\delta).T,$$

où T est une fonction rationnelle de $(\varphi\delta)^2$, $(f\delta)^2$, $(F\delta)^2$, c'est-à-dire de $(\varphi\delta)^2$.

Donc en faisant $\varphi\delta = x$, on aura

$$\varphi(m + \mu i)\delta = x.\psi(x^2).$$

En changeant δ en δi , $\varphi\delta$ se changera en $\varphi(\delta i) = i\varphi(\delta) = ix$, et la fonction $\varphi(m + \mu i)\delta$ en $i\varphi(m + \mu i)\delta$; donc:

$$\varphi(m + \mu i)\delta = x.\psi(-x^2);$$

par conséquent on doit avoir $\psi(-x^2) = \psi(x^2)$; ce qui fait voir que la fonction $\psi(x^2)$ ne contient que des puissances de la forme x^{4n} . Donc on aura

$$213. \quad \varphi(m + \mu i)\delta = x.T,$$

ou T est une fonction rationnelle de x^4 .

Cherchons p. ex. l'expression de $\varphi(2+i)\delta$ en x .

On a d'après les formules (212.), en faisant $\alpha = 2\delta$ et $\beta = \delta$:

$$\varphi(2+i)\delta = \frac{\varphi 2\delta . f\delta . F\delta + i\varphi \delta . f2\delta . F2\delta}{1 - (\varphi^2 \delta)^2 . \varphi^2 \delta}.$$

Or (10.) donne:

$$\begin{aligned}\varphi(2\delta) &= \frac{2\varphi \delta . f\delta . F\delta}{1 + (\varphi \delta)^4}; & f(2\delta) &= \frac{(f\delta)^2 - (\varphi \delta)^2 . (F\delta)^2}{1 + (\varphi \delta)^4}; \\ F(2\delta) &= \frac{(F\delta)^2 + (\varphi \delta)^2 . (f\delta)^2}{1 + (\varphi \delta)^4};\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en remarquant que $\varphi \delta = x$, $f\delta = \sqrt{1-x^2}$ et $F\delta = \sqrt{1+x^2}$,

$$\varphi(2\delta) = \frac{2x \cdot \sqrt{1-x^4}}{1+x^4}; \quad f(2\delta) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4}; \quad F(2\delta) = \frac{1-2x^2-x^4}{1+x^4}.$$

Substituant ces valeurs et réduisant, il viendra:

$$215. \quad \varphi(2+i)\delta = x \cdot \frac{2-2x^8+i(1-6x^4+x^8)}{1-2x^4+5x^8} = xi \cdot \frac{1-2i-x^4}{1-(1-2i)x^4}.$$

Expression algébrique de $\varphi\left(\frac{\omega}{4v+1}\right)$.

36.

On peut, comme on sait, décomposer le nombre $4v+1$ en deux carrés. Donc on peut supposer

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4v+1 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i).$$

Nous chercherons d'abord la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right)$; car celle-ci étant trouvée, on en tirera facilement la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4v+1}\right)$.

La somme des deux carrés α^2 et β^2 étant impaire, l'un des nombres α et β sera pair et l'autre impair. Donc la somme $\alpha + \beta$ est impaire. Donc en vertu de 113., on aura

$$216. \quad \varphi(\alpha + \beta i)\delta = x \cdot \frac{T}{S},$$

où T et S sont des fonctions entières de $x^4 = (\varphi \delta)^2$.

En supposant $\delta = \frac{\omega}{\alpha + \beta i}$, le premier membre de 216. se réduit à zéro, et par conséquent $x = \varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right)$ sera une racine de l'équation

$$217. \quad T = 0.$$

Donc on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right)$ au moyen de la résolution de cette équation.

D'abord on peut trouver toutes les racines de l'équation $T=0$ à l'aide de la fonction φ de la manière suivante:

Si $T=0$, on doit avoir

$$\varphi(\alpha + \beta i)\delta = 0,$$

d'où l'on tire, en vertu de (27.):

$$(\alpha + \beta i)\delta = m\omega + \mu\pi i = (m + \mu i)\omega,$$

et de là

$$\delta = \frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega$$

et

$$218. \quad x = \varphi\left(\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega\right).$$

Dans cette expression sont conséquemment contenues toutes les racines de l'équation $T=0$. On les trouvera en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Or je dis que les valeurs de x , qui sont différentes entre elles, peuvent être représentées par la formule

$$218'. \quad x = \varphi\left(\frac{\varrho \omega}{\alpha + \beta i}\right),$$

où ϱ a toutes les valeurs entières depuis $-\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}$ jusqu'à $+\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}$.

Pour démontrer cela, soient λ et λ' deux nombres entiers, qui satisfont à l'équation indéterminée:

$$219. \quad \beta \cdot \lambda - \alpha \cdot \lambda' = 1;$$

soit de plus t un nombre entier indéterminé et faisons

$$220. \quad k = \mu\lambda + t\alpha; \quad k' = -\mu\lambda' - t\beta;$$

on en déduira sans peine:

$$\mu + \beta k + \alpha k' = 0,$$

et si l'on fait

$$\varrho = m + \alpha k - \beta k',$$

on vérifiera aisément l'équation

$$\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} = \frac{\varrho}{\alpha + \beta i} - k - k' i.$$

De là on tire

$$\varphi\left(\frac{m + \mu i}{\alpha + \beta i} \omega\right) = \varphi\left(\frac{\varrho \omega}{\alpha + \beta i} - k\omega - k' \omega i\right)$$

or suivant (22.) le second membre se réduit à

$$(-1)^{-k-k'} \cdot \varphi\left(\frac{\varrho \omega}{\alpha + \beta i}\right),$$

donc

$$\varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+\beta i}\omega\right) = (-1)^{-k-k'} \cdot \varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\pm\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Maintenant l'expression de ϱ deviendra, en y substituant les valeurs de k et k' :

$$\varrho = m + \mu(\lambda\alpha + \lambda'\beta) + i(\alpha^2 + \beta^2)$$

d'où l'on voit, qu'on peut prendre t tel que la valeur de ϱ , positive ou négative, soit inférieure à $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$. Donc etc.

Cela posé: soit ϱ plus grand que $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{4} - 1 (=v-1)$ et faisons

$$\varrho = v + \theta.$$

Toutes les racines de l'équation $T=0$ seront représentées par la formule (218'); or toutes ces racines sont différentes entre elles. En effet si l'on avoit p. ex.

$$\varphi\left(\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i}\right) = \varphi\left(\frac{\varrho'\omega}{\alpha+\beta i}\right),$$

on auroit selon (31.), (en remarquant que $\varpi = \omega$)

$$\frac{\varrho\omega}{\alpha+\beta i} = (-1)^{m+n} \cdot \frac{\varrho'\omega}{\alpha+\beta i} + (m+ni)\omega,$$

d'où l'on tire:

$$\alpha n + \beta m = 0; \quad \varrho = (-1)^{m+n} \cdot \varrho' + \alpha m - \beta n.$$

La première de ces équations donne $n = -\beta t$; $m = \alpha t$, où t est un entier indéterminé. En vertu de ces relations, l'expression de ϱ deviendrait:

$$\varrho = (-1)^{m+n} \cdot \varrho' + (\alpha^2 + \beta^2) \cdot t,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\varrho + \varrho'}{\alpha^2 + \beta^2} = t,$$

ce qui est impossible, en remarquant que ϱ, ϱ' sont tous deux inférieurs à $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$.

Donc les racines différentes entre elles de l'équation $T=0$ sont au nombre de $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}$. Il faut voir encore, si l'équation en question a des racines égales. En différentiant (216.) on en tirera, en remarquant que $\partial\varphi\alpha = \partial\alpha \cdot f\alpha \cdot F\alpha$:

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta i) \cdot f(\alpha + \beta i) \delta \cdot F(\alpha + \beta i) \delta \cdot S + \left(\frac{\partial S}{\partial \delta}\right) \cdot \varphi(\alpha + \beta i) \delta \\ & = x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot f\delta \cdot F\delta + T \cdot f\delta \cdot F\delta. \end{aligned}$$

Si maintenant T , a des facteurs égaux, il faut que T et $\frac{\partial T}{\partial x}$ soient égaux

à zero en même tems; donc l'équation précédente donnera

$$S.f(\alpha + \beta i)\delta . F(\alpha + \beta i)\delta = 0;$$

or on a $\Phi(\alpha + \beta i)\delta = 0$, donc $f(\alpha + \beta i)\delta = \pm 1 = F(\alpha + \beta i)\delta$, et par conséquent

$$S = 0,$$

ce qui est impossible, car nous supposons, ce qui est permis, que T et S n'aient point de facteur communs. Par là on voit que l'équation

$$T = 0$$

est du degré $\alpha^2 + \beta^2 - 1$ par rapport à x , et aura pour racines les quantités:

$$\pm \Phi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right); \pm \Phi\left(\frac{2\omega}{\alpha + \beta i}\right) \dots \dots \pm \Phi\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} \cdot \frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right).$$

En faisant $x^2 = r$, on aura une équation

$$219. R = 0$$

du degré $\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} = 2\nu$, et dont les racines seront

$$220. \Phi^2(\delta), \Phi^2(2\delta), \Phi^2(3\delta) \dots \dots \Phi^2(2\nu\delta),$$

ou pour abrégér on a supposé $\delta = \frac{\omega}{\alpha + \beta i}$.

Cela posé, on peut aisément résoudre l'équation $R = 0$, à l'aide de la méthode de M. Gauss.

Soit ε une racine primitive de $\alpha^2 + \beta^2$, je dis qu'on peut exprimer les racines comme il suit:

$$221. \Phi^2(\delta), \Phi^2(\varepsilon\delta), \Phi^2(\varepsilon^2\delta), \Phi^2(\varepsilon^3\delta) \dots \dots \Phi^2(\varepsilon^{2\nu-1}\delta).$$

En effet, en faisant

$$222. \varepsilon^m = \pm a_m + t(\alpha^2 + \beta^2),$$

où a_m est moindre que $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$, on aura:

$$\Phi(\varepsilon^m\delta) = \Phi\left(\pm a_m\delta + \frac{t(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha + \beta i}\omega\right) = \Phi(\pm a_m\delta + t(\alpha - \beta i)\omega),$$

c'est-à-dire, en vertu de (22.):

$$\Phi(\varepsilon^m\delta) = \pm \Phi(a_m\delta),$$

et par suite:

$$\Phi^2(\varepsilon^m\delta) = \Phi^2(a_m\delta).$$

Je dis maintenant que tous les nombres

$$1, a_1, a_2, a_3, \dots \dots \dots a_{2\nu-1}$$

sont inégaux entre eux. En effet soit p. ex. $a_m = a_n$, on aura

$$223. \varepsilon^n = \pm a_m + t'(\alpha^2 + \beta^2).$$

Des deux équations (222.) et (223.) on tire, en éliminant a_m ,

$$\frac{\varepsilon^m + \varepsilon^n}{\alpha^2 + \beta^2} = \text{à un nombre entier.}$$

Donc, en multipliant par $\varepsilon^m + \varepsilon^n$; on trouve que $\frac{\varepsilon^{2m} - \varepsilon^{2n}}{\alpha^2 + \beta^2}$ est entier, et par suite $\frac{\varepsilon^{2m-2n} - 1}{\alpha^2 + \beta^2}$, ce qui est impossible, car ε est la racine primitive de $\alpha^2 + \beta^2$ et $2m - 2n$ est moindre que $\alpha^2 + \beta^2 - 1$.

Donc les 2ν nombres 1, α , etc. sont différentes entre eux et par conséquent, pris dans un ordre différent, ils sont les mêmes que les suivans:

$$1, 2, 3, 4 \dots 2\nu - 1.$$

On voit par la formule $\varphi^2(\varepsilon^m \delta) = \varphi^2(a_m \delta)$, que les quantités (220.) et (221.) coïncident, mais dans un ordre différent.

Maintenant on pourra résoudre l'équation $R = 0$ parfaitement de la même manière que l'équation (106.).

On trouvera (116.)

$$224. \quad \varphi^2(\varepsilon^m \delta) = \frac{1}{2\nu} \cdot \left\{ +A + \theta^{-m} \cdot \nu^{\frac{1}{2\nu}} + s_2 \theta^{-2m} \cdot \nu^{\frac{2}{2\nu}} + \dots + s_{n-1} \theta^{-(n-1)m} \cdot \nu^{\frac{n-1}{n}} \right\},$$

où θ est une racine imaginaire de l'équation $\theta^{2\nu} - 1 = 0$, et $\nu, s_2, s_3 \dots \dots s_{n-1}$ seront déterminés par les expressions:

$$\begin{aligned} \nu &= \{\varphi^2(\delta) + \theta \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \theta^2 \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \theta^{2\nu-1} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1} \delta)\}^{2\nu}, \\ s_k &= \frac{\varphi^2(\delta) + \theta^k \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \theta^{2k} \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \theta^{(2\nu-1)k} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1} \delta)}{\{\varphi^2(\delta) + \theta \cdot \varphi^2(\varepsilon \delta) + \theta^2 \cdot \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \theta^{2\nu-1} \cdot \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1} \delta)\}^k}, \\ A &= \varphi^2(\delta) + \varphi^2(\varepsilon \delta) + \varphi^2(\varepsilon^2 \delta) + \dots + \varphi^2(\varepsilon^{2\nu-1} \delta), \end{aligned}$$

qui par le procédé tome II. de ce journal pag. 143., 144., 145. peuvent être exprimés rationnellement par les coefficients de l'équation $R = 0$, qui seront de la forme $A + Bi$, où A et B sont des nombres rationnels. Donc la formule (224.) donne l'expression algébrique de toutes les racines de l'équation $R = 0$, et par conséquent les valeurs des fonctions

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha + \beta i}\right), \quad \varphi\left(\frac{2\omega}{\alpha + \beta i}\right), \quad \dots \dots \varphi\left(\frac{(2\nu-1)\omega}{\alpha + \beta i}\right), \quad \varphi\left(\frac{2\nu\omega}{\alpha + \beta i}\right).$$

37.

Ayant trouvé par ce qui précède la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha + \beta i}\right)$, on en tirera celle de la fonction

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\alpha^2 + \beta^2}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{4\nu + 1}\right),$$

comme il suit.

La valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha + \beta i}\right)$ donnera celle de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha - \beta i}\right)$ en changeant seulement i en $-i$. De là on tire la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha + \beta i} + \frac{m\omega}{\alpha - \beta i}\right)$

par la formule (10), savoir

$$226. \quad \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i} + \frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right) = \frac{\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right) \sqrt{1 - \varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)} + \varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right) \cdot \sqrt{1 - \varphi^4\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)}}{1 - \varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)},$$

$$\text{or } \frac{m\omega}{\alpha+\beta i} + \frac{m\omega}{\alpha-\beta i} = \frac{2m\alpha\omega}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1};$$

donc on aura la valeur de la fonction

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right).$$

Maintenant pour avoir la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$ où n a une valeur déterminée quelconque, il suffit de déterminer m et t de la manière que

$$n = 2m\alpha - (4\nu+1)t,$$

ce qui est toujours possible, en remarquant que les deux nombres 2α et $4\nu+1$ sont premiers entre eux; car alors on obtiendra:

$$\varphi\left(\frac{2m\alpha\omega}{4\nu+1}\right) = \varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1} + t\omega\right) = (-1)^t \cdot \varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right).$$

En posant p. ex. $n=1$, on aura la valeur de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$.

38.

Le cas, où $4\nu+1$ a la forme $1+2^n$, est le plus remarquable; car alors l'expression de $\varphi\left(\frac{\omega}{4\nu+1}\right)$ ne contient que des racines carrées. En effet on a dans ce cas $2\nu=2^{n-1}$, et par suite la formule (224.) fait voir qu'on peut déduire $\varphi(\varepsilon^m\delta)$ de θ et ν en extrayant seulement des racines carrées. Or ν est une fonction rationnelle de θ et $\sqrt{-1}$, et θ est déterminée par l'équation $\theta^{2^{n-1}}-1$, d'où l'on tire θ par des racines carrées; donc on trouve aussi ν et la fonction

$$\varphi(\varepsilon^m\delta) = \varphi\left(\frac{\alpha_m \cdot \omega}{\alpha+\beta i}\right).$$

Connoissant de cette manière $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}\right)$, on aura de même $\varphi\left(\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right)$ et de là, par la formule (226.) la valeur de $\varphi\left(\frac{n\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right) = \varphi\left(\frac{n\omega}{4\nu+1}\right)$, en extrayant des racines carrées.

39.

Un autre cas, où la valeur de $\varphi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être déterminée par des racines carrées est celui où n est une puissance de 2, comme nous l'a-

vons vu No. 13. Donc on connoit les fonctions:

$$\Phi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right); \quad \Phi\left(\frac{m\omega}{1+2^n}\right),$$

où dans la dernière $1+2^n$ est un nombre premier.

Soient maintenant $1+2^n, 1+2^{n_1}, 1+2^{n_2}, \dots, 1+2^{n_\mu}$ plusieurs nombres premiers, on connoit les fonctions:

$$\Phi\left(\frac{m\omega}{2^n}\right); \quad \Phi\left(\frac{m_1\omega}{1+2^{n_1}}\right); \quad \Phi\left(\frac{m_2\omega}{1+2^{n_2}}\right); \quad \dots \quad \Phi\left(\frac{m_\mu\omega}{1+2^{n_\mu}}\right),$$

et de là la fonction:

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{m}{2^n} + \frac{m_1}{1+2^{n_1}} + \frac{m_2}{1+2^{n_2}} + \dots + \frac{m_\mu}{1+2^{n_\mu}}\right)\omega \\ &= \Phi\left(\frac{m'\omega}{2^n(1+2^{n_1})(1+2^{n_2})\dots(1+2^{n_\mu})}\right), \end{aligned}$$

où m' est un nombre entier, qui, à cause des indéterminés $m, m_1, m_2, \dots, m_\mu$ peut avoir une valeur quelconque. On peut donc établir le théorème suivant: „La valeur de la fonction $\Phi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$ peut être exprimée par „des racines carrées toutes les fois que n est un nombre de la forme „ 2^n ou $1+2^n$, le dernier nombre étant premier, ou même un produit „de plusieurs nombres de ces deux formes.”

40.

En appliquant ce qui précède à la lemniscate, on parviendra au théorème énoncé no. 22.

Soit l'arc AM (Fig. 1.) $= \alpha$ et la corde $AM = x$, on aura

$$\partial \alpha = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

En effet, l'équation polaire de la lemniscate est

$$x = \sqrt{(\cos 2\theta)},$$

d'où

$$\partial \theta = - \frac{\partial x \cdot \sqrt{(\cos 2\theta)}}{\sin 2\theta}$$

et

$$\partial \alpha^2 = \partial x^2 + x^2 \cdot \partial \theta^2,$$

donc

$$\partial \alpha^2 = \partial x^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{x^2 \cdot \cos 2\theta}{(\sin 2\theta)^2} \right\};$$

mais de $x = \sqrt{(\cos 2\theta)}$ on tire $\cos 2\theta = x^2$, $\cos^2 2\theta = x^4$, $1 - \cos^2 2\theta = 1 - x^4 = (\sin 2\theta)^2$, donc

$$\partial \alpha^2 = \partial x^2 \left\{ 1 + \frac{x^4}{1-x^4} \right\} = \frac{\partial x^2}{1-x^4},$$

et par suite

$$\partial \alpha = \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^4}}$$

et

$$x = \Phi(\alpha).$$

Si l'on suppose $x=1$, on aura $\alpha = AMB = \frac{\omega}{2}$. Donc la circonférence $AMBN = \omega$. Supposons maintenant qu'il s'agit de diviser cette circonférence en n parties égales, et soit l'arc $AM = \frac{m}{n} \cdot AMBN = \frac{m}{n} \omega$, on aura

$$AM = \Phi\left(\frac{m\omega}{n}\right).$$

Donc on aura la corde, et par suite le m^{me} point de division, si l'on connoît la fonction $\Phi\left(\frac{m\omega}{n}\right)$; or c'est cela qui a toujours lieu, lorsque n est décomposable en nombres premiers de la forme 2 et $1+2^n$, comme nous l'avons vu dans le no. précédent. Donc dans ce cas on peut construire les points de division à l'aide de la règle et du compas seulement, ou ce qui revient au même, par l'intersection de lignes droites et de cercles.

§. IX.

Usage des fonctions Φ , f , F dans la transformation des fonctions elliptiques.

41.

M. Legendre a fait voir dans ses exercices de calc. int., comment l'intégrale $\int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \varphi}}$, qui, en faisant $\sin \varphi = x$, se change en $\int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}$, peut être transformée en d'autres intégrales de la même forme, avec un module différent. Je suis parvenu à généraliser cette théorie par le théorème suivant:

Si l'on désigne par α la quantité $\frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\pi i}{2n+1}$, où au moins l'un des deux nombres entiers m et μ est premier avec $2n+1$, on aura:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dy}{\sqrt{[(1-c_1^2 y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = \pm a \int \frac{dx}{\sqrt{[(1-c^2 x^2)(1+e^2 x^2)]}}, \\
 & \text{où} \\
 227. \quad & \begin{cases} y = f.x \cdot \frac{(\varphi^2 \alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2) \dots (\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1+e^2 \varphi^2 \alpha . x^2)(1+e^2 \varphi^2 2\alpha . x^2) \dots (1+e^2 \varphi^2 n\alpha . x^2)}, \\ \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right\}^2, \\ \frac{1}{e_1} = \frac{f}{e} \left\{ \Phi\left(\frac{\varpi i}{2} + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\varpi i}{2} + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\varpi i}{2} + n\alpha\right) \right\}^2, \\ a = f(\Phi \alpha . \Phi 2\alpha . \Phi 3\alpha \dots \Phi n\alpha)^2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

f étant une indéterminée, de sorte qu'il n'existe qu'une seule relation entre les quantités c_1, e_1, c, e .

Les quantités e^2 et c^2 pourront être positives ou négatives.

Par ce theoreme on peut trouver une infinité de transformations différentes entre elles et de celles de M. Legendre.

42.

Soient m et μ deux nombres entiers, et faisons pour abrégér:

$$228. \quad \alpha = \frac{(m+\mu)\omega + (m-\mu)\varpi i}{2n+1},$$

où l'on suppose que l'un des deux nombres m, μ soit premier avec $2n+1$.

En désignant par θ une quantité quelconque, il viendra, en vertu de (22.)

$$229. \quad \Phi[\theta + (2n+1)\alpha] = \Phi\theta.$$

En mettant $\theta - n\alpha$ au lieu de θ , on obtiendra:

$$230. \quad \Phi[\theta + (n+1)\alpha] = \Phi(\theta - n\alpha).$$

Cela posé, considérons l'expression suivante

$$231. \quad \begin{aligned} \Phi_1(\theta) = & \Phi(\theta) + \Phi(\theta + \alpha) + \Phi(\theta + 2\alpha) + \dots + \Phi(\theta + n\alpha) + \dots \\ & \dots + \Phi(\theta + 2n\alpha). \end{aligned}$$

En mettant $\theta + \alpha$ au lieu de θ , il viendra à cause de l'équation (229.):

$$232. \quad \Phi_1(\theta + \alpha) = \Phi_1(\theta),$$

donc si m désigne un nombre entier quelconque:

$$233. \quad \Phi_1(\theta + m\alpha) = \Phi_1(\theta).$$

En vertu de l'équation 230. on peut écrire l'expression de $\Phi_1(\theta)$, comme il suit:

$$234. \quad \begin{aligned} \Phi_1(\theta) = & \Phi(\theta) + \Phi(\theta + \alpha) + \Phi(\theta - \alpha) + \Phi(\theta + 2\alpha) + \Phi(\theta - 2\alpha) + \dots \\ & \dots + \Phi(\theta + n\alpha) + \Phi(\theta - n\alpha), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule

$$235. \quad \varphi(\theta + \nu\alpha) + \varphi(\theta - \nu\alpha) = \frac{2 \cdot \varphi\theta \cdot f(\nu\alpha) \cdot F(\nu\alpha)}{1 + e^2 c^2 (\varphi\theta)^2 [\varphi(\nu\alpha)]^2},$$

$$= \varphi\theta + \frac{2\varphi\theta \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \theta} + \frac{2\varphi\theta \cdot f2\alpha \cdot F2\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha \cdot \varphi^2 \theta} + \dots + \frac{2\varphi\theta \cdot fn\alpha \cdot Fn\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot \varphi^2 \theta}.$$

En faisant $\varphi\theta = x$, $\varphi_1(\theta)$ devient une fonction rationnelle de x . En la désignant par $\psi(x)$, on aura :

$$236. \quad \psi(x) = x \cdot \left\{ 1 + \frac{2f\alpha \cdot F\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot x^2} + \dots + \frac{2fn\alpha \cdot Fn\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot x^2} \right\}.$$

43.

Maintenant soit ε une quantité quelconque, je dis qu'on aura

$$237. \quad 1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \varepsilon} = \frac{\left(1 - \frac{x}{\varphi \varepsilon}\right) \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + \alpha)}\right) \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2\alpha)}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2n\alpha)}\right)}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot x^2)(1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha \cdot x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot x^2)}.$$

En effet il est clair, que la fonction

$$238. \quad R = \left(1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \varepsilon}\right) (1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot x^2)$$

sera entière et du degré $2n + 1$; mais en faisant $x = \varphi \varepsilon$, ψx deviendra $= \varphi_1 \varepsilon$, et par suite R se réduira à zéro pour cette valeur de x . De même en faisant $x = \varphi(\varepsilon + m\alpha)$, où m est entier, on aura $\psi x = \varphi_1(\varepsilon + m\alpha)$, c'est à dire, en vertu de (233.), $\psi x = \varphi_1 \varepsilon$. Donc $1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \varepsilon} = 0$, et par conséquent $x = \varphi(\varepsilon + m\alpha)$ sera une racine de l'équation $R = 0$, quel que soit le nombre entier m . Or généralement toutes les quantités

$$239. \quad \varphi \varepsilon, \varphi(\varepsilon + \alpha), \varphi(\varepsilon + 2\alpha), \dots \varphi(\varepsilon + 2n\alpha)$$

sont différentes entre elles. En effet si l'on avoit

$$\varphi(\varepsilon + m'\alpha) = \varphi(\varepsilon + \mu'\alpha),$$

il en suivrait en vertu de (31.)

$$\varepsilon + m'\alpha = (-1)^{k+k''} \cdot \{\varepsilon + \mu'\alpha\} + k\omega + k'\varpi i,$$

d'où

$$t + k' = 2k'',$$

$$k = k'' + l; \quad k' = k'' - l,$$

$$(m' - \mu')\alpha = (k'' + l)\omega + (k'' - l)\varpi i.$$

De là, en substituant la valeur de $\alpha = \frac{(m + \mu)\omega + (m - \mu)\varpi i}{2n + 1}$, on tire

$$(m' - \mu')(m + \mu) = (2n + 1)(k'' + l),$$

$$(m' - \mu')(m - \mu) = (2n + 1)(k'' - l)$$

et

$$m' - \mu' = (2n + 1) \cdot \frac{k''}{m} = (2n + 1) \frac{l}{\mu},$$

équation contradictoire, parceque nous avons supposé, que l'un des deux nombres m et μ soit premier avec $2n+1$, et $m'-\mu'$ est toujours moindre que $2n+1$. Maintenant les $2n+1$ quantités (239.) étant différentes entre elles, elles sont précisément les $2n+1$ racines de l'équation $R=0$. Donc on a

$$240. R = A \left(1 - \frac{x}{\varphi \varepsilon}\right) \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + \alpha)}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi(\varepsilon + 2n\alpha)}\right),$$

où A est un coefficient constant, qu'on trouvera en attribuant à x une valeur particulière; p. ex. en faisant $x=0$, on a $R=A$; or l'équation (238) donne pour $x=0$: $R=1$, donc $A=1$, et par conséquent l'équation (237.) a lieu.

En multipliant cette équation par $\varphi \varepsilon$ et faisant ensuite $\varepsilon=0$, il viendra:

$$241. \psi(x) = g x \frac{\left(1 - \frac{x}{\varphi \alpha}\right) \left(1 - \frac{x}{\varphi 2\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi 2n\alpha}\right)}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha . x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha . x^2)},$$

où g est la valeur de $\frac{\varphi_1 \varepsilon}{\varphi \varepsilon}$ pour $\varepsilon=0$. En faisant $\theta=0$, après avoir divisé par $\varphi \theta$, on trouve l'expression suivante de cette constante:

$$242. g = 1 + 2f\alpha . F\alpha + 2f2\alpha . F2\alpha + \dots + 2fn\alpha . Fn\alpha.$$

En faisant dans (230.) $\theta = n\alpha - (m' + 1)\alpha$, on trouve

$$\varphi(2n\alpha - m'\alpha) = \varphi[-(m' + 1)\alpha] = -\varphi(m' + 1)\alpha.$$

Donc on peut écrire l'expression de ψx comme il suit:

$$243. \psi x = g . x . \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2 \alpha}\right) \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2 2\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2 n\alpha}\right)}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha . x^2) (1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha . x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha . x^2)}.$$

44.

Maintenant faisons dans l'expression de $1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$. En supposant pour abréger

$$244. \varphi = (1 - e^2 c^2 \varphi^2 \alpha . x^2) (1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha . x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha . x^2),$$

on aura

$$1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}} = \left(1 - \frac{x}{\varphi \frac{\omega}{2}}\right) \cdot \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right\} \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)}\right\} \dots \left\{1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2n\alpha\right)}\right\} \cdot \frac{1}{\varphi};$$

or, en faisant dans (230.)

$$\theta = \frac{\omega}{2} + (n - m' - 1)\alpha,$$

on a

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \Phi\left(\frac{\omega}{2} - (m' + 1)\alpha\right),$$

donc en vertu de la formule (voy. 17.):

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2} - \alpha\right) = \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right),$$

il viendra:

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \Phi\left(\frac{\omega}{2} + (m' + 1)\alpha\right).$$

Cette équation fait voir qu'on peut écrire l'expression de $1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$ comme il suit:

$$245. \quad 1 - \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$$

$$= (1 - cx) \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

En mettant $-x$ au lieu de $+x$, on aura semblablement

$$246. \quad 1 + \frac{\psi x}{\varphi_1 \frac{\omega}{2}}$$

$$= (1 + cx) \cdot \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right)^2 \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right)^2 \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Donc si l'on fait

$$247. \quad y = k \cdot \psi x; \quad c_1 = \frac{1}{k \cdot \varphi_1 \frac{\omega}{2}},$$

où k est indéterminé, et

$$248. \quad \begin{cases} t = \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right), \\ t_1 = \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)}\right), \end{cases}$$

on aura:

$$249. \quad 1 - c_1 y = (1 - cx) \cdot \frac{t^2}{\varrho}; \quad 1 + c_1 y = (1 + cx) \cdot \frac{t_1^2}{\varrho}.$$

De la même manière, en faisant

$$250. \quad \begin{cases} s = \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + n\alpha\right)}\right), \\ s_1 = \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} i + n\alpha\right)}\right), \end{cases}$$

et

$$251. e_1 = \pm \frac{i}{k \cdot \varphi_1 \left(\frac{\varpi}{2} i \right)},$$

on trouvera ces deux équations:

$$252. 1 \mp e_1 i y = (1 - e i x) \cdot \frac{s}{\varrho}; \quad 1 \pm e_1 i y = (1 + e i x) \cdot \frac{s_1}{\varrho}.$$

Les équations 249. et 252. donneront:

$$(1 - c_1^2 y^2) = (1 - c^2 x^2) \cdot \frac{t^2 t_1^2}{\varrho^2}; \quad (1 + e_1^2 y^2) = (1 + e^2 x^2) \cdot \frac{s^2 s_1^2}{\varrho^2}$$

et par conséquent:

$$253. \sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]} = \pm \frac{t t_1 s s_1}{\varrho^2} \sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}.$$

Maintenant l'expression de y donne $dy = \frac{P}{\varrho^2} \cdot dx$, où P sera une fonction entière de x du degré $4n$, donc:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]}} = \pm \frac{P}{t t_1 s s_1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}}.$$

Or je dis que la fonction $\frac{P}{t t_1 s s_1}$ se réduira à une quantité constante. En effet on a

$$1 - c_1 y = (1 - c x) \cdot \frac{t^2}{\varrho};$$

en différentiant, et mettant pour dy sa valeur $\frac{P dx}{\varrho^2}$, on aura

$$P = \frac{t}{c_1} \left\{ c t \varrho - (1 - c x) \left(2 \varrho \frac{dt}{dx} - t \frac{d\varrho}{dx} \right) \right\}.$$

On voit de là que P est divisible par t . De la même manière on prouvera que P est divisible par les trois fonctions t_1 , s , s_1 . Donc si deux quelconques des quatre fonctions t , t_1 , s , s_1 n'ont point de facteur commun, P sera divisible par leur produit. Or c'est ce qu'on peut voir aisément à l'aide des expressions de ces fonctions. Donc $\frac{P}{t t_1 s s_1}$ est une fonction entière de x . Or P est du degré $4n$; et chacune des fonctions t , t_1 , s , s_1 est du degré n . Donc il est prouvé, que $\frac{P}{t t_1 s s_1}$ est une quantité constante. En la désignant par a , il viendra

$$254. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]}} = \pm a \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}}.$$

Pour déterminer a il suffit d'attribuer à x une valeur particulière. En faisant p. ex. $x = 0$, on aura

$$t = t_1 = s = s_1 = 1; \quad P = \varrho^2 \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial y}{\partial x} = k \cdot \psi' x.$$

Or en différentiant l'expression de ψx , et faisant ensuite $x=0$, il viendra $\psi'x=g$, donc

$$255. \quad a = k.g.$$

On peut donner d'autres formes plus simples aux expressions de c_1 , e_1 , g , α , et qui mettront en évidence plusieurs propriétés remarquables de ces quantités.

Par la formule 240. on voit que le coefficient de x^{2n+1} dans la fonction R est $-\frac{A}{\varphi \varepsilon . \varphi(\varepsilon + \alpha) \dots \varphi(\varepsilon + 2n\alpha)}$; or d'après 237. le même coefficient sera

$$-\frac{(-1)^n}{\varphi_1 \varepsilon} \cdot \frac{g}{(\varphi \alpha . \varphi 2\alpha \dots \varphi n\alpha)^2},$$

donc en remarquant que $A=1$:

$$\Phi_1(\varepsilon) = \frac{(-1)^n . g}{(\varphi \alpha . \varphi 2\alpha \dots \varphi n\alpha)^2} . \Phi \varepsilon . \Phi(\varepsilon + \alpha) . \Phi(\varepsilon + 2\alpha) \dots \Phi(\varepsilon + 2n\alpha).$$

En faisant dans (236.), (243.) $x=\frac{1}{5}$, après avoir divisé par x , on obtiendra deux valeurs de $\frac{\psi x}{x}$, savoir

$$1 \text{ et } \frac{g(-1)^n}{(ec)^{2n} (\varphi \alpha . \varphi 2\alpha \dots \varphi n\alpha)^2},$$

donc, en les égalant:

$$256. \quad g = (-1)^n . (ec)^{2n} (\Phi \alpha . \Phi 2\alpha \dots \Phi n\alpha)^4,$$

et par conséquent:

$$257. \quad \begin{aligned} \Phi_1(\varepsilon) &= (ec)^{2n} (\Phi \alpha . \Phi 2\alpha \dots \Phi n\alpha)^2 \Phi \varepsilon . \Phi(\varepsilon + \alpha) . \Phi(\varepsilon + 2\alpha) \dots \Phi(\varepsilon + 2n\alpha) \\ &= \Phi(\varepsilon) + \Phi(\varepsilon + \alpha) + \Phi(\varepsilon + 2\alpha) + \dots + \Phi(\varepsilon + 2n\alpha). \end{aligned}$$

Cette équation exprime une propriété remarquable de la fonction Φ . En y posant $\varepsilon = \frac{\omega}{2}$ et $\varepsilon = \frac{\overline{\omega}}{2}i$, on obtiendra

$$258. \quad \begin{cases} \Phi_1\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{k c_r} = (ec)^{2n} . \delta^2 \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) . \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2n\alpha\right), \\ \Phi_1\left(\frac{\overline{\omega}}{2}i\right) = \frac{1}{k e_r} = (ec)^{2n} . \delta^2 \Phi\left(\frac{\overline{\omega}}{2}i\right) . \Phi\left(\frac{\overline{\omega}}{2}i + \alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\overline{\omega}}{2}i + 2n\alpha\right), \end{cases}$$

où l'on a fait pour abrégé

$$259. \quad \delta = \Phi \alpha . \Phi 2\alpha . \Phi 3\alpha \dots \Phi n\alpha.$$

En remarquant que

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2} + (2n - m')\alpha\right) = \Phi\left(\frac{\omega}{2} + (m' + 1)\alpha\right)$$

et

$$\Phi\left(\frac{\overline{\omega}}{2}i + (2n - m')\alpha\right) = \Phi\left(\frac{\overline{\omega}}{2}i + (m' + 1)\alpha\right),$$

et faisant

$$260. \quad k(e^2 c^2)^n \cdot \delta^2 = f^2,$$

on tire de ces équations

$$261. \quad \begin{cases} \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right\}^2, \\ \frac{1}{e_1} = \pm \frac{f}{e} \left\{ \Phi\left(\frac{\bar{\omega}}{2} i + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\bar{\omega}}{2} i + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\bar{\omega}}{2} i + n\alpha\right) \right\}^2. \end{cases}$$

Multipliant et remarquant qu'on a (18.)

$$\Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \Phi\left(\frac{\bar{\omega}}{2} i + \alpha\right) = \frac{i}{ec};$$

on obtiendra

$$\mp \frac{1}{c_1 e_1} = \frac{(-1)^n \cdot f^2}{(ec)^{2n+1}},$$

d'où

$$262. \quad c_1 e_1 = \mp \frac{(ec)^{2n+1} \cdot (-1)^n}{f^2}.$$

De même en divisant on obtiendra:

$$263. \quad \begin{cases} \mp \frac{e_1}{c_1} = (-1)^n \cdot \frac{e}{c} (ec)^{2n} \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) \right\}^2, \\ \mp \frac{c_1}{e_1} = (-1)^n \cdot \frac{c}{e} (ec)^{2n} \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\bar{\omega}}{2} i + \alpha\right) \cdot \Phi\left(\frac{\bar{\omega}}{2} i + 2\alpha\right) \dots \Phi\left(\frac{\bar{\omega}}{2} i + n\alpha\right) \right\}^2, \end{cases}$$

Précédemment nous avons trouvé $a = k \cdot g$, et $g = (-1)^n \cdot (ec)^{2n} \delta^2$, donc

$$264. \quad a = f \cdot \delta^2 \cdot (-1)^n.$$

Également nous avons trouvé $y = k \cdot \psi(x)$, donc en vertu de (243.)

$$265. \quad y = (-1)^n f \cdot x \frac{(\varphi^2 \alpha - x^2)(\varphi^2 2\alpha - x^2)(\varphi^2 3\alpha - x^2) \dots (\varphi^2 n\alpha - x^2)}{(1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot x^2)(1 + e^2 c^2 \varphi^2 2\alpha \cdot x^2) \dots (1 + e^2 c^2 \varphi^2 n\alpha \cdot x^2)}.$$

Donc ces valeurs précédentes de c_1 , e_1 , a et y donneront:

$$266. \quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]}} = \pm \frac{a \partial x}{\sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}},$$

et de là

$$267. \quad \int \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - c_1^2 y^2)(1 + e_1^2 y^2)]}} = \pm a \cdot \int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - c^2 x^2)(1 + e^2 x^2)]}}.$$

45.

Les formules (261.) donnent les valeurs des quantités c_1 et e_1 , exprimées en c et e à l'aide de la fonction Φ . Or on peut aussi les déterminer à l'aide d'une équation algébrique. En effet on a

$$\left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) \right\}^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{f\alpha}{F\alpha} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1 - c^2 \varphi^2 \alpha}{1 + e^2 \varphi^2 \alpha}$$

et

$$\left\{ \Phi\left(\frac{\bar{\omega}}{2} i + \alpha\right) \right\}^2 = -\frac{1}{e^2} \left(\frac{F\alpha}{f\alpha} \right)^2 = -\frac{1}{e^2} \cdot \frac{1 + e^2 \varphi^2 \alpha}{1 - c^2 \varphi^2 \alpha};$$

donc il est clair que les valeurs de c_1 et e_1 pourront être exprimées en

fonctions rationnelles et symétriques des quantités $\Phi\alpha, \Phi 2\alpha, \dots, \Phi n\alpha$. Donc si $2n+1$ est un nombre premier, on peut, en vertu de ce qu'on a vu §. V., déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation algébrique du $(2n+2)^{\text{me}}$ degré. On peut encore démontrer que la même chose aura lieu dans le cas où $2n+1$ est un nombre composé. Alors on peut même déterminer c_1 et e_1 à l'aide d'une équation d'un degré moindre que $2n+2$.

Donc on aura un certain nombre de transformations correspondantes pour chaque valeur de $2n+1$.

46.

On a supposé dans ce qui précède que e et c soient des quantités réelles et positives; mais ayant exprimé c_1 et e_1 en e et c par des équations algébriques, il est clair que la formule (266.) aura lieu également en donnant à e et c des valeurs réelles et imaginaires quelconques. Dans le cas où e^2, c^2 sont réelles, on peut même se servir des expressions (261.), (265.). Mais alors ω et ϖ ne seront pas toujours des quantités réelles. Au reste l'une des quantités c_1 et e_1 , à cause de l'indéterminée f , peut être prise à volonté; seulement il faut excepter les valeurs zéro et l'infini.

47.

Si l'on suppose c et e réels et $2n+1$ premier, les valeurs de c_1 et e_1 seront imaginaires, excepté deux d'entre elles, dont l'une répond à

$$\alpha = \frac{2m \cdot \omega}{2n+1}$$

et l'autre à

$$\alpha = \frac{2\mu \varpi i}{2n+1}.$$

A. Supposons d'abord

$$\alpha = + \frac{2m \cdot \omega}{2n+1}.$$

Dans ce cas on aura (261.):

$$\frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \frac{2m\omega}{2n+1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} + 2 \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) \dots \Phi\left(\frac{\omega}{2} + n \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) \right\}^2.$$

Soit $\mu \cdot 2m = (2n+1)t \pm a_m$, où t est entier et positif, et moindre que $\frac{2n+1}{2}$, on aura

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \mu \cdot \frac{2m\omega}{2n+1}\right) &= \Phi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_m \omega}{2n+1} + t\right) = (-1)^t \cdot \Phi\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{a_m \omega}{2n+1}\right) \\ &= \pm \Phi\left(\frac{2n+1-2a_m}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right). \end{aligned}$$

Or les nombres $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ seront les mêmes que les suivants 1, 2, 3, $\dots n$; mais dans un ordre différent; donc l'expression de $\frac{1}{c_1}$ pourra être mise sous la forme

$$268. \frac{1}{c_1} = \frac{f}{c} \left\{ \Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \Phi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2.$$

De même l'équation (263.) donnera

$$269. \frac{e_1}{c_1} = \mp (-1)^n \cdot \frac{e}{c} \cdot (ec)^{2n} \left\{ \Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \Phi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2,$$

Soit maintenant $c = 1$, $c_1 = 1$, on aura, en posant $\pm (-1)^n = 1$:

$$269'. e_1 = e^{2n+1} \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \Phi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2,$$

$$270. \int \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = \pm a \cdot \int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} + \text{Const.}$$

$$271. y = (-1)^n f x \cdot \frac{\left\{ \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \left\{ \varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \dots \left\{ \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\}}{\left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\} \left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\} \dots \left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\}},$$

$$f = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}},$$

$$272. a = f \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \dots \Phi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) \right\}^2 (-1)^n$$

ou bien

$$273. a = \left\{ \frac{\Phi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \cdot \Phi\left(\frac{2\omega}{2n+1}\right) \dots \Phi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}{\Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \cdot \Phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \Phi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)} \right\}^2 \cdot (-1)^n.$$

Si l'on suppose e moindre que l'unité ou égale à l'unité, e_1 sera toujours moindre que e , et lorsque $2n+1$ est un très grand nombre, e_1 sera extrêmement petit.

48.

Le signe du second membre de l'équation 270. dépend de la grandeur de x .

Il pourra être jugé aisément comme il suit. On a par ce qui précède

$$\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]} = \pm \frac{t t_1 s s_1}{\varrho^2} \sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}.$$

En supposant x réel, ϱ^2 sera toujours fini et positif, de même que $\sqrt{(1+e_1^2 y^2)}$ et $\sqrt{(1+e^2 x^2)}$. Donc le signe du second membre de l'équation est le même que celui de la quantité

$$t t_1 s s_1 \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-y^2}\right)};$$

maintenant on a

$$s.s_1 = \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}i + \alpha\right)}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}i + n\alpha\right)}\right);$$

or $\varphi\left(\frac{\omega}{2}i + \alpha\right) = \frac{i}{e} \cdot \frac{F\alpha}{f\alpha}$ etc.,

donc

$$s.s_1 = \left\{1 + \left(\frac{f\alpha \cdot x}{e \cdot F\alpha}\right)^2\right\} \dots \left\{1 + \left(\frac{fn\alpha \cdot x}{e \cdot Fn\alpha}\right)^2\right\},$$

donc, en remarquant que α est réel dans le cas que nous considérons, on voit que $s.s_1$ sera toujours une quantité positive; or $t.t_1$ est réel, donc la quantité $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}$ sera positive également, et par conséquent le signe, dont il s'agit, sera le même, que celui de la quantité $t.t_1$. Il n'est pas difficile de voir qu'en vertu de (248.) et en mettant pour α sa valeur $\frac{2m\omega}{2n+1}$, on aura

$$t.t_1 = \left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}\right\} \left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}\right\} \dots \left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)}\right\}$$

quantité qui est positive depuis $x=0$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$, négative depuis $x=\varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$, positive depuis $x=\varphi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ jusqu'à $x=\varphi\left(\frac{5}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ etc. Si x est plus grand que l'unité, $t.t_1$ aura toujours le même signe, savoir $(-1)^n$.

Donc, dans ce cas l'équation (270.) donnera, en intégrant et commençant l'intégrale par $x=1$:

$$274. \int_1^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(y^2-1)(1+e_1^2 y^2)]}} = a \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(x^2-1)(1+e^2 x^2)]}}.$$

Si la valeur de x est moindre que l'unité, on aura

$$275. \int \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = a \int \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} + \text{Const.}$$

entre les limites

$$x = \varphi\left(\frac{4m-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \text{ et } x = \varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$$

et

$$276. -\int \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = a \int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} + \text{Const.}$$

entre les limites $x = \varphi\left(\frac{4m+1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$ et $x = \varphi\left(\frac{4m+3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$.

Si p. ex. on suppose x renfermé entre les limites

$$-\Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \text{ et } +\Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right)$$

on aura, en intégrant et commençant l'intégrale par $x=0$,

$$277. \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = a \cdot \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}}.$$

En faisant $x = \Phi\left(\frac{\omega}{(2n+1) \cdot 2}\right)$, on aura $y = (-1)^n$, et par suite:

$$\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}} = \frac{a \cdot \omega}{2(2n+1)} (-1)^n,$$

d'où

$$278. (-1)^n \cdot a = \frac{4n+2}{\omega} \int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}}.$$

Cette expression de a est très commode pour le calcul. En négligeant les quantités de l'ordre e_1^2 , on obtiendra

$$279. (-1)^n \cdot a = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{\omega}.$$

En substituant et négligeant toujours e_1^2 la formule (277.) donnera

$$280. \begin{cases} \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} = \frac{\omega}{(2n+1)\pi} \cdot \text{arc. sin.}(y), \\ y = (2n+1) \frac{\pi}{\omega} \cdot x \frac{\left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right)}\right\} \dots \left\{1 - \frac{x^2}{\varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right)}\right\}}{\left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) x^2\right\} \dots \left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) x^2\right\}}. \end{cases}$$

B. Dans le cas $\alpha = \frac{2\mu\omega i}{2n+1}$, on trouvera de la même manière la formule suivante

$$281. \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}} = a' \cdot \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e_1^2 y^2)]}},$$

où

$$e_1 = \frac{1}{e^{2n-1} \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \Phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \dots \Phi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \right\}^4},$$

$$a' = \frac{1}{e^n \left\{ \Phi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \cdot \Phi\left(\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \Phi\left(\frac{3}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \dots \Phi\left(\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{\omega i}{2}\right) \right\}},$$

$$y = \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{e_1}} \cdot x \frac{\left\{x^2 - \varphi^2\left(\frac{\omega i}{2n+1}\right)\right\} \left\{x^2 - \varphi^2\left(\frac{2\omega i}{2n+1}\right)\right\} \dots \left\{x^2 - \varphi^2\left(\frac{n\omega i}{2n+1}\right)\right\}}{\left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega i}{2n+1}\right) x^2\right\} \left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{2\omega i}{2n+1}\right) x^2\right\} \dots \left\{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{n\omega i}{2n+1}\right) x^2\right\}},$$

La formule précédente a lieu pour toutes les valeurs de x moindres que l'unité.

49.

Pour avoir une théorie complète de la transformation des fonctions elliptiques, il faudroit connoître toutes les transformations possibles; or je suis parvenu à démontrer, qu'on les obtient toutes en combinant celle de M. Legendre avec celles, contenues dans la formule ci-dessus, même en cherchant la relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.

Ce théorème dont les conséquences embrassent presque toute la théorie des fonctions elliptiques, m'a conduit à un très grand nombre de belles propriétés de ces fonctions.

§. X.

Sur l'intégration de l'équation séparée

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+\mu y^2)]}} = a \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+\mu x^2)]}}.$$

50.

On peut toujours comme on sait présenter l'intégrale complète de cette équation sous une forme algébrique, lorsque la quantité constante a est un nombre rationnel, quelle que soit d'ailleurs la valeur réelle ou imaginaire de μ . Mais si a n'est pas un nombre rationnel, cela n'a pas lieu. A cet égard je suis parvenu aux théorèmes suivans:

Théorème I. En supposant a réel, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit un nombre rationnel.

Théorème II. En supposant a imaginaire, et l'équation intégrable algébriquement, il faut nécessairement que a soit de la forme $m \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{n}$, où m et n sont des nombres rationnels. Dans ce cas la quantité μ n'est pas arbitraire; il faut qu'elle satisfasse à une équation qui a une infinité de racines réelles et imaginaires. Chaque valeur de μ satisfait à la question.

La démonstration de ces théorèmes fait partie d'une théorie très étendue des fonctions elliptiques, dont je m'occupe actuellement, et qui paroitra aussitôt qu'il me sera possible. Je me borne ici à considérer un cas particulier, qu'on peut tirer des formules du paragraphe précédent.

Si dans la formule (270.) on pose

$$e_1 = \frac{1}{e},$$

et xi à la place de x , il viendra

$$282. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = a\sqrt{-1} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2x^2)]}}.$$

où

$$283. y = \pm \sqrt{-1} \cdot e^{n+1} \cdot x \frac{\left\{ \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \dots \left\{ \varphi^2\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\}}{\left\{ 1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) - x^2 \right\} \dots \left\{ 1 + e^2 \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) x^2 \right\}}$$

φ est déterminé par l'équation (269') qui deviendra

$$284. \begin{cases} 1 = e^{n+1} \cdot \left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2 \\ \text{et } a \text{ par:} \\ a = \frac{\left\{ \varphi\left(\frac{\omega}{2n+1}\right) \dots \varphi\left(\frac{n\omega}{2n+1}\right) \right\}^2}{\left\{ \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \dots \varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2} \cdot \frac{1}{e} \end{cases}$$

Donc on connoit une intégrale particulière de l'équation (282.) et par conséquent on en pourra trouver l'intégrale complète.

Dans le cas que nous considérons, la valeur de a est $\sqrt{(2n+1)}$; ce qu'on démontrera aisément comme il suit:

En mettant dans l'équation (282.) $y = z\sqrt{-1}$, et intégrant entre les limites zéro et $\varphi\left(\frac{\omega}{4n+2}\right)$, il viendra

$$\frac{\overline{\omega}}{2} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\partial z}{\sqrt{[(1+z^2)(1-e^2z^2)]}} = a \cdot \frac{\omega}{4n+2},$$

en remarquant que les limites de z seront zéro et $\frac{1}{e}$. En faisant de même $x = z\sqrt{-1}$, et intégrant entre les limites zéro et $\frac{1}{e}$, on trouvera que les limites de y seront zéro et l'unité et par conséquent

$$\int_0^1 \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2y^2)]}} = \frac{\omega}{2} = a \cdot \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{\partial z}{\sqrt{[(1+z^2)(1-e^2z^2)]}} = a \cdot \frac{\overline{\omega}}{2}.$$

Donc on a

$$\frac{\overline{\omega}}{2} = \frac{a}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}$$

et

$$\frac{\omega}{2} = a \cdot \frac{\overline{\omega}}{2},$$

d'où l'on tire

$$285. a = \sqrt{(2n+1)},$$

$$286. \frac{\omega}{\overline{\omega}} = \sqrt{(2n+1)}.$$

Donc l'équation différentielle deviendra:

$$287. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2 y^2)]}} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{(2n+1)} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}}.$$

51.

Pour donner un exemple, considérons le cas où $n=1$ et $n=2$.

A. Si $n=1$, on aura:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+e^2 y^2)]}} = \sqrt{-3} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}},$$

$$y = \sqrt{-1} \cdot e \cdot x \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) - x^2}{1 + e^2 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) \cdot x^2}.$$

e est déterminé par l'équation:

$$1 = e^2 \left\{ \varphi\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\omega}{2}\right) \right\}^2.$$

On a

$$\varphi\left(\frac{\omega}{3}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3}\right) = \varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \frac{f\left(\frac{\omega}{3}\right)}{F\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{\sqrt{[1 - \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)]}}{\sqrt{[1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)]}},$$

donc

$$1 = e^2 \cdot \frac{1 - \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)} = \frac{e^2 - e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}{1 + e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right)}.$$

Maintenant on trouvera en combinant les deux équations et remettant pour a sa valeur $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{3} = e \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right),$$

donc

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{e},$$

et par suite

$$1 = \frac{e^2 - e\sqrt{3}}{1 + e\sqrt{3}},$$

de là

$$e^2 - 2\sqrt{3} \cdot e = 1$$

et

$$e = \sqrt{3} + 2.$$

Ayant trouvé e , on aura

$$\varphi^2\left(\frac{\omega}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3.$$

Donc on aura l'équation différentielle:

$$288. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1+(2+\sqrt{3})^2 y^2)]}} = \sqrt{-3} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+(2+\sqrt{3})^2 x^2)]}},$$

24 *

qui sera satisfaite par l'intégrale algébrique:

$$y = \sqrt{-1} \cdot x \frac{\sqrt{3} - (2 + \sqrt{3}) \cdot x^2}{1 + \sqrt{3} (2 + \sqrt{3}) \cdot x^2}.$$

Si l'on pose $x\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ au lieu de x , et $y\sqrt{(2 - \sqrt{3})} \cdot \sqrt{-1}$ au lieu de y , on obtiendra l'équation:

$$289. \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - 2\sqrt{3} \cdot y^2 - y^4)]}} = \sqrt{3} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 + 2\sqrt{3} \cdot x^2 - x^4)]}},$$

qui sera satisfaite par

$$y = x \cdot \frac{\sqrt{3} - x^2}{1 + \sqrt{3} \cdot x^2}.$$

B. Si $n = 2$, on aura l'équation différentielle

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 + e^2 y^2)]}} = \sqrt{-5} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - x^2)(1 + e^2 x^2)]}},$$

où

$$y = \sqrt{-1} \cdot e^2 \cdot x \frac{\varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) - x^2}{1 + e^2 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot x^2} \cdot \frac{\varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) - x^2}{1 + e^2 \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot x^2},$$

$$290. \quad 1 = e^3 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right); \quad \sqrt{5} = e^2 \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right).$$

On a

$$291. \quad \begin{cases} \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right) = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{5}\right) = \frac{f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}, \\ \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right) = \varphi^2\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{5}\right) = \frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right)}, \end{cases}$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5} + \frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5} + \frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{\omega}{5}\right) - \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) F\left(\frac{2\omega}{5}\right) F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{\omega}{5}\right) + e^2 \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) f\left(\frac{2\omega}{5}\right) f\left(\frac{\omega}{5}\right)},$$

$$\frac{f\left(\frac{2\omega}{5} - \frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5} - \frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)} = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right) f\left(\frac{\omega}{5}\right) + \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{2\omega}{5}\right) F\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right) f\left(\frac{\omega}{5}\right) - e^2 \varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) \varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) f\left(\frac{2\omega}{5}\right) F\left(\frac{\omega}{5}\right)},$$

En multipliant ces valeurs de $\frac{f\left(\frac{3\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{3\omega}{5}\right)}$ et $\frac{f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{\omega}{5}\right)}$ entre elles, et remarquant que

$$f\left(\frac{3\omega}{5}\right) = f\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

$$F\left(\frac{3\omega}{5}\right) = F\left(\frac{2\omega}{5}\right),$$

on obtiendra

$$P = \frac{P^2 - \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{1 - e^4 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot P^2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$P = \frac{f\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot f\left(\frac{\omega}{5}\right)}{F\left(\frac{2\omega}{5}\right) \cdot F\left(\frac{\omega}{5}\right)}.$$

Cela posé, les équations (290., 291.) donneront

$$1 = e^3 \cdot P^2, \quad \varphi^2\left(\frac{\omega}{5}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{e^2},$$

donc, en substituant

$$\frac{1}{e\sqrt{e}} = \frac{\frac{1}{e^3} - \frac{\sqrt{5}}{e^2}}{1 - \frac{\sqrt{5}}{e}} = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{1 - e\sqrt{5}}{e - \sqrt{5}},$$

et de là

$$\sqrt{e} = \frac{1 - e\sqrt{5}}{e - \sqrt{5}},$$

$$e^3 - 1 - (5 + 2\sqrt{5})e(e - 1) = 0.$$

Les racines de cette équation sont

$$e = 1, \quad e = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}, \quad e = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

La dernière de ces racines

$$e = 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} = \left[\frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^2} \right]^2$$

répond à la question, car l'équation

$$1 = e^3 \cdot \varphi^2\left(\frac{\omega}{10}\right) \cdot \varphi^2\left(\frac{3\omega}{10}\right)$$

fait voir que e doit être plus grand que l'unité. Connoissant e , on trouve

la valeur des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right)$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right)$ comme il suit:

Nous avons

$$1 = e^3 \cdot P^2 = e^3 \cdot \frac{f^2\left(\frac{\omega}{5}\right) f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)}{F^2\left(\frac{\omega}{5}\right) F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right)};$$

or en faisant $\varphi\left(\frac{\omega}{5}\right) = \alpha$ et $\varphi\left(\frac{2\omega}{5}\right) = \beta$, on aura

$$f^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 - \alpha^2; \quad f^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 - \beta^2,$$

$$F^2\left(\frac{\omega}{5}\right) = 1 + e^2 \alpha^2; \quad F^2\left(\frac{2\omega}{5}\right) = 1 + e^2 \beta^2,$$

donc:

$$\begin{aligned}(1 + e^2 \alpha^2)(1 + e^2 \beta^2) &= e^3(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2), \\ 1 + e^2(\alpha^2 + \beta^2) + e^4 \alpha^2 \beta^2 &= e^3 - e^3(\alpha^2 + \beta^2) + e^3 \alpha^2 \beta^2, \\ e^3 - 1 - e^3(e - 1) \cdot \alpha^2 \beta^2 &= e^2(e + 1) \cdot (\alpha^2 + \beta^2); \end{aligned}$$

or nous avons trouvé plus haut $\alpha^2 \beta^2 = \frac{\sqrt{5}}{e^2}$, donc:

$$e^3 - 1 - e(e - 1)\sqrt{5} = e^2(e + 1)\{\alpha^2 + \beta^2\}.$$

Donc on connoit $\alpha^2 \beta^2$ et $\alpha^2 + \beta^2$ et par suite α^2 et β^2 par la résolution d'une équation du second degré. On a donc aussi la valeur de y , qui satisfait à l'équation:

$$\begin{aligned} 292. \quad & \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 + (2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5}))^2 \cdot y^2})]}} \\ &= \sqrt{-5} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - x^2)(1 + (2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{(2 + \sqrt{5}))^2 \cdot x^2})]}}. \end{aligned}$$

Si l'on pose $\frac{x}{\sqrt{e}}$ au lieu de x , et $\frac{y\sqrt{-1}}{\sqrt{e}}$ au lieu de y , on obtiendra l'équation

$$293. \quad \frac{\partial y}{\sqrt{[1 - 4\sqrt{(2 + \sqrt{5})} \cdot y^2 - y^4]}} = \sqrt{5} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[1 + 4\sqrt{(2 + \sqrt{5})} \cdot x^2 - x^4]}},$$

où

$$y = x \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{(10 + 2\sqrt{5}) \cdot x^2 + x^4}}{1 + \sqrt{(10 + 2\sqrt{5}) \cdot x^2 + x^4}}.$$

52.

Dans les deux cas que nous venons de considérer, il n'étoit pas difficile de trouver la valeur de la quantité e , mais la valeur de n étant plus grande, on parviendra à des équations algébriques, qui peut être ne seront pas résolubles algébriquement.

Néanmoins on peut dans tous les cas exprimer la valeur de e par des séries, et comme leur forme est très remarquable, je vais les rapporter ici:

En faisant dans la formule (206.) du VII^{me} §. $\alpha = 1$, on aura, en remarquant que $c = 1$, $\phi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{c}$,

$$e\omega = 4\pi \left\{ \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + 1} + \frac{\varrho^3}{\varrho^6 + 1} + \frac{\varrho^5}{\varrho^{10} + 1} + \dots \right\},$$

où

$$\varrho = h^{\frac{\bar{\omega}}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

En faisant de même dans la formule (204.): $\alpha = \frac{\bar{\omega}}{2}i$, on aura $\phi\left(\frac{\bar{\omega}}{2}i\right) = \frac{i}{e}$; $\varepsilon = h^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$, donc

$$\frac{i}{e} = \frac{2}{e} \cdot \frac{\pi}{\omega} \cdot \left\{ \frac{i - \frac{1}{i}}{r - r^{-1}} - \frac{i^3 - i^{-3}}{r^3 - r^{-3}} + \dots \right\},$$

c'est-à-dire

$$\omega = 4\pi \cdot \left\{ \frac{r}{r^2 + 1} + \frac{r^3}{r^6 + 1} + \frac{r^5}{r^{10} + 1} + \dots \right\},$$

où

$$r = h^{\frac{\omega}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2}}.$$

Maintenant dans le cas que nous considérons, on a

$$\frac{\omega}{\omega} = \sqrt{(2n+1)},$$

et par conséquent

$$292. \quad \omega = 4\pi \sqrt{(2n+1)} \cdot \left\{ \frac{h^{\frac{\pi}{2} \sqrt{(2n+1)}}}{h^{\pi \sqrt{(2n+1)}} + 1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2} \sqrt{(2n+1)}}}{h^{3\pi \sqrt{(2n+1)}} + 1} + \dots \right\}.$$

Cette formule donne la valeur de

$$\omega = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1+e^2 x^2)]}}.$$

Ensuite on aura la valeur de e par la formule qui, en substituant pour

ϱ sa valeur $h^{\frac{\omega}{\omega} \cdot \frac{\pi}{2}} = h^{\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}} \cdot \frac{\pi}{2}}$, donne

$$293. \quad e = \frac{4\pi}{\omega} \left\{ \frac{h^{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}}}{\frac{\pi}{h^{\sqrt{(2n+1)}}} + 1} + \frac{h^{\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}}}{\frac{3\pi}{h^{\sqrt{(2n+1)}}} + 1} + \dots \right\}.$$

h est le nombre 2,7182818....

Addition au mémoire précédent.

Ayant terminé le mémoire précédent sur les fonctions elliptiques, une note sur les mêmes fonctions par Mr. C. G. T. Jacobi, insérée dans le No. 123. année 1827. du recueil de Mr. Schumacher, qui a pour titre „*Astronomische Nachrichten*,” m'est venu sous les yeux. Mr. Jacobi donne le théorème suivant:

Soit p un nombre impair et θ un angle tel qu'on ait, en désignant l'intégrale $\int \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}}$ prise de 0 jusqu'à θ , par $F(k, \theta)$:

$$F(k, \theta') = \frac{1}{p} \cdot F(k, 90^\circ);$$

et en général $\theta^{(m)}$ un angle tel, qu'on ait

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p} \cdot F(k, 90^\circ):$$

soit déterminé encore l'angle ψ par l'équation

$$\text{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\psi) = \frac{\text{tang} \frac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\text{tang} \frac{1}{2}(\theta' + \theta)} \cdot \frac{\text{tang} \frac{1}{2}(\theta'' + \theta)}{\text{tang} \frac{1}{2}(\theta'' - \theta)} \cdots \frac{\text{tang} \frac{1}{2}(\theta^{(p-2)} + \theta)}{\text{tang} \frac{1}{2}(\theta^{(p-2)} - \theta)} \text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2}\theta),$$

on aura:

$$F(k, \theta) = \mu \cdot F(\lambda, \psi).$$

Il faut admettre le signe supérieur si p est de la forme $4n + 1$, et le signe inférieur, si p est de la forme $4n - 1$. ψ doit être pris entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$. Les constantes μ et λ se déterminent de différentes manières. On a p. ex.

$$\mu = \frac{1}{2(\text{cosec } \theta' - \text{cosec } \theta'' + \dots + \cos \theta^{(p-2)} \pm \frac{1}{2})},$$

$$\lambda = 2k\mu(\sin \theta' - \sin \theta'' + \dots + \sin \theta^{(p-2)} \pm \frac{1}{2}).$$

Ce théorème élégant, que M. Jacobi donne sans démonstration est contenu comme cas particulier dans la formule (227.) du mémoire précédent, et au fond il est le même que celui de la formule (270.)

Nous allons démontrer cela.

En faisant dans l'intégrale

$$\alpha = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2x^2)]}};$$

$$x = \sin \theta,$$

on aura

$$\alpha = \int_0^\theta \frac{\partial \theta}{\sqrt{[(1-k^2 \sin^2 \theta)]}},$$

mais

$$x = \phi \alpha,$$

donc:

$$\alpha = F(k, \theta) \text{ donne } \sin \theta = \phi \alpha.$$

Si $\theta = 90^\circ$, on a $x = 1$, donc

$$\frac{\omega}{2} = F(k, 90^\circ).$$

Donc en faisant $\theta = \theta^{(m)}$, on aura

$$F(k, \theta^{(m)}) = \frac{m}{p} \cdot \frac{\omega}{2} \text{ et } \sin \theta^{(m)} = \phi \left(\frac{m}{p} \cdot \frac{\omega}{2} \right).$$

Cela posé, faisons dans (269'. et 270.):

$$e_1^2 = -\lambda^2, \quad e^2 = -k^2, \quad \mu = \frac{(-1)^n}{a},$$

$$x = (-1)^n \cdot \sin \theta, \quad y = \sin \psi, \quad 2n + 1 = p,$$

il viendra:

$$(1.) \int \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}} = \pm \mu \int \frac{\partial \psi}{\sqrt{(1-\lambda^2 \sin^2 \psi)}} + C,$$

où les quantités μ , λ , ψ sont déterminés par les équations

$$\lambda = k^{2n+1} \cdot \{\sin \theta' \cdot \sin \theta'' \dots \sin \theta^{(2n-1)}\}^2,$$

$$\mu = \frac{\{\sin \theta' \sin \theta'' \dots \sin \theta^{(2n-1)}\}^2}{\{\sin \theta'' \sin \theta^{iv} \dots \sin \theta^{(2n)}\}},$$

$$\sin \psi = \frac{k^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sin \theta \frac{\{\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta\} \{\sin^2 \theta^{iv} - \sin^2 \theta\} \dots \{\sin^2 \theta^{(2n)} - \sin^2 \theta\}}{\{1 - k^2 \sin^2 \theta'' \sin^2 \theta\} \{1 - k^2 \sin^2 \theta^{iv} \sin^2 \theta\} \dots \{1 - k^2 \sin^2 \theta^{(2n)} \sin^2 \theta\}}.$$

Nous supposons k moindre que l'unité, car dans le cas contraire ω sera une quantité imaginaire.

Cela posé, considérons les équations 249. En remarquant que $c_1 = c = 1$, on en tire

$$\sqrt{\frac{(1-y)}{(1+y)}} = \frac{t}{t_1} \cdot \sqrt{\frac{(1-x)}{(1+x)}},$$

où

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + c\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right) + x} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right) + x} \dots \frac{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) - x}{\varphi\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right) + x},$$

c'est-à-dire en faisant $\alpha = \frac{2m\alpha}{2n+1}$ et $m = -1$:

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) + x}{\varphi\left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) - x} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) - x}{\varphi\left(\frac{2n-3}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) + x} \dots \frac{(-1)^n \cdot \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) - x}{(-1)^n \cdot \varphi\left(\frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) + x}.$$

Maintenant on a

$$x = (-1)^n \cdot \sin \theta, \text{ et } \varphi\left(\frac{m}{2n+1} \cdot \frac{\omega}{2}\right) = \sin \theta^{(m)},$$

donc en substituant:

$$\sqrt{\frac{(1-\sin \psi)}{(1+\sin \psi)}} = \sqrt{\frac{(1-(-1)^n \sin \theta)}{(1+(-1)^n \sin \theta)}} \cdot \frac{\sin \theta' - \sin \theta}{\sin \theta' + \sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta'' + \sin \theta}{\sin \theta'' - \sin \theta} \dots \frac{\sin \theta^{(2n-1)} + (-1)^n \sin \theta}{\sin \theta^{(2n-1)} - (-1)^n \sin \theta},$$

et de là

$$\begin{aligned} & \tan(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi) \\ &= \frac{\tan \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta)}{\tan \tfrac{1}{2}(\theta + \theta)} \cdot \frac{\tan \tfrac{1}{2}(\theta'' + \theta)}{\tan \tfrac{1}{2}(\theta'' - \theta)} \dots \frac{\tan \tfrac{1}{2}(\theta^{(2n-1)} + (-1)^n \theta)}{\tan \tfrac{1}{2}(\theta^{(2n-1)} - (-1)^n \theta)} \tan[45^\circ - (-1)^n \theta]. \end{aligned}$$

C'est précisément la formule de Mr. Jacobi.

Dans la formule (1.), on peut toujours supposer le second membre positif. En effet, en différentiant, on aura

$$\pm \partial \psi = \frac{\sqrt{(1-\lambda^2 \sin^2 \psi)}}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \theta)}} \cdot \partial \theta.$$

En supposant θ toujours croissant, le second membre sera toujours positif. Donc en déterminant la valeur ψ de sorte qu'elle soit croissante et décroissante en même tems avec θ , on doit prendre le signe supérieur. On a donc

$$\int_0 \frac{\partial \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \mu \int_0 \frac{\partial \psi}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \psi}},$$

ou bien

$$F(k, \theta) = \mu \cdot F(\lambda, \psi).$$

De la remarque que ψ doit être croissant et décroissant en même tems avec θ , et en ayant égard à la formule, on tirera aisément la conséquence que ψ doit tomber entre $\frac{m}{2}\pi$ et $\frac{m+1}{2}\pi$, si θ tombe entre $\theta^{(m)}$ et $\theta^{(m+1)}$

Quant aux quantités λ et μ , il est évident qu'elles ont nécessairement les mêmes valeurs que celles de Mr. Jacobi. Mais les expressions que j'ai données seront plus commodes pour l'application, et font voir clairement que λ est extrêmement petit, si h est un peu grand. Au reste on peut sans difficulté démontrer leur identité à l'aide de la formule 257.

15.

Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés.

(Par Mr. C. G. J. Jacobi, prof. en phil. à Königsberg.)

Soit n un nombre impair quelconque, on sait que $4n$ peut être décomposé en quatre carrés impairs.

S'il s'agit de tous les quatre nombres possibles a, b, c, d , tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4n$, une même décomposition en quatre carrés différents entre eux, donnera $24 = 1.2.3.4$ manières de déterminer a, b, c, d . Si deux de ces carrés sont égaux, ce nombre se réduit à $12 = \frac{1.2.3.4}{1.2}$. Si encore les deux autres sont égaux, le nombre sera $6 = \frac{1.2.3.4}{1.2.1.2}$, et il sera $4 = \frac{1.2.3.4}{1.2.3}$, si trois des quatre carrés sont égaux; enfin il sera 1, si les carrés sont égaux tous les quatre.

Cela posé, je tire de la théorie des fonctions elliptiques le théorème suivant:

Soit n un nombre impair quelconque, si l'on peut trouver de m manières quatre nombres impairs a, b, c, d tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4n$, en ayant attention de compter une même solution autant de fois que les quatre carrés peuvent être permutés entre eux, m sera égal à la somme des facteurs du nombre n . Donc si, par exemple, n est un nombre premier, on aura $m = n + 1$.

Soit par exemple $n = 15$, on a $4.15 = 60 = 1 + 1 + 3^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2 + 1 + 3^2$. Puisque deux carrés dans ces deux solutions sont égaux entre eux, on a $m = 12 + 12 = 24$.

Ce théorème remarquable paroît être assez difficile à démontrer par les méthodes connues de la théorie des nombres. La démonstration fournie par la théorie des fonctions elliptiques est entièrement analytique.

1828. 24. Avril.

16.

Note sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. C. G. J. Jacobi, prof. en phil. à Königsberg. *)

(Extrait d'une lettre de l'auteur au rédacteur de ce journal sous le date de 2. Avril 1828.)

Je commence par rappeler ma notation dans la mémoire. Soit

$$\int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}} = \mu,$$

je désigne l'amplitudo φ par $\varphi = am \mu$. Puis je suppose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}} = K, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-k'^2 \sin^2 \varphi)}} = K',$$

où $k^2 + k'^2 = 1$, k' étant le complément de k .

Cela posé si l'on fait $e^{\frac{-K'\pi}{K}} = q$, je trouve entre autres

$$1. \sin am \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{k}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{4}} \sin x - q^{\frac{9}{4}} \sin 3x + q^{\frac{25}{4}} \sin 5x - q^{\frac{49}{4}} \sin 7x + \text{cet.}}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \text{cet.}}$$

Voilà encore d'autres formules:

$$2. \cos am \frac{2Kx}{\pi} = 2\sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)} \cdot \frac{q^{\frac{1}{4}} \cos x + q^{\frac{9}{4}} \cos 3x + q^{\frac{25}{4}} \cos 5x + q^{\frac{49}{4}} \cos 7x + \text{cet.}}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \text{cet.}},$$

$$3. \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 am \frac{2Kx}{\pi})} = \sqrt{(k')} \cdot \frac{1 + 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \text{cet.}}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \text{cet.}},$$

$$4. \tan \frac{1}{2} am \frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sin \frac{x}{2} + q \sin \frac{3x}{2} - q^3 \sin \frac{5x}{2} - q^6 \sin \frac{7x}{2} + q^{10} \sin \frac{9x}{2} - \text{ce.}}{\cos \frac{x}{2} - q \cos \frac{3x}{2} - q^3 \cos \frac{5x}{2} + q^6 \cos \frac{7x}{2} + q^{10} \cos \frac{9x}{2} - \text{cet.}},$$

*) J'ai lu dans le bulletin des sciences de Mr. le Baron de Ferussae, année 1828. cah. 3. page 162., qu'on attribue à trois Messieurs Jacobi, les articles inserés sous ce nom dans le présent journal. Il n'y en a que deux. Ce sont Mr. M. H. Jacobi à Potsdam, et Mr. J. G. Jacobi, docteur et professeur en philosophie à l'université de Königsberg dans la Prusse occidentale (il faut distinguer cette ville de celle du même nom dans le département de Francfort sur l'Oder, qui n'a pas d'université). Le premier de ces deux géomètres est l'auteur du mémoire No. 25. tome II. de ce journal, page 276. Tous les autres mémoires et notes dans ce journal qui portent le nom de Jacobi, ont pour auteur Monsieur le docteur et professeur J. G. Jacobi à Königsberg, qui est en même tems l'auteur des beaux travaux sur les fonctions elliptiques, inserés dans le journal de Mr. Schumacher et mentionnés si honorablement par Mr. Legendre. Je devoit cette notice au public et à Mr. Jacobi.

Les exposans des coefficients des trois premières formules sont les nombres carrés, ceux de la dernière formule les nombres trigonaux. Donc les séries convergent si rapidement, que leur calcul est très aisé.

De $q = e^{-\frac{K'\pi}{k}}$ on tire les séries suivantes pour k et K :

$$\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \text{cet.}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{k} = \frac{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + \text{cet.}}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \text{cet.}}$$

Je passe sous silence d'autres formules. Dans l'état actuel des choses on peut dire qu'une série soit sommée, si elle a été réduite aux fonctions elliptiques.

L'analyse se trouve extrêmement enrichie par là. Euler, par exemple, remarque dans son *introd.*, chapitre de *partitione numerorum* que le produit $(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\dots$ est égal à

$$1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^8 - q^{12} - q^{15} + q^{22} \dots,$$

où les exposans sont les nombres pentagonaux, résultat qu'il a démontré dans les *acta petrop.*, qui m'a toujours paru très remarquable et qui étoit un fait isolé dans l'analyse. Cette série peut être sommée par les fonctions elliptiques.

Si $q = e^{-\frac{K'\pi}{k}}$, je trouve

$$\sqrt{\frac{k^2}{q}} \sqrt[3]{2k'} \sqrt{\frac{K}{\pi}}.$$

Il existe encore nombre de résultats semblables.

D'ici on peut jeter un beau coup d'oeil sur la théorie de la transformation. Je ferois voir dans un mémoire plus étendu, non encore fini à mon grand regret, qu'un module donné peut toujours être transformé en $n+1$ autres, au moyen d'une substitution qui se rapporte au nombre n , ce nombre étant premier (voyez ma première lettre à Mr. Schumacher, no. 123. de son journal d'astronomie). Je trouve ces $n+1$ modules et les expressions qui s'y rapportent, en mettant

$$q^n, q^{\frac{1}{n}}, \alpha q^{\frac{1}{n}}, \alpha^2 q^{\frac{1}{n}}, \alpha^3 q^{\frac{1}{n}}, \dots, \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}} \text{ au lieu de } q, \text{ où } \alpha^n = 1.$$

Deux seulement de ces modules sont réels. Ils sont

$$\frac{1}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{q^{\frac{n}{4}} + q^{\frac{9n}{4}} + q^{\frac{25n}{4}} + q^{\frac{49n}{4}} + \dots}{1 + 2q^n + 2q^{4n} + 2q^{9n} + 2q^{16n} + \dots}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{\lambda} = \frac{q^{\frac{1}{4n}} + q^{\frac{9}{4n}} + q^{\frac{25}{4n}} + q^{\frac{49}{4n}} + \dots}{1 + 2q^{\frac{1}{n}} + 2q^{\frac{4}{n}} + 2q^{\frac{9}{n}} + 2q^{\frac{16}{n}} + \dots},$$

où λ est le module transformé. Si n n'est pas premier, il y en a encore plusieurs.

Le résultat suivant entre autres me semble remarquable. Il existe toujours une équation différentielle du troisième ordre entre deux modules k et λ , tels qu'ils peuvent être transformés l'un dans l'autre. Voici cette équation:

$$3\left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial k^2}\right)^2 - 2\frac{\partial \lambda}{\partial k} \cdot \frac{\partial^3 \lambda}{\partial k^3} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial k}\right)^2 \left\{ \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2 - \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}\right) \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial k}\right)^2 \right\} = 0,$$

ou ∂k est constant. On voit que cette équation différentielle admet un nombre infini de solutions algébriques, savoir toutes les équations algébriques entre les modules qui se rapportent aux transformations de divers ordres. Mais ce ne sont que de solutions particulières. Ce sont les transcendentes elliptiques, qui offrent la solution générale. Si l'on suppose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-\lambda^2 \sin^2 \varphi^2)}} = A, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-\lambda'^2 \sin^2 \varphi^2)}} = A',$$

où $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$, comme ci dessus, on a

$$\frac{A'}{A} = \frac{mK + m'K'}{pk + p'k'},$$

ou m, m', p, p' sont des constantes arbitraires. Ces équations à modules qui d'après ce qui a été dit plus haut, s'élèvent au degré $n+1$, n étant un nombre premier, ont trois propriétés essentielles. Ils restent invariables

- 1) si l'on change k et λ ,
- 2) en posant k' et λ' au lieu de k et λ ,
- 3) en mettant $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{\lambda}$ au lieu de k et λ .

Il est d'ailleurs remarquable, qu'elles prennent la forme la plus simple pour la racine quatrième des modules. Si par exemple on met $\sqrt[4]{k} = u$, $\sqrt[4]{\lambda} = v$, on trouve

$$u^4 - v^4 - 2uv(1 - u^2v^2) = 0, \text{ pour } n = 3,$$

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) - 4uv(1 - u^4v^4) = 0, \text{ pour } n = 5.$$

Donc il faut que ces équations satisfassent à l'équation différentielle rapportée ci-dessus.

J'ajoute encore une remarque.

Mr. Abel a proposé tome II. page 286. de ce journal le théorème suivant:

„Si l'équation différentielle séparée

$$\frac{a \partial x}{\sqrt{(a + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(a + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)}},$$

„où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont réelles, est algébriquement intégrable, il faut nécessairement, que la quantité a soit un nombre rationnel.”

On voit sans peine que ce théorème est semblable à celui de la trigonométrie analytique, savoir que n doit être un nombre rationnel, si l'on veut que $\sin nx$ puisse être exprimé algébriquement par $\sin x$. Mais il faut étendre ce théorème beaucoup plus pour les fonctions elliptiques. Il existe un nombre infini d'échelles de modules pour lesquelles a peut aussi avoir la forme $a + b\sqrt{-1}$. Ce sont tous ceux, où le module par la transformation se change dans son complément. Un de ces modules p. ex. est $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Cette nouvelle méthode de la multiplication est encore remarquable, parcequ'elle a lieu dans les cas, où la transformation rentre dans la multiplication, c'est-à-dire où le module transformé devient égal à celui d'où l'on est parti. Par exemple pour $n = 5$, $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\mu = \sqrt[8]{\frac{1}{2}}$, on trouve que l'équation

$$u^6 - v^6 + 5u^2v^2(u^2 - v^2) - 4uv(1 - u^2v^2) = 0$$

a la racine $v = (1 + \sqrt{-1})u^5$, d'où l'on tire $v^8 = \lambda^2 = \frac{1}{2}$, de sorte qu'on a ici $\lambda^2 = k^2$. Tout cela découle immédiatement des principes établis par Mr. Abel.

17.

Geometrische Sätze.

(Von Herrn Th. Clausen zu Altona.)

1.

„Aus einem beliebigen Punkte E (Fig. 2.) der Peripherie eines Kreises, der mit dem um ein Dreieck beschriebenen concentrisch ist, fälle man auf die 3 Seiten des Dreiecks die Senkrechten EA , EB , ED ; das Verhältniß der Dreiecke abc und ABD zu finden.“

Es bedeute a , a' etc. die Länge der Bögen zwischen einem beliebigen Anfangspunkte und den mit den resp. Buchstaben bezeichneten Punkten. Der Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises sei $= 1$; der Halbmesser des Kreises, worin der Punct E liegt, sei $= k$. Die aus dem Mittelpunkte des Kreises auf die Seiten des Dreiecks gefällten Senkrechten schneiden den äußern Kreis in den Punkten a' , b' , c' , so ist:

$$a' = \frac{a+b}{2}; \quad a = +a' - b' + c';$$

$$b' = \frac{b+c}{2}; \quad b = +a' + b' - c';$$

$$c' = \frac{c+a}{2}; \quad c = -a' + b' + c';$$

Der Inhalt des Dreiecks abc sei $= I$, so ist

$$I = \frac{1}{2} \{ \sin(a-c) + \sin(b-a) + \sin(c-b) \},$$

$$I = \frac{1}{2} \{ \sin 2(a'-b') + \sin 2(b'-c') + \sin 2(c'-a') \}.$$

Man sieht noch leicht, dafs:

$$EA = \cos(b-a') - k \cdot \cos(d-a');$$

$$EB = \cos(c-b') - k \cdot \cos(d-b');$$

$$EC = \cos(a-c') - k \cdot \cos(d-c');$$

und dafs also der doppelte Inhalt des Dreiecks $ABD = 2i$, oder die Summe der doppelten Inhalte der Dreiecke AEB , BED , DEA

$$\begin{aligned} 2i &= \{ \cos(b'-c') - k \cdot \cos(d-a') \} \cdot \{ \cos(c'-a') - k \cdot \cos(d-b') \} \sin(b'-a') \\ &+ \{ \cos(c'-a') - k \cdot \cos(d-b') \} \cdot \{ \cos(a'-b') - k \cdot \cos(d-c') \} \sin(c'-b') \\ &+ \{ \cos(a'-b') - k \cdot \cos(d-c') \} \cdot \{ \cos(b'-c') - k \cdot \cos(d-a') \} \sin(a'-c'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2i &= \cos(b'-c') \cos(c'-a') \sin(b'-a') \\
&\quad + \cos(c'-a') \cos(a'-b') \sin(c'-b') \\
&\quad + \cos(a'-b') \cos(b'-c') \sin(a'-c') \\
&- k \left\{ \begin{aligned} &\sin(b'-a') [\cos(d-a') \cos(c'-a') + \cos(d-b') \cos(b'-c')] \\ &+ \sin(c'-b') [\cos(d-b') \cos(a'-b') + \cos(d-c') \cos(c'-a')] \\ &+ \sin(a'-c') [\cos(d-c') \cos(b'-c') + \cos(d-a') \cos(a'-b')] \end{aligned} \right\} \\
&+ k^2 \left\{ \begin{aligned} &\cos(d-a') \cos(d-b') \sin(b'-a') \\ &+ \cos(d-b') \cos(d-c') \sin(c'-b') \\ &+ \cos(d-c') \cos(d-a') \sin(a'-c') \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

und nach einer leichten Reduction:

$$\begin{aligned}
2i &= \frac{1}{2} \{ \cos(c'-a') \sin(c'-a') + \cos(a'-b') \sin(a'-b') + \cos(b'-c') \sin(b'-c') \} \\
&- k \{ \cos(d-a') \sin(b'-c') + \cos(d-b') \sin(c'-a') + \cos(d-c') \sin(a'-b') \} \\
&+ k^2 \left\{ \begin{aligned} &\cos(d-a') \cos(d-b') \sin(b'-a') \\ &+ \cos(d-b') \cos(d-c') \sin(c'-b') \\ &+ \cos(d-c') \cos(d-a') \sin(a'-c') \end{aligned} \right\}.
\end{aligned}$$

Es ist aber allgemein:

$$\begin{aligned}
&\cos A \sin(C-B) + \cos B \sin(A-C) + \cos C \sin(B-A) = 0, \\
&\cos(A+B) \sin(A-B) + \cos(B+C) \sin(B-C) + \cos(C+A) \sin(C-A) = 0, \\
&\cos(A-B) \sin(A-B) + \cos(B-C) \sin(B-C) + \cos(C-A) \sin(C-A) \\
&\quad = \frac{1}{2} \{ \sin 2(A-B) + \sin 2(B-C) + \sin 2(C-A) \};
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
&\cos A \cos B \sin(A-B) + \cos B \cos C \sin(B-C) + \cos C \cos A \sin(C-A) \\
&\quad = \frac{1}{4} \{ \sin 2(A-B) + \sin 2(B-C) + \sin 2(C-A) \}.
\end{aligned}$$

Dadurch verwandelt sich der Ausdruck von i in

$$2i = \frac{1}{2} I - \frac{1}{2} k^2 I,$$

oder

$$i = \frac{1}{4} (1 - k^2) I.$$

2.

„In einem Dreiecke ABC (Fig. 3.) sei $AF = k \cdot AB$, $BD = k \cdot BC$, $CE = k \cdot CA$: den Inhalt der verschiedenen durch die Durchschnitte der Linien AD , BE , CF entstandenen Dreiecke zu finden.“

Seien die Winkel

$$CAB = a,$$

$$ABC = b,$$

$$BCA = c,$$

und der Durchmesser des umschriebenen Kreises = 1, so ist:

$$AB = \sin c; \quad AF = k \cdot \sin c;$$

$$BC = \sin a; \quad BD = k \cdot \sin a;$$

$$CA = \sin b; \quad CE = k \cdot \sin b;$$

$$\text{tang } DAB = \frac{BD \sin ABC}{AB - BD \cos ABC} = \frac{k \sin a \sin b}{\sin c - k \sin a \cos b},$$

$$\text{tang } AFC = \frac{AC \sin BAC}{AF - AC \cos BAC} = \frac{\sin a \sin b}{k \sin c - \cos a \sin b}.$$

Es ist aber

$$AI = \frac{AF \sin AFI}{\sin(DAB + AFC)},$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \Delta AFI &= AF \cdot AI \sin DAB = \frac{AF^2 \sin DAB \sin AFC}{\sin(DAB + AFC)} \\ &= AF^2 \frac{\text{tang } DAB \text{ tang } AFC}{\text{tang } DAB + \text{tang } AFC} \\ &= \frac{k^3 \sin a^2 \sin b^2 \sin c^2}{\sin a \sin b \sin c - (\sin a \cos a \sin b^2 + \sin a^2 \sin b \cos b)k + \sin a \sin b \sin c \cdot k^2}. \end{aligned}$$

Da aber $c = 180 - a - b$, so ist $\sin c = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, und also

$$2 \Delta AFI = \frac{k^3}{1 - k + k^2} \sin a \sin b \sin c = 2 \cdot \frac{k^3}{1 - k + k^2} \Delta ABC,$$

oder

$$(1.) \quad \Delta AFI = \frac{k^3}{1 - k + k^2} \cdot \Delta ABC \dots$$

Da dieser Werth in Beziehung auf die drei Seiten symmetrisch ist; so sind die beiden Dreiecke HEC und GDB dem Dreiecke AFI gleich.

Es ist ferner $\Delta AFC = k \Delta ABC$, also

$$\begin{aligned} (2.) \quad AEHI &= CDGH = BGIF = \left(k - \frac{2k^3}{1 - k + k^2}\right) \Delta ABC \\ &= \frac{k - k^2 - k^3}{1 - k + k^2} \cdot \Delta ABC. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.) \quad \Delta GHI &= \left(1 - 3 \cdot \frac{k^3}{1 - k + k^2} - 3 \cdot \frac{k - k^2 - k^3}{1 - k + k^2}\right) \Delta ABC \\ &= \left(\frac{1 - 4k + 4k^2}{1 - k + k^2}\right) \Delta ABC. \end{aligned}$$

Wenn $k = \frac{1}{2}$, so ist der Inhalt des Dreiecks $GHI = 0$, oder die Linien AD , BE , CF schneiden sich in diesem Falle in einem Punkte; welches auch sonst bekannt ist.

18.

Bemerkung über ein Polyëder.

(Von einem Ungenannten.)

Es seien sieben Punkte $p_1, p_2, \dots, p_7$ im Raume gegeben, von welchen dreimal vier in einer Ebene liegen (wie dies bei jeden sieben Eckpunkten eines sechseitigen und achteckigen Körpers der Fall ist), und zwar liegen $p_1 p_2 p_3 p_5$; $p_1 p_2 p_4 p_6$ und $p_1 p_3 p_4 p_7$ in einer Ebene. Nimmt man diese Ebenen zu Coordinaten-Ebenen, bezeichnet dem gemäß die Coordinaten

$$\begin{array}{ll} \text{von } p_1 \text{ durch } 0, 0, 0, & \text{von } p_5 \text{ durch } 0, \beta', \alpha', \\ p_2 & - \quad 0, 0, \alpha, & p_6 & - \quad \gamma'', 0, \alpha'', \\ p_3 & - \quad 0, \beta, 0, & p_7 & - \quad \gamma''', \beta''', 0, \\ p_4 & - \quad \gamma, 0, 0, \end{array}$$

und legt durch diese sieben Punkte eine Fläche der zweiten Ordnung, deren Gleichung, da sie durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, allgemein

(1.) $Az^2 + By^2 + Cx^2 + Dzy + Ezx + Fyx + Gz + Hy + Ix = 0$ ist; so hat man zur Bestimmung der Coefficienten folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} C\alpha^2 + I\alpha = 0, & C\alpha'^2 + B\beta'^2 + F\alpha'\beta' + H\beta' + I\alpha' = 0, \\ B\beta^2 + H\beta = 0, & A\gamma''^2 + C\alpha''^2 + E\alpha''\gamma'' + G\gamma'' + I\alpha'' = 0, \\ A\gamma^2 + G\gamma = 0, & A\gamma'''^2 + B\beta'''^2 + D\beta'''\gamma''' + G\gamma''' + H\beta''' = 0, \end{array}$$

woraus

$$\begin{array}{ll} I = -C\alpha, & F = \frac{B(\beta - \beta')}{\alpha'} + \frac{C(\alpha - \alpha')}{\beta'}, \\ H = -B\beta, & E = \frac{A(\gamma - \gamma'')}{\alpha''} + \frac{C(\alpha - \alpha'')}{\gamma''}, \\ G = -A\gamma, & D = \frac{A(\gamma - \gamma''')}{\beta'''} + \frac{B(\beta - \beta''')}{\gamma'''} \end{array}$$

folgt. Die Gleichung (1.) wird daher

$$\begin{aligned} (2.) \quad & \left[z + \frac{\gamma - \gamma'''}{\beta'''} y + \frac{\gamma - \gamma''}{\alpha''} x - \gamma \right] Az + \left[y + \frac{\beta - \beta'''}{\gamma'''} z + \frac{\beta - \beta'}{\alpha'} x - \beta \right] By \\ & + \left[x + \frac{\alpha - \alpha''}{\gamma''} z + \frac{\alpha - \alpha'}{\beta'} y - \alpha \right] Cx = 0. \end{aligned}$$

Legt man nun ferner durch die Punkte $p_4 p_6 p_7$, ferner $p_3 p_5 p_7$, ferner $p_2 p_5 p_6$ Ebenen, so findet man, daß ihre Gleichungen

$$(3.) \begin{cases} z + \frac{\gamma - \gamma'''}{\beta'''} y + \frac{\gamma - \gamma''}{\alpha''} x - \gamma = 0, \\ y + \frac{\beta - \beta'''}{\gamma'''} z + \frac{\beta - \beta'}{\alpha'} x - \beta = 0, \\ x + \frac{\alpha - \alpha''}{\gamma''} z + \frac{\alpha - \alpha'}{\beta'} y - \alpha = 0 \end{cases}$$

sind. Die Coordinaten des Durchschnittspuncts p_8 dieser drei Ebenen befriedigen aber diese Gleichungen zu gleicher Zeit, und reduciren also, wie man sieht, die Coefficienten von Az , By und Cx in der Gleichung (2.) auf Null. Es geht demnach die Fläche (2.) durch diesen Durchschnittspunct p_8 , welches folgenden Lehrsatz giebt:

Alle Flächen der zweiten Ordnung, welche durch sieben Eckpuncte eines von sechs Ebenen begrenzten achteckigen Körpers (*Hexaëdre-octogone*) gehen, gehen auch durch den achten Eckpunct dieses Körpers.

Hieraus fließt, als ein besonderer Fall, der nachfolgende Satz:

Wenn man auf einer Kugelfläche, oder in einer Ebene, drei Kreise k_1, k_2, k_3 beschreibt, die sich in einem und demselben Puncte p_1 , und auferdem zu zweien, nämlich k_1 und k_2 in p_2 , k_1 und k_3 in p_3 und k_2 und k_3 in p_4 , schneiden; wenn man ferner auf einer jeden dieser Kreislinien einen Punct, auf k_1 , p_5 , auf k_2 , p_6 und auf k_3 , p_7 beliebig annimmt; so schneiden sich die drei, respective durch die Puncte p_2, p_5 und p_6 ; p_3, p_5 und p_7 ; und p_4, p_6 und p_7 gehende Kreise in einem und demselben Puncte p_8 .

19.

Bemerkungen zu der zweiten Aufgabe *) in der
Abhandlung No. 17. in diesem Hefte.

(Von Herrn J. Steiner zu Berlin.)

1) Diese Aufgabe gehört zu einer Abtheilung von Elementar-Aufgaben, die die Pestalozzische Schule wegen mancherlei pädagogischer Vorzüge sehr in Betracht zog, und die der Director der Gewerbschule zu Berlin, Herr Kloeden, besonders sehr ausgebildet hat, und bei seinem Unterricht mit dem besten Erfolg ausübt. Nach dieser Elementarübung wird die obige Aufgabe ohne Hülfe trigonometrischer Functionen gelöst; auch kann sie allgemeiner gestellt werden, so daß die obige nur als ein einzelner Fall erscheint, nämlich wie folgt:

2) „Es seien die Seiten des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 4.) auf irgend eine Weise getheilt, z. B. so, daß $AF = \alpha \cdot AB$; $BD = \beta \cdot BC$; $CE = \gamma \cdot CA$. Man soll den Flächeninhalt eines jeden der sieben Stücke angeben, in welche das Dreieck durch die drei Geraden AD , BE , CF getheilt wird.“

Wenn die Gerade EG mit AB parallel, so ist $CE:CA = EG:AF$, und daher

$$EG = \gamma \cdot AF = \gamma \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot BF,$$

und da aus denselben Gründen $EG:BF = EH:HB$, so ist eben so

$$EH = \gamma \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot HB,$$

und daher

$$EB (= EH + HB) = \left(1 + \gamma \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) HB = \frac{1-\alpha+\alpha\gamma}{1-\alpha} HB,$$

folglich

$$\frac{EH}{EB} = \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma},$$

und da die Dreiecke c und CEB sich wie ihre Grundlinien EH , EB verhalten, so ist

$$c = \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma} \cdot CEB.$$

Wird nun der Inhalt des gegebenen Dreiecks durch Δ dargestellt, so ist $CEB = \gamma \cdot \Delta$, und daher:

*) In Hinsicht der ersten Aufgabe kann verglichen werden Bd. II. S. 265. d. Journ.

$$1. \quad c = \frac{\alpha\gamma^2}{1-\alpha+\alpha\gamma} \cdot \Delta,$$

und vermöge der Analogie hat man eben so:

$$2. \quad b = \frac{\gamma\beta^2}{1-\gamma+\gamma\beta} \cdot \Delta,$$

$$3. \quad a = \frac{\beta\alpha^2}{1-\beta+\beta\alpha} \cdot \Delta.$$

Da z. B. das Viereck $d = AFC - c - a$, so hat man ferner (weil $AFC = \alpha \cdot \Delta$):

$$4. \quad d = \alpha \left(1 - \frac{\gamma^2}{1-\alpha+\alpha\gamma} - \frac{\beta\alpha}{1-\beta+\beta\alpha} \right) \cdot \Delta,$$

desgleichen

$$5. \quad e = \beta \left(1 - \frac{\alpha^2}{1-\beta+\beta\alpha} - \frac{\gamma\beta}{1-\gamma+\gamma\beta} \right) \cdot \Delta,$$

$$6. \quad f = \gamma \left(1 - \frac{\beta^2}{1-\gamma+\gamma\beta} - \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha+\alpha\gamma} \right) \cdot \Delta.$$

Endlich ist das Dreieck $g = \Delta - AFC - BDA - CEB + a + b + c$, daher

$$\begin{aligned} 7. \quad g &= \left(1 - \alpha - \beta - \gamma + \frac{\beta\alpha^2}{1-\beta+\beta\alpha} + \frac{\gamma\beta^2}{1-\gamma+\gamma\beta} + \frac{\alpha\gamma^2}{1-\alpha+\alpha\gamma} \right) \cdot \Delta \\ &= \left(1 - \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\gamma} - \frac{1-\beta}{1-\beta+\beta\alpha} - \frac{1-\gamma}{1-\gamma+\gamma\beta} \right) \cdot \Delta \end{aligned}$$

Schneiden die drei Geraden AD , BE , CF einander in einem Punkte, so ist $g = 0$, und für diesen Fall hat man also die Bedingungsgleichung

$$8. \quad \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha\gamma} + \frac{1-\beta}{1-\beta+\beta\alpha} + \frac{1-\gamma}{1-\gamma+\gamma\beta} = 1,$$

oder auch

$$9. \quad \alpha\beta\gamma = (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma).$$

3) Der angeführte Satz entspringt aus dem vorstehenden, wenn man $\alpha = \beta = \gamma$ setzt. Für diesen besonderen Fall hat man:

$$10. \quad a = b = c = \frac{\alpha^3}{1-\alpha+\alpha^2} \cdot \Delta \quad (1., 2., 3.),$$

$$11. \quad d = e = f = \frac{\alpha(1-\alpha-\alpha^2)}{1-\alpha+\alpha^2} \cdot \Delta \quad (4., 5., 6.),$$

$$\begin{aligned} 12. \quad g &= \left(1 - 3\alpha + 3 \frac{\alpha^3}{1-\alpha+\alpha^2} \right) \cdot \Delta \quad (7.) \\ &= \frac{1-4\alpha+4\alpha^2}{1-\alpha+\alpha^2} \cdot \Delta. \end{aligned}$$

4) Neulich wurden im XVIII. Bande der *Annales de mathématiques* des Herrn Gergonne einige Aufgaben untersucht, welche den vor-

stehenden ähnlich sind, sich eben so leicht lösen lassen, und aus denen ich die vorzüglichsten Resultate hierher setzen will.

Wenn man nemlich im Innern eines Dreiecks mit dessen Seiten drei Geraden parallel zieht *), so daß die Fläche desselben in 7 Stücke getheilt wird, nemlich in ein dem gegebenen ähnliches und ähnlich liegendes Dreieck Δ , in drei Parallelogramme a, b, c und in drei, diesen respective gegenüberliegende Paralleltrapeze α, β, γ , so findet Herr Vallès folgende Gleichungen:

$$1. \quad \begin{cases} a = 2[\sqrt{(\Delta + \beta)} - \sqrt{\Delta}] [\sqrt{(\Delta + \gamma)} - \sqrt{\Delta}], \\ b = 2[\sqrt{(\Delta + \alpha)} - \sqrt{\Delta}] [\sqrt{(\Delta + \gamma)} - \sqrt{\Delta}], \\ c = 2[\sqrt{(\Delta + \alpha)} - \sqrt{\Delta}] [\sqrt{(\Delta + \beta)} - \sqrt{\Delta}], \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2a\alpha = bc + 2\sqrt{(2abc\Delta)}, \\ 2b\beta = ac + 2\sqrt{(2abc\Delta)}, \\ 2c\gamma = ab + 2\sqrt{(2abc\Delta)}, \end{cases}$$

$$3. \quad 4[\sqrt{(\Delta + \alpha)} - \sqrt{\Delta}] [\sqrt{(\Delta + \beta)} - \sqrt{\Delta}] [\sqrt{(\Delta + \gamma)} - \sqrt{\Delta}] = \sqrt{(2abc)},$$

$$4. \quad a[\sqrt{(\Delta + \alpha)} - \sqrt{\Delta}] = b[\sqrt{(\Delta + \beta)} - \sqrt{\Delta}] = c[\sqrt{(\Delta + \gamma)} - \sqrt{\Delta}],$$

$$5. \quad 2a\alpha - bc = 2b\beta - ac = 2c\gamma - ab. \quad (2.)$$

Setzt man $\Delta = 0$, d. h., nimmt man an, die drei Geraden schneiden einander in einem Punkte, so hat man z. B.

$$6. \quad a^2 = 4\beta\gamma; \quad b^2 = 4\alpha\gamma; \quad c^2 = 4\alpha\beta,$$

$$7. \quad abc = 8\alpha\beta\gamma.$$

Wenn man ähnlicher Weise im Innern einer dreiseitigen Pyramide mit deren Seitenflächen vier Ebenen parallel legt, so daß die Pyramide in 14 Theile getheilt wird, nemlich 1) in eine der gegebenen ähnliche und ähnlich liegende Pyramide p ; 2) in vier Parallelepipeden a, b, c, d ; 3) in vier den letzteren respective gegenüberliegende, mit ihren Grundflächen parallel abgestumpfte dreiseitige Pyramiden $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; und endlich 4) in sechs abgestumpfte Parallelepipeden, welche rücksichtlich ihrer Lage zwischen den Parallelepipeden (2.) durch $[ab], [ac], [ad], [bc], [bd], [cd]$ bezeichnet werden sollen; so hat man:

$$I. \quad \begin{cases} a = 6[\sqrt[3]{(p + \beta)} - \sqrt[3]{p}] [\sqrt[3]{(p + \gamma)} - \sqrt[3]{p}] [\sqrt[3]{(p + \delta)} - \sqrt[3]{p}], \\ \text{für } b, c, d \text{ analog.} \end{cases}$$

*) Zöge man drei Geraden, statt parallel mit den Seiten, so, daß sie die Seiten in irgend gegebenen Verhältnissen schnitten, so würde dieser Fall den gegenwärtigen und den obigen (2.) als besondere Fälle in sich enthalten, und nach Art des letzteren leicht gelöst werden können.

- II. $\left\{ \begin{array}{l} [ab] = 3[\sqrt[3]{p+\gamma} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{p+\delta} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{p+\gamma} + \sqrt[3]{p+\delta}], \\ \text{für } [ac], [ad], \dots \text{ analog.} \end{array} \right.$
- III. $\left\{ \begin{array}{l} 12a^2\alpha = 2bcd + \sqrt[3]{36a^2b^2c^2d^2p} + 6a\sqrt[3]{36abcdp^2}, \\ \text{für } \beta, \gamma, \delta \text{ analog.} \end{array} \right.$ Danach findet man $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
- IV. $\left\{ \begin{array}{l} 2ab[cd] = cd(a+b) + 2\sqrt[3]{6a^2b^2c^2d^2p}, \\ \text{für } [ab], [ac], \dots \text{ analog.} \end{array} \right.$
- V. $36[\sqrt[3]{p+\alpha} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{p+\beta} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{p+\gamma} - \sqrt[3]{p}][\sqrt[3]{p+\delta} - \sqrt[3]{p}]$
 $= \sqrt[3]{36a^2b^2c^2d^2}.$
- VI. $a[\sqrt[3]{p+\alpha} - \sqrt[3]{p}] = b[\sqrt[3]{p+\beta} - \sqrt[3]{p}] = c[\sqrt[3]{p+\gamma} - \sqrt[3]{p}]$
 $= d[\sqrt[3]{p+\delta} - \sqrt[3]{p}].$
- VII. $ab[cd] + cd[ab] = ac[bd] + bd[ac] = ad[bc] + bc[ad].$
- Setzt man $p=0$, d. h., nimmt man an, die vier genannten Ebenen schneiden einander in einem Punct, wodurch sich $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in Pyramiden verwandeln, die der gegebenen ähnlich sind, so hat man z. B.
- VIII. $a^3 = 216\beta\gamma\delta; \quad b^3 = 216\alpha\gamma\delta; \quad c^3 = 216\alpha\beta\delta; \quad d^3 = 216\alpha\beta\gamma.$
- IX. $[ab] = 3(\sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{\delta})\sqrt[3]{\gamma\delta}$, für die übrigen analog.
- X. $abcd = 1296\alpha\beta\gamma\delta.$
- IX. $6a^2\alpha = bcd; \quad 6b^2\beta = acd; \quad \text{etc.}$
- XII. $a^3\alpha = b^3\beta = c^3\gamma = d^3\delta.$
-

20.

Anmerkungen zu dem Aufsätze No. 18.

(Von Herrn J. Steiner zu Berlin.)

Aus dem hier bewiesenen Satze schließt man folgenden analogen Satz, nämlich:

„Dass jede Fläche zweiter Ordnung, welche sieben Seitenflächen eines von acht Ebenen begrenzten sechseckigen Körpers berührt, auch zugleich die achte Seitenfläche berühre.“

Denn nach einer gewissen Regel, welche die französischen Geometer „*théorie des polaires réciproques*“ nennen (von der ich an einem andern Orte handeln werde), und nach welcher die Dualität solcher Sätze erschlossen wird, folgt auch dieser Satz unmittelbar aus jenem. Der gegenwärtige kann aber auch ausserdem, wie folgt, aus jenem hergeleitet werden.

In jeder Ecke des genannten Körpers stoßen vier Seitenflächen zusammen. Die in irgend einer Ecke zusammenstossenden Seitenflächen sollen der Ordnung nach durch A_1, A_2, A_3, A_4 und die ihnen gegenüberliegenden Seitenflächen durch A_5, A_6, A_7, A_8 bezeichnet werden. Die Ecken des Körpers lassen sich dadurch, mit Rücksicht auf die Seitenflächen, die darin zusammenstoßen, durch $E(1234), E(1278), E(2358), E(3465), E(4176), E(5678)$ bezeichnen. Endlich sollen die Punkte, in welchen irgend eine Fläche F zweiter Ordnung, z. B. die sieben Seitenflächen $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ berührt, $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7$ heißen.

Man weiß: „dass die Berührungspunkte aller Ebenen, welche durch einen und denselben Punkt gehen und eine Fläche zweiter Ordnung berühren, auf die Peripherie eines Kegelschnitts beschränkt sind, und dass umgekehrt: alle Ebenen, deren Berührungspunkte mit einer Fläche zweiter Ordnung auf einen Kegelschnitt beschränkt sind, einander in einem und demselben Punkte schneiden.“

Daher folgt also, dass vermöge der Ecken $E(1234), E(3465), E(4176)$, sowohl die vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 ; als p_3, p_4, p_6, p_5 ; als p_4, p_1, p_7, p_6

in einer Ebene (in einem ebenen Schnitt der Fläche F) liegen; und daher giebt es, nach dem oben erwähnten Satze, noch einen bestimmten achten Punct p_8 , welcher ebenfalls in der Fläche F liegt, und zwar so, daß er sowohl mit den drei Puncten p_1, p_2, p_7 ; als p_2, p_3, p_5 ; als p_5, p_6, p_7 in einem ebenen Schnitt der Fläche liegt. Aus dem Letzteren folgt ferner, nach dem vorstehenden Hülfsatz, daß die in p_8 an die Fläche F gelegte Berührungsebene sowohl durch den Durchschnittspunct der drei Ebenen A_1, A_2, A_7 ; als A_2, A_3, A_5 ; als A_5, A_6, A_7 gehen muß, d. h., daß sie durch die Ecken $E(1278), E(2358), E(5678)$ gehen muß, folglich fällt sie mit der Seitenfläche A_8 zusammen, und folglich wird auch diese Seitenfläche A_8 von der Fläche F berührt, w. z. b. w.

Ich erwähne bei dieser Gelegenheit noch folgender zwei interessanten Sätze, welche Herr Bobillier im XVII. Bande der *Annales* des Herrn Gergonne, durch eine sehr einfache und geschickt geführte Rechnung bewiesen hat, nämlich:

I. „Die Mittelpuncte aller Flächen zweiter Ordnung, welche sieben gegebene Ebenen berühren, liegen in einer bestimmten Ebene.“

II. „Die Mittelpuncte aller Flächen zweiter Ordnung, welche acht gegebene Ebenen berühren, liegen in einer bestimmten Geraden.“

In einer späteren Abhandlung desselben Verfassers (Bd. XVIII. S. 253.) fließen diese Sätze als sehr specielle Fälle aus allgemeineren Sätzen über algebraische Flächen aller Ordnungen. Den Untersuchungen des Herrn Bobillier geht ein Memoire von Herrn Gergonne, betitelt: *Recherches sur quelques lois générales qui regissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres* voran (Bd. XVII. S. 214. und 229.). Diese Arbeiten sind ihrer Allgemeinheit und Einfachheit wegen in Beziehung auf geschickte analytische Behandlung geometrischer Gegenstände von großem Interesse, und verdienen deshalb besondere Berücksichtigung.

21.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Von Herrn J. Steiner zu Berlin.)

11. **Lehrsatz.** Setzt man zur Abkürzung

$$z(z+1)(z+2)\dots(z+r-1) = z^{r|1},$$

so hat man für die Summe gleich hoher Potenzen der natürlichen Zahlen folgende Ausdrücke*), nämlich:

$$\begin{aligned} \text{I. } & 1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1} + 4^{2n+1} + \dots + x^{2n+1} = {}^1\Sigma x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2} (x-n)^{2n+2|1} + 1^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2n} (x-n+1)^{2n|1} + 1^2 \cdot 1^2 \\ 2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \\ 3^2 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \\ \vdots \\ n^2 \cdot (n-1)^2 (n-1)^2 \end{array} \right| \frac{1}{2n-2} (x-n+2)^{2n-2|1} \\ &+ 1^2 \cdot 1^2 \cdot 1^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2n-4} (x-n+3)^{2n-4|1} + \dots + (1^2)^{n-1} \\ 1^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \\ \vdots \\ (n-2)^2 (n-2)^2 (n-2)^2 \end{array} \right| \frac{1}{4} (x-1)^{4|1} + (1^2)^n \frac{1}{2} x^{2|1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{II. } & 1^{2n+2} + 2^{2n+2} + 3^{2n+2} + 4^{2n+2} + \dots + x^{2n+2} = {}^1\Sigma x^{2n+2} \\ &= \frac{2x+1}{2} \left[\frac{1}{2n+3} (x-n)^{2n+3|1} + 1^2 \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2n+1} (x-n+1)^{2n|1} + 1^2 \cdot 1^2 \\ 2^2 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \\ 3^2 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \\ \vdots \\ n^2 \cdot (n-1)^2 (n-1)^2 \end{array} \right| \frac{1}{2n-1} (x-n+2)^{2n-2|1} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (1^2)^{n-1} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{5} (x-1)^{4|1} + (1^2)^n \frac{1}{3} (x)^{2|1} \end{array} \right| \right]. \end{aligned}$$

*) Der Herr Professor Schweins giebt in seiner Analysis elf verschiedene Summirungsweisen dieser Reihe; auch die vorliegende Summirungsweise gewinnt man nach der daselbst von dem genialen Verfasser angewandten sehr allgemeinen Summirungsmethode.

(Anm. des Herrn J. Steiner.)

Leitet man von der gegebenen Reihe (I., II.) neue Summenreihen ab, so hat man für die Summe der r ten abgeleiteten Reihe:

$$\text{III. } r \sum x^{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)^{r|1}} (x-n)^{2n+r+1|1} + 1^2 \left| \begin{array}{c} 2^2 \\ 3^2 \\ \vdots \\ n^2 \end{array} \right| \frac{1}{(2n)^{r|1}} (x-n+1)^{2n+r-1|1}$$

$$+ \begin{array}{c} 1^2 \cdot 1^2 \\ 1^2 \cdot 2^2 \\ 1^2 \cdot 3^2 \\ \vdots \\ (n-1)^2 (n-1)^2 \end{array} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{(2n-2)^{r|1}} (x-n+2)^{2n+r-3|1} + \dots + (1^2)^{n-1} \\ (1^2)^{n-2} \cdot (2^2)^1 \\ \vdots \\ (2^2)^{n-1} \end{array} \right| \frac{1}{(4)^{r|1}} (x-1)^{r+3|1} + (1^2)^n \cdot \frac{1}{(2)^{r|1}} (x)^{r+1|1}$$

und

$$\text{IV. } r \sum x^{2n+2} = \frac{2x+r}{2} \left[\frac{1}{(2n+3)^{r|1}} (x-n)^{2n+r+1|1} + 1^2 \left| \begin{array}{c} 2^2 \\ 3^2 \\ \vdots \\ n^2 \end{array} \right| \frac{1}{(2n+1)^{r|1}} (x-n+1)^{2n+r-1|1} \right.$$

$$+ \begin{array}{c} 1^2 \cdot 1^2 \\ 1^2 \cdot 2^2 \\ \vdots \\ (n-1)^2 (n-1)^2 \end{array} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{(2n-1)^{r|1}} (x-n+2)^{2n+r-3|1} + \dots + (1^2)^{n-1} \\ (1^2)^{n-2} \cdot (2^2)^1 \\ \vdots \\ (2^2)^{n-1} \end{array} \right| \frac{1}{(5)^{r|1}} (x-1)^{r+3|1} + (1^2)^n \cdot \frac{1}{(3)^{r|1}} (x)^{r+1|1} \Big].$$

Die Größen n , r sind als ganze positive Zahlen vorausgesetzt.

12. Lehrsatz. „Zieht man in einem gegebenen Kreise Sehnen, die sämtlich parallel sind, beschreibt über jeder, als Durchmesser genommen, einen Kreis, so wird jeder von diesen Kreisen (wozu auch der gegebene gehört) von einer bestimmten Ellipse eingeschlossen und in zwei Punkten berührt. Die Ellipse hat den mit den genannten Sehnen parallelen Durchmesser AB des gegebenen Kreises zur kleinen Axe, deren Quadrat gerade die Hälfte des Quadrats der großen Axe ist. Diejenigen Kreise jedoch, deren Durchmesser kleiner sind als $AB\sqrt{\frac{1}{2}}$, liegen innerhalb der Ellipse, ohne von ihr berührt zu werden.“

13. Lehrsatz. „Zieht man irgend eine Gerade AB , welche ein Paar gegenüber liegende Kanten einer gegebenen dreiseitigen Pyramide schneidet, und legt durch irgend einen Punct P derselben (AB) zwei

andere Geraden CD , EF , welche respective die beiden übrigen gegenüber stehenden Kantenpaare schneiden, so geht die Ebene der letzteren Geraden CD , EF beständig durch eine bestimmte Gerade A_1B_1 , welche ebenfalls das erste Kantenpaar schneidet, der Punkt P mag sich in der fixen Geraden AB bewegen, wie man will; und ferner: legt man durch AB irgend eine Ebene, deren Durchschnittspuncte mit dem zweiten und dritten Kantenpaar C_1, D_1 und E_1, F_1 heißen mögen, so fällt der Durchschnittspunct der Geraden C_1D_1 , E_1F_1 beständig in die Gerade A_1B_1 , die Ebene mag sich um die fixe Gerade AB drehen, wie man will."

14. Lehrsatz. „Nimmt man in der Peripherie eines Kegelschnitts irgend sechs beliebige Punkte A, B, C, D, E, F (Fig. 5.) an, so können sie auf drei Arten als drei und drei einander gegenüberliegend betrachtet werden, nämlich A, B, C und F, E, D ; B, C, D und A, F, E ; C, D, E und B, A, F . In jedem Falle bestimmen sie, paarweise genommen, wie sie einander gegenüber liegen, drei Vierecke, z. B. im ersten Falle $ABEF$, $ACDF$, $BCDE$. Die Durchschnittspuncte (G, H, I) der Diagonalen dieser drei Vierecke liegen in einer Geraden (GHI), und die auf diese Weise entstehenden drei Geraden GHI , KLM , NOP schneiden einander in einem einzigen Punkt Q ."

Dieser Satz ist nur ein Theil eines umfassenderen Satzes.

15. Lehrsatz. Zieht man in einem convexen Vieleck alle mögliche Diagonalen und verlängert alle Seiten, so daß alle diese Geraden wo möglich einander paarweise schneiden: so entstehen, im Allgemeinen, innerhalb des Vielecks gerade halb so viele Durchschnittspuncte als außerhalb. Z. B. beim 20Eck innerhalb 4845 und außerhalb 9690.

16. Lehrsatz. Bekanntlich können die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen von vier Kreisen berührt werden. Ist das Dreieck ein rechtwinkliges, so ist der Radius des Kreises über der Hypotenuse so groß als die Summe der Radien der drei übrigen Kreise; und ferner: bei dem bekannten Pythagorischen Dreieck, dessen Seiten, durch irgend eine Längeneinheit gemessen, 3, 4, 5 sind, sind die Radien jener Kreise, durch die nämliche Einheit gemessen 1, 2, 3, 6.

17. Lehrsatz. Sind A, B, C diejenigen drei Kreise, von denen jeder eine Seite eines gegebenen Dreiecks und die Verlängerung der beiden übrigen (Seiten) berührt, und man beschreibt drei andere Kreise a, b, c so, daß jeder zwei der drei ersteren äußerlich und den dritten in-

nerlich (einschliessend) berührt, so schneiden die drei letzteren einander in einem bestimmten Punkt P , und die Geraden, welche diesen Punkt mit den Mittelpunkten der drei ersteren Kreise verbinden, sind respective zu den Seiten des Dreiecks senkrecht.

18. Lehrsatz. Sind A, B, C, D diejenigen vier Kugeln, von denen jede eine Seitenfläche einer gegebenen dreiseitigen Pyramide und die Verlängerungen der drei übrigen berührt, und man beschreibt vier andere Kugeln a, b, c, d so, daß jede drei der vier ersteren äusserlich und die vierte innerlich berührt, so schneiden die vier letzteren einander in einem bestimmten Punkt P , und die Geraden, welche diesen Punkt mit den Mittelpunkten der vier ersteren Kugeln (A, B, C, D) verbinden, sind respective zu den Seitenflächen der Pyramide senkrecht.

Dieser und der vorige Satz sind nur Theile von umfassenderen Sätzen.

19. Lehrsatz. Es seien M_2, M_1 (Fig. 6.) irgend zwei Kreise (deren Durchmesser AB, CD), EF sei ihre Linie der gleichen Potenzen (siehe Bd. I. S. 165. d. Journ.), und M sei die Mitte ihrer grössten Entfernung AD von einander; beschreibt man irgend einen Kreis M , d. h. GHI oder $G_1 H_1 I_1$, und hierauf zwei andere Kreise m_2, m_1 so, daß beide zugleich innerhalb oder ausserhalb des Kreises M liegen und ihn berühren, und daß sie überdies die Gerade EF und respective die gegebenen Kreise M_2, M_1 berühren, so sind die zwei Kreise m_2, m_1 allemal einander gleich. *)

20. Lehrsatz. Drei unendliche Geraden, die ein Dreieck ABC einschliessen, theilen die Ebene in der sie liegen, in sieben Theile, nämlich in die Fläche E des Dreiecks, in drei Winkelräume E_1, E_2, E_3 und in drei über den Seiten des Dreiecks liegende Räume H_1, H_2, H_3 . Zieht man aus den Ecken des Dreiecks durch irgend einen Punkt P drei Gerade APA_2, BPB_2, CPC_2 die den gegenüber liegenden Seiten in A_2, B_2, C_2 begegnen, so liegen diese drei Punkte A_2, B_2, C_2 mit den Mitten A_1, B_1, C_1 der Seiten, allemal in irgend einem Kegelschnitt, und zwar in einer a) Ellipse, b) Hyperbel, oder c) Parabel, je nachdem der Punkt

*) Archimedes hat denjenigen besonderen Fall dieses Satzes bewiesen, wo die gegebenen Kreise M_2, M_1 einander (in B, C) berühren, und wo AD als Durchmesser des Kreises M angenommen wird. Ein arabischer Scholiast Alkauhi hat den Archimedischen Satz so weit verallgemeinert, daß er die erste Einschränkung aufhob (siehe Archim. Werke, übersetzt von Nizze, S. 256., Wahlsatz 5.). In dem letzteren Falle findet folgende besondere Eigenschaft statt: „Ist K (Fig. 7.) der äussere Aehnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise M_2, M_1 , so berührt sowohl der Kreis m , dessen Durchmesser MK ist, als derjenige Kreis $M(G_1 H_1 I_1)$, welcher die äussere gemeinschaftliche Tangente $KN_1 N_2$ der gegebenen Kreise berührt, die beiden Kreise m_2, m_1 .“

(Anm. des Herrn J. Steiner.)

P a) in einem der vier Räume E, E_1, E_2, E_3 , b) in einem der drei Räume H_1, H_2, H_3 , oder c) unendlich entfernt liegt (d. h. die Geraden AA_2, BB_2, CC_2 sind parallel).

Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines allgemeineren Satzes. Auch giebt es einen, diesem entgegengesetzten Satz.

21. Lehrsatz. Berühren die Seiten irgend eines Dreiecks eine gegebene Parabel, so schneiden die drei Geraden, welche die Berührungspunkte mit den gegenüber liegenden Ecken verbinden, einander in irgend einem Punct P ; und ferner: die Schwerpunkte aller Dreiecke, denen ein und derselbe Punct P in dieser Beziehung zugehört, liegen in einer bestimmten Geraden, und die um die Dreiecke beschriebenen Ellipsen, welche die respectiven Schwerpunkte zu Mittelpunkten haben, sind ähnlich und ähnlich liegend, und schneiden einander im Puncte P .

22. Lehrsatz. Beschreibt man um ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 8.) irgend einen Kegelschnitt, zieht aus den Ecken des ersteren durch irgend einen Peripheriepunct D des letzteren die Geraden ADA_1, BDB_1, CDC_1 , die den gegenüber liegenden Seiten in A_1, B_1, C_1 begegnen, so liegen die drei Puncte α, β, γ , in welche die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke $ABC, A_1B_1C_1$ einander schneiden, allemal in irgend einer Geraden, und diese Gerade $\alpha\beta\gamma$ geht beständig durch einen bestimmten fixen Punct Q ; und zieht man ferner aus den Ecken des gegebenen Dreiecks ABC durch die Mitten a, b, c der Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ die Geraden Aa, Bb, Cc , so treffen diese einander allemal in irgend einem Punct P , und der Ort dieses Puncts ist eine bestimmte Gerade.

23. Lehrsatz. Beschreibt man irgend einen Kegelschnitt DEF (Fig. 9.), welcher die Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt, legt an denselben irgend eine Tangente $A_1B_1C_1$, welche die Seiten des Dreiecks in A_1, B_1, C_1 schneidet, und zieht die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 , wodurch das Dreieck $\alpha\beta\gamma$ entsteht, so schneiden die drei Geraden $A\alpha, B\beta, C\gamma$ einander allemal in irgend einem Puncte Q , und der Ort dieses Puncts ist eine bestimmte Gerade; und zieht man ferner aus den Ecken des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ durch die Mitten a, b, c der Seiten des gegebenen Dreiecks ABC die Geraden $\alpha a, \beta b, \gamma c$, so treffen diese einander in irgend einem Punct P , und der Ort dieses Puncts ist ein bestimmter Kegelschnitt, welcher durch die drei Berührungspuncte D, E, F geht.

24. Lehrsatz. Schneidet man die drei Diagonalen AB , CD , EF eines gegebenen vollständigen Vierecks, gebildet durch die vier Geraden AE , AF , ED , CF (Fig. 10.), mit irgend einer Geraden ace (oder bdf) in den Punkten a , c , e (oder b , d , f), und bestimmt hierauf in jeder Diagonale den entsprechenden harmonischen Punkt b , d , f (oder a , c , e), d. h. so, daß z. B. $Aa:aB = Ab:Bb$, so liegen diese drei neuen Punkte allemal in irgend einer Geraden bdf (oder ace); und ferner: dreht sich die schneidende Gerade ace um irgend einen Punkt P , so bewegt sich die zugehörige (harmonische) Gerade bdf so, daß sie beständig irgend einen bestimmten Kegelschnitt berührt, der zugleich von den drei Diagonalen AB , CD , EF berührt wird; und auch umgekehrt.

25. Lehrsatz. Ein vollständiges Viereck von vier Punkten A , B , C , D (Fig. 11.) hat drei Paar einander gegenüber liegende Seiten (oder Diagonalen) AB und CD , AC und DB , AD und CB , die einander respective in den Punkten a , b , c schneiden. Zieht man aus irgend einem Punkte p nach jenen Punkten a , b , c die Geraden pa , pb , pc , und bestimmt hierauf bei jedem Punkte (a , b , c) die entsprechende vierte harmonische Gerade aq , bq , cq , d. h., eine solche Gerade, daß die durch denselben Punkt gehenden vier Geraden (z. B. aA , ap , aD , aq) ein harmonisches System bilden (d. h., daß sie jede Gerade, welche sie schneiden, harmonisch theilen), so treffen diese drei Geraden aq , bq , cq einander allemal in irgend einem Punkt q ; und ferner: bewegt sich der Punkt p in irgend einer Geraden, so beschreibt der Punkt q irgend einen Kegelschnitt, der allemal durch die drei Punkte a , b , c geht; und auch umgekehrt.

26. Aufgabe. Zwischen den Radien von fünf Kugeln, von denen jede zwei einander berühren, eine Relation zu finden. (Siehe Bd. I. S. 275. d. Journ.)

27. Aufgabe. Wenn vier gegebene Punkte in einer Ebene so liegen, daß kein anderer Kegelschnitt als Hyperbeln durch dieselben gehen kann [wie z. B. die Punkte A , E , F , B (Fig. 10.)], so soll unter allen diesen Hyperbeln diejenige gefunden werden, welche am meisten von der gleichseitigen abweicht.

(Von Herrn N. H. Abel zu Christiania in Norwegen.)

28. Aufgabe. Kann $\alpha^{\mu-1} - 1$, wenn μ eine Primzahl und α eine ganze Zahl und kleiner als μ und größer als 1 ist, durch μ^2 theilbar sein?

Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques;
pour faire suite au traité des propriétés projectives des figures,
et servir d'introduction à la Théorie générale des propriétés
projectives des courbes et surfaces géométriques. *)

Présenté à l'Académie royale des Sciences de l'institut de France le 8. Mars 1824, et approuvé le
22. Janvier 1826, par une commission composée de M. M. Legendre, Ampère et Cauchy
rapporteur.

(Par Mr. J. V. Poncelet, Capitaine au Corps Royal du Génie.)

Discours préliminaire.

Dans le Traité que j'ai publié**) l'année dernière sur les propriétés projectives des figures, je me suis moins attaché à faire un recueil de théorèmes et de problèmes de Géométrie, qu'à poser des principes généraux et féconds, à l'aide desquels on pût aborder les uns et les autres pour ainsi dire sans hésitation, et à la manière dont cela se pratique dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, dite Analyse des Coordonnées. Je crois avoir mis, en effet, tout lecteur géomètre en état de découvrir, par lui-même, et de démontrer au besoin, cette foule de propositions qui appartiennent aux figures composées, en général, de points, de droites, de sections coniques, de plans et de surfaces du second ordre quelconques, propositions qu'à cause de leur élégante simplicité et de leur utilité dans les arts, les anciens, aussi bien que les modernes, ont cultivées avec une sorte de prédilection, et qui pour la plupart et jusqu'à ces derniers temps, avoient été traitées par des méthodes si restreintes, si différentes les unes des autres et souvent si pénibles, qu'il étoit comme impossible d'en saisir l'ensemble et d'en deviner la commune origine.

Qu'il me soit permis ici de fixer un instant l'attention de l'Académie sur quelques uns de ces principes généraux, qu'on n'a point encore

*) Ce mémoire n'a été publié jusqu'ici.

Note du red.

**) Ce Mémoire, rédigé dans le courant de l'année 1823, a été remis à Mr. Arago vers la fin de Novembre, même année, lors de son séjour à Metz. On peut voir, à la page 349. du Tome XVI. des *Annales de Mathématiques*, publiées par M. Gergonne, le rapport qui en a été fait à l'Académie royale des sciences, par M. Cauchy.

Note de l'auteur.

assez appréciés peut-être, et qui me paroissent aussi neufs qu'importans en Géométrie; cet exposé succinct répandra quelque jour sur l'objet des recherches qui m'occupent actuellement, et m'y conduira de la manière la plus naturelle et la plus philosophique.

Parmi ces principes, je placerai en première ligne, par l'étendue des conséquences qui en dérivent, ceux qui se rattachent à la doctrine des projections, et à l'aide desquels on transforme des figures très générales en d'autres tout à fait particulières et vice versa; de telle sorte que les propriétés des unes étant connues, on en conclut, sur le champ, les propriétés des autres, du moins celles de ces propriétés dont la nature est assez générale pour se conserver dans les diverses projections centrales de la figure, et que, pour cette raison, j'ai nommées projectives dans l'ouvrage déjà cité.

Le caractère de ces sortes de propriétés n'étoit pas difficile à établir pour ce qui concerne les relations purement descriptives ou graphiques; il se reconnoit toujours au simple énoncé, et j'ai donné d'ailleurs les loix des modifications qu'il éprouve dans les cas particuliers où certains objets s'éloignent à l'infini, ou prennent des situations déterminées, telles que celles du parallélisme et de l'asymptotisme.

Quant aux relations purement métriques ou concernant les rapports de mesure de lignes, leur caractère de projectibilité, si je puis m'exprimer ainsi, ne pouvoit être présenté d'une manière entièrement générale, à cause de la complication des expressions, et j'ai dû me borner à l'établir pour une classe particulière de relations métriques, et cependant encore très étendue, puisqu'elle comprend tout ce qu'on connoît actuellement sur les propriétés projectives des figures, et qu'elle en indique une infinité d'autres qui ne le sont pas encore. J'ai même lieu de croire qu'il n'est aucune relation métrique projective, qui ne puisse être ramenée à cette classe particulière par des transformations convenables de calcul *). Mais cette restriction même est un grand avantage, puisqu'indépendamment du caractère de simplicité qu'elle imprime aux relations métriques, elle les rend encore aptes à demeurer applicables, non plus seulement aux projections ou perspectives ordinaires de la figure, mais aux projections sphériques faites du centre de la sphère et

*) Voyez la note II. à la fin de ce Mémoire.

pour lesquelles les simples distances sont remplacées par les sinus des arcs de grands cercles correspondans, et à cette espèce de projection beaucoup plus générale que j'ai nommée, faute d'expressions convenables, perspective dans un plan ou plane, et perspective dans l'espace ou en relief; genre de projections sur lesquelles on n'avoit encore rien donné, rien écrit, et qui mérite cependant toute l'attention des géomètres, et particulièrement celle des sculpteurs, qui manquent encore de préceptes rigoureux et généraux pour le tracé de cette espèce de tableaux qu'on est convenu de nommer bas-reliefs.

En effet, je crois avoir établi ces préceptes dans le supplément placé à la fin de mon ouvrage, et, de la même manière que j'avois montré, dès la première partie, comment, par la projection centrale ordinaire, on peut ramener les figures composées de sections coniques et de lignes concourantes, en d'autres beaucoup plus élémentaires composées uniquement de cercles et de droites parallèles, j'ai aussi établi, dans ce supplément, les moyens d'étendre aux surfaces du second ordre en général, et à l'aide de la perspective-relief, les propositions qui concernent simplement les sphères et systèmes de sphères; et je crois en avoir montré d'assez belles applications pour faire saisir l'esprit général de la méthode, et en faire apprécier toute l'utilité et l'importance.

Un autre principe très étendu, auquel peut-être on n'avoit pas assez accordé d'attention dans la Géométrie rationnelle, c'est le principe de continuité, en vertu duquel on donne aux différentes propositions de la Géométrie, l'extension et la généralité qui leur manquent d'ordinaire, d'après la manière restreinte dont il arrive souvent qu'on envisage les figures et les résultats des raisonnemens qu'on leur applique. L'admission et l'emploi de la loi de continuité m'étoient tout-à-fait indispensables pour donner aux principes de la doctrine des projections et aux diverses conséquences qui en dérivent, la certitude et l'étendue nécessaires, outre qu'ils offroient les moyens d'interpréter et d'introduire ouvertement en Géométrie, la considération des infinis et des imaginaires qui jouent un rôle si important et si nécessaire dans l'analyse algébrique, et on peut le dire, dans toutes les applications du calcul. La conséquence de l'admission de la continuité a été la théorie des sécantes et des cordes idéales et, de tout objet qui, sans cesser d'exister effectivement dans les transformations d'une même figure, a pourtant

cessé de dépendre d'une manière purement géométrique, d'autres objets auxquels il se rapportoit, et qui le définissoient ou le construisoient dans la figure primitive.

Enfin, je signalerai un dernier principe, que je n'ai pas dû ni voulu exposer avec toute sa généralité qui lui est propre, dans le *Traité des propriétés projectives*, et qui constitue ce que j'ai nommé la *Théorie des polaires réciproques*, par analogie à ce que les géomètres avoient déjà appelé le pôle et la polaire des lignes et des surfaces du second ordre.

Au premier aperçu, on pourroit croire que le principe dont il s'agit est moins général et moins vaste que les précédens, en ce qu'il ne constituerait qu'une théorie particulière relative aux lignes et aux surfaces du second ordre; mais on se tromperoit étrangement; car il est tel qu'au simple énoncé d'une proposition suffisamment générale de l'étendue, ou pour m'énoncer avec plus de précision, d'une relation projective et de situation, on est toujours en état d'en assigner, sur le champ, une autre toute différente, toute aussi générale et qu'il seroit souvent très difficile d'établir par des moyens directs, à moins toute fois que la proposée ne soit elle-même la réciproque, ce dont il y a des exemples.

J'ai exposé les premiers élémens de cette doctrine, ainsi généralisée, dans un numéro des *Annales de Mathématiques* *), en partant de quelques théorèmes déjà précédemment établis par les géomètres sur les pôles et polaires des lignes et surfaces du second ordre, théorèmes qui sont d'ailleurs une conséquence très simple des principes généraux de la projection centrale combinés avec la loi de continuité; et je ne connois que le Rédacteur de ce recueil, Mr. Gergonne, qui s'en soit servi depuis **) pour établir la proposition réciproque d'un fort beau théorème dû à Mr. Coriolis, répétiteur à l'école polytechnique, lequel s'étoit contenté simplement d'en faire insérer l'énoncé dans ces mêmes *Annales*.

Il me seroit impossible de donner ici une idée tant soit peu générale de la théorie des polaires réciproques, sans entrer dans des détails qui excéderaient les bornes que je me suis prescrites et que je ne dois pas dépasser quant à présent; je me contenterai donc de renvoyer aux ouvrages cités, en remarquant toute fois que je n'en ai présenté là qu'une

*) Tome VIII, année 1818, page 201.

**) *ibid.* Tome XI, année 1821, page 335.

indication très rapide, fort incomplète et qui suffisoit à l'objet des recherches que j'y avois en vue. Je n'y ai même fait mention uniquement que de ce qui concerne la réciprocité des relations graphiques ou descriptives qui subsistent entre la figure primitive et sa dérivée; or il est très facile d'étendre toute cette doctrine aux relations purement métriques qui rentrent dans la classe de celles que j'ai nommé projectives, et c'est ce que je me propose de faire bientôt, quand j'en viendrai à exposer les propriétés des lignes et des surfaces courbes géométriques, dont la démonstration repose nécessairement sur la théorie des polaires réciproques.

C'est là aussi que j'aurai occasion de développer, avec toute l'étendue qui leur est propre, les principes de la Théorie des transversales établis par Mr. Carnot dans la Géométrie de position, et que jusqu'ici on n'avoit guère appliqués qu'aux systèmes de lignes droites et aux sections coniques. J'ai dû me borner, dans le Traité des propriétés projectives, à faire voir comment les principes fondamentaux et déjà connus de cette théorie pourroient se démontrer directement à l'aide des considérations de la perspective ou projection centrale, et je devois éviter d'en déduire des conséquences des applications dont l'exposé eût pu paroître étranger au but général de l'ouvrage et m'eût entraîné dans des développemens trop considérables. Je ne saurois d'ailleurs me proposer, quant à présent, de présenter à l'académie, une notice, même sommaire, des résultats auxquels je suis ainsi parvenu; cette notice seroit ici prématurée et conviendra mieux à l'époque où je serai en situation de lui offrir le travail lui-même; mon but actuel est seulement de mettre sous ses yeux, un aperçu général des efforts que j'ai faits jusqu'à présent et que je me propose encore de faire, pour aggrandir le domaine, déjà si vaste, de la Géométrie rationnelle, et surtout pour lui créer des ressources, des méthodes universelles qui paraissent encore lui manquer, et sembleroient plus particulièrement appartenir à la Géométrie analytique.

En effet, on a dû s'apercevoir facilement, d'après ce qui précède, que la doctrine des propriétés projectives, celle de la perspective en relief, le principe ou la loi de continuité, enfin la Théorie des polaires réciproques et la Théorie des transversales étendue aux lignes et surfaces courbes, ne forment pas simplement des clas-

ses, plus ou moins étendues, de problèmes et de théorèmes, mais constituent proprement, pour la Géométrie pure, des principes, des méthodes d'investigation et d'invention, des moyens d'extension et d'exposition, dans le genre de ceux qu'on a nommés principes d'exhaustion, méthode des infiniment petits etc.

Dans la théorie des lignes et des surfaces géométriques, que je me propose de faire paraître par portions et successivement, je n'adopterai aucune de ces méthodes d'une manière exclusive; je les mettrai toutes indifféremment à contribution selon l'avantage qu'elles pourront offrir dans chaque cas, et je montrerai ainsi l'étendue des ressources qui leur sont propres, et des conséquences que l'on en peut déduire. Mais, comme la théorie des courbes et des surfaces géométriques est étroitement liée à la doctrine du centre des moyennes harmoniques, qui est proprement une généralisation de celle du centre des moyennes distances; que cette doctrine n'est point connue et n'a été enseignée nulle part, je débute par un premier mémoire qui en renferme les principes les plus utiles et les plus remarquables, et dont je me contenterai de donner ici une notion aussi succincte qu'il me sera possible de le faire.

La proportion harmonique, comme on sait, tire son nom des trois principaux accords de la musique, et elle fait la base de l'échelle diatonique. Transportée dans le domaine de la Géométrie par les anciens et les modernes, elle les a déjà conduits à d'intéressantes propriétés des lignes, dont la plupart sont exposées dans le *Traité des propriétés projectives*; elle semble, en un mot, devoir jouer un rôle brillant et nécessaire dans toutes les questions et propriétés qui ne concernent que la direction indéfinie des lignes et non leur mesure: il est facile, en effet, de démontrer qu'elle remplace partout, en projection, la division en parties égales, qui se présente si fréquemment dans la plupart des figures régulières de la Géométrie.

Supposons qu'à partir d'un même point et sur une même droite, on porte, dans le même sens, trois distances, dont la 1^{ère} moins la 2^{ème}, soit à la 2^{ème} moins la 3^{ème}, comme la 1^{ère} est à la 3^{ème}, ces trois distances seront en proportion harmonique; et, si l'on porte, à partir du même point et toujours dans le même sens, un nombre quelconque de distances, telles que trois quelconques d'entr'elles, qui sont consécutives, forment une proportion harmonique, la suite de toutes ces distances for-

mera ce qu'on nomme une progression harmonique; or on démontre qu'il en sera encore ainsi pour toutes les projections centrales ou perspectives de la figure sur une droite arbitraire. Maintenant, si l'on suppose l'origine commune des segmens harmoniques à l'infini, soit dans la figure primitive, soit dans la projection, les points restans formeront une échelle de parties égales; et pour le dire en passant, c'est cette même propriété qui, dans l'art du dessin, a fait donner à la division en parties harmoniques, le nom d'échelle perspective ou fuyante.

Mr. Brianchon, dans ses applications de la théorie des transversales, a donné quelques uns des propriétés de l'échelle et de la progression harmonique, et j'en indique, dans mon mémoire, plusieurs autres qui étoient indispensables pour établir la théorie du centre des moyennes harmoniques, et qui sont la conséquence assez simple d'une remarque faite par Mac-Laurin, sur la proportion harmonique; savoir: que, „dans une telle proportion, la valeur inverse ou réciproque de la seconde des trois distances auxquelles elle se rapporte, „est moyenne arithmétique entre les réciproques de la première et „de la troisième;” il en résulte, en effet, que lorsque des distances ou segmens, comptés d'un même point et sur une même droite, sont en progression harmonique, les réciproques de ces distances sont, de leur côté, en progression arithmétique; ce qui justifie complètement la première de ces dénominations, et fournit, à l'instant, le moyen de calculer un terme quelconque de la suite dont le rang est assigné.

Mac-Laurin, qui n'avoit point à examiner les propriétés de la progression harmonique, s'est contenté de déduire de sa remarque, la définition suivante de la moyenne harmonique: „La moyenne harmonique entre un nombre quelconque de quantités est telle que sa réciproque est moyenne arithmétique entre toutes celles des autres, prise avec „un signe convenable*.)” Il en a déduit en outre, une construction assez simple pour déterminer cette moyenne harmonique ou cette somme de réciproques, dans le cas de plusieurs distances ou segmens rangés sur une même droite et comptés d'un même point; son but étoit d'arriver, par là, à un théorème fort beau de Côtes sur les courbes algébriques et à quelques autres analogues sur la courbure de ces lignes, qui se

*) Voyez le *Traité des courbes géométriques*, par Mac-Laurin.

présentent comme des corollaires très particuliers du résultat de mon travail.

Tel est le point d'où je suis parti pour établir la doctrine du centre de moyennes harmoniques, qui fait le sujet du mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, et voici maintenant à quoi je suis parvenu.

J'ai commencé par transformer la relation qui définit la moyenne harmonique, d'après Mac-Laurin, en une autre plus générale et qui fût immédiatement projective dans le sens que j'ai précédemment indiqué; j'ai de suite été conduit à reconnoître que le point qui répond à cette moyenne, en supposant toujours les distances ou segmens comptés sur une même droite et d'une même origine, devenoit proprement le centre de moyennes distances des points appartenans aux autres, toutes les fois qu'on venoit à supposer l'origine commune à l'infini, soit dans la figure primitive, soit dans ses projections; rapprochement qui étoit impossible d'après la définition de Mac-Laurin, et qui m'a conduit à nommer, par analogie, le point en question, centre de moyennes harmoniques des points proposés, par rapport à l'origine commune d'où se mesurent les segmens harmoniques.

Dès lors je me suis trouvé en état de traduire, en les généralisant, soit les définitions, soit les propriétés qui concernent le centre des moyennes distances d'un nombre quelconque de points situés arbitrairement dans un plan ou dans l'espace; et pour le faire, je n'ai eu besoin constamment que de me servir des principes établis dans le Traité des propriétés projectives. J'ai obtenu, de cette manière, ce que j'ai déjà nommé précédemment la Théorie du centre des moyennes harmoniques. Mais ce n'est pas tout, comme les Géomètres sont parvenus, dans ces derniers temps, à étendre la Théorie du centre des moyennes distances au cas où les moyennes arithmétiques sont prises relativement à des coefficients numériques quelconques, j'en ai fait tout autant pour celle du centre de moyennes harmoniques, et je suis arrivé ainsi à des conséquences qui offrent un nouveau champ de spéculations et de découvertes aux géomètres, et qui, dans des mains plus habiles, ne tarderont peut-être pas à produire des applications aussi heureuses qu'utiles.

Quoiqu'il en soit, j'ai exposé dans la dernière partie de mon mémoire, quelques unes des propriétés qui découlent de la Théorie du centre

des moyennes harmoniques, pour les systèmes de points, de droites et de plans, et, afin de ne pas en multiplier inutilement le nombre, je me suis borné à celles dont la nature générale permet de les appliquer immédiatement aux courbes et aux surfaces géométriques d'un ordre quelconque; mettant ainsi ceux qui liront ce Mémoire en état de pressentir cette extension, et de se familiariser, peu à peu, avec ce qu'elle pourroit, au premier aspect, avoir de trop difficile ou de trop abstrait.

De la division harmonique des lignes droites, des progressions, des échelles et des moyennes harmoniques.

Il existe entre la division harmonique et la division en parties égales, une analogie très grande, qui conduit à une foule de conséquences et de rapprochemens curieux: avant de l'exposer dans toute sa généralité, il convient de l'examiner dans le cas le plus simple, celui d'une droite ou distance, portant uniquement un point de division entre ses extrémités; mais, attendu que les propriétés relatives à ce cas sont généralement connues des géomètres, je ne ferai que rappeler celles qui me sont nécessaires, et renverrai pour plus de développement au „*Traité des propriétés projectives des figures.*”

1. Soit AB (Fig. 1.) une droite ou distance quelconque; prenons sur cette droite et son prolongement, les points Q et P , tels qu'on ait

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = \frac{PQ - PA}{PB - PQ},$$

la distance AB sera divisée harmoniquement en P et Q , et cette définition devra s'étendre au cas même où l'un quelconque des points proposés sera supposé à l'infini; mais alors le rapport des segments qui lui appartiennent dans la relation ci-dessus sera l'unité; donc il en sera de même du rapport des deux autres segments restans. Que P , par exemple, passe à l'infini, on aura, d'après cette définition, $QA = QB$; et par conséquent le point Q , conjugué à P , divisera en parties égales la distance AB . Ainsi la division en parties harmoniques d'une droite, n'est qu'une extension de la division en parties égales, ou plutôt celle-ci est comprise implicitement dans l'autre, pourvu qu'on restitue le point de division qui est passé à l'infini, et qui est conjugué au point milieu. On admet

d'ailleurs que les droites qui renferment un même point situé à l'infini sont parallèles.

2. Cela posé, projetons, d'un point quelconque S , les quatre points A, B, P, Q ainsi définis, sur une droite arbitraire $P'B'$, on prouve aisément que les nouveaux points A', B', P', Q' conservent entr'eux la relation harmonique

$$\frac{P'A'}{P'B'} = \frac{Q'A'}{Q'B'} = \frac{P'Q' - P'A'}{P'B' - P'Q'};$$

c'est-à-dire que cette relation est projective (voyez plus loin, l'art. 18.). Or, d'après ce qui précède, cela doit s'étendre au cas même pour lequel l'un quelconque des points proposés, ou l'un quelconque des points de la projection, passe à l'infini; ce qui exige alors que la transversale qui porte ce point soit parallèle à la projetante; donc la division harmonique se changeant, pour cette transversale, en division de parties égales, on voit que l'une de ces divisions est la perspective ou projection centrale de l'autre, et peut servir directement à la construire.

3. Mais on peut pousser plus loin ce rapprochement, en mettant la relation harmonique sous une forme d'abord indiquée par Mac-Laurin (*Traité des courbes géométriques*).

En effet, de la proportion,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PQ - PA}{PB - PQ},$$

on tire immédiatement

$$2PA.PB = PB.PQ + PA.PQ,$$

ou, en divisant tout par $2PA.PB.PQ$,

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} \right);$$

relation entièrement analogue à celle qui a lieu pour la division en parties égales, lorsqu'on remplace le point P par un point quelconque p (Fig. 2.), et les rapports $\frac{1}{PQ}, \frac{1}{PA}, \frac{1}{PB}$ par les simples segments pQ, pA, pB ; on a effectivement, en supposant que Q soit le milieu de AB :

$$pQ = \frac{1}{2}(pA + pB).$$

4. En nommant, avec Mac-Laurin, réciproque d'une ligne son rapport inverse à l'unité de mesure, la relation ci-dessus pour la division harmonique, exprimera que la réciproque de PQ est moyenne arithmétique entre les réciproques des segments PA et PB ; c'est pourquoi, quand une ligne

AB (Fig. 1.) est divisée harmoniquement aux points P et Q , ou que les segmens PA , PQ et PB , relatifs au point P , sont en proportion harmonique, on dit que le segment PQ est moyen harmonique entre les deux autres PA et PB ; et comme, dans le cas ci-dessus de la division en parties égales, le point Q est nommé le centre des moyennes distances de A et de B , nous pourrions dire également que, dans celui de la division harmonique, le point Q est le centre des moyennes harmoniques des points A et B ; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport au point P qui sert d'origine commune aux segmens harmoniques.

5. De plus, d'après ce qui a été observé ci-dessus (2.), en mettant la figure en projection ou perspective sur une droite quelconque $P'B'$ (Fig. 1.), le point Q' , qui répond à celui dont il s'agit, sera encore un centre de moyenne harmonique par rapport aux points A' et B' de la projection, et relativement au point P' qui sert d'origine aux nouveaux segmens: ainsi, dans le faisceau des projetantes SA , SB , SP , SQ , on pourra nommer la droite SQ l'axe des moyennes harmoniques de SA et SB , par rapport à la droite SP , qui sera l'axe des origines harmoniques: la transversale $P'B'$ étant d'ailleurs prise parallèlement à ce dernier axe, tous ses points Q' deviendront des centres de moyennes distances d'après l'art. 2. déjà cité.

6. Pour compléter l'analogie entre les deux relations

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} \right), \quad pQ = \frac{1}{2}(pA + pB),$$

on peut remarquer qu'elles éprouvent dans leurs termes, les mêmes variations de signes pour les mêmes changemens de positions des points qui leur correspondent.

Supposons, par exemple, que, dans le cas de la division harmonique (Fig. 1.), le point P passe, d'un mouvement continu, de la gauche à la droite de A , à l'instant où la distance PA deviendra nulle, le segment QA devra (1.) l'être aussi, de même que PQ ; par conséquent le point Q passera, à son tour, de la droite à la gauche du point A , et les distances PA , PQ , ayant changé de sens, devront changer en même temps de signe dans la relation ci-dessus, qui deviendra ainsi

$$-\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{PQ} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{PA} - \frac{1}{PB} \right)$$

pour le cas où le point P auroit pris la place du point Q , et réciproque-

ment. C'est en effet, ce dont on peut s'assurer directement à l'aide de la relation primitive; car, en la mettant sous cette forme

$$\frac{QA}{QB} = \frac{PQ - QA}{PQ + QB},$$

on en tire

$$\frac{1}{QP} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{QA} - \frac{1}{QB} \right)$$

résultat qui tient d'ailleurs à ce que, d'après la définition ci-dessus (1.) les points Q et P jouissent de propriétés réciproques à l'égard de A et de B .

D'après cela, on voit que la règle des signes, pour la relation harmonique, est que, en considérant toujours comme positif le terme $\frac{1}{PQ}$, les termes $\frac{1}{PA}$, $\frac{1}{PB}$ qui entrent dans le second membre de cette relation, devront être affectés du signe $+$ ou du signe $-$, selon que, par rapport à l'origine P , les points aux quels ils répondent seront placés du même côté que le point Q ou d'un côté différent; or c'est ce qui a lieu précisément (Fig. 2.) dans la relation

$$pQ = \frac{1}{2}(pA + pB).$$

Donc la même règle des signes est applicable à ces deux espèces de relations, et par conséquent elles conserveront une forme semblable pour la même disposition des points à l'égard des origines P et p auxquelles elles se rapportent; seulement, en conservant ses points A et B , on ne sauroit changer, dans le cas de la division harmonique, l'origine P sans que le point Q ne change en même temps, au lieu qu'il reste fixe dans celui de la division en parties égales.

7. Les choses ainsi entendues, supposons (Fig. 1.) qu'on divise en deux parties égales, au point Q , la distance PQ moyenne harmonique entre PA et PB , on aura donc,

$$\frac{2}{PQ} = \frac{1}{PQ_1} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB};$$

et parconséquent, si l'on mène par le point P une suite de transversales PAB , $PA''B''$ dans l'angle ASB , puis qu'on prenne, sur chacune d'elles, des points Q_1 , Q'' tels qu'on ait, en égard à la règle des signes posée ci-dessus,

$$\frac{1}{PQ_1} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB}, \quad \frac{1}{PQ''} = \frac{1}{PA''} + \frac{1}{PB''} \dots\dots$$

les points ainsi définis seront (2. et 5.) sur une droite Q , Q'' , parallèle

à l'axe SQ des moyennes harmoniques des côtés de l'angle ASB , et passant par ses points a et b où chacune des parallèles Pa , Pb à l'un de ses côtés, rencontre l'autre. Car, pour ces positions particulières de la transversale PAB , ou $PA''B''$, le point Q_1 , ou Q_1'' , se confond avec l'un des points correspondans A ou B , d'après la relation ci-dessus, attendu que l'un des segmens correspondans devient infini.

Or delà résulte un moyen, indiqué par Mac-Laurin, pour construire directement le point Q , lorsqu'on connoit les points, P , A et B . Quant au centre Q des moyennes harmoniques, il est plus simple et plus élégant de le déterminer à l'aide du procédé suivant, qui n'exige que l'emploi de la ligne droite ou de la règle: ayant mené par l'origine P des segmens harmoniques, une transversale arbitraire $PA''B''$ dans l'angle des projetantes SA , SB , on joindra, par de nouvelles droites AB'' , BA'' , les points ainsi obtenus sur ces projetantes avec les points donnés A , B , et le point S' de leur intersection appartiendra à la projetante SQ du point Q cherché. Il est visible, en effet, que, si l'on substitue l'angle $AS'B$ à l'angle ASB , et la droite PS' à la droite PS , l'axe des moyennes harmoniques (5.) de cet angle, par rapport à P , et qui renferme nécessairement Q et Q'' , devra aussi passer par le sommet S' , et se confondre par conséquent avec celui SQ de l'angle ASB ; on concluroit d'ailleurs la même chose en observant que la figure peut être mise en projection ou perspective, sur un nouveau plan, de façon que P passe à l'infini, ou que les droites PAB , $PA''B''$ deviennent parallèles, et c'est ainsi que nous avons démontré cette proposition généralement connue, à l'art. 154. du Traité des propriétés projectives.

8. Considérons maintenant une droite af (Fig. 3.), divisée en un nombre quelconque de parties égales aux points b , c , d , e ; le point à l'infini de cette droite pourra être regardé (1.) comme l'origine commune des segmens harmoniques relatifs à trois points de division consécutifs quelconques, en y comprenant les points extrêmes a et f ; donc (2.) si l'on projette le système de tous ces points sur une droite arbitraire $a'f'$, en a' , b' , c' , d' , e' , f' , il en sera de même du point p' qui est la projection du point à l'infini de af , à l'égard de trois points de division consécutifs quelconques de $a'f'$; c'est-à-dire que les segmens relatifs à p' et à ces points formeront une proportion harmonique; donc la suite de tous les segmens pa' , pb' , pc' , pd' pf' formera une pro-

portion harmonique continue; et l'on pourra dire, avec Mr. Brianchon (Application de la théorie des transversales etc. §. 68.) que ces segmens forment une progression harmonique.

Pour justifier encore davantage cette expression, nous remarquons que, d'après l'art. 2. et les articles suivans, il doit régner entre les réciproques des segmens qui répondent au point p' et aux différens points de division de $a'f'$, la même relation qu'entre les simples distances d'un point quelconque p de af , aux différens points de division $a, b, c \dots f$; mais ces dernières forment une progression arithmétique, donc il en est de même des réciproques qui leur correspondent.

En effet, on aura pour la droite af et le point arbitraire p ,

$$2pb = pa + pc, \quad 2p'c = pb + pd, \quad 2pd = pc + pe, \quad \dots$$

ou

$$pb - pa = pc - pb = pd - pb = pe - pd \dots,$$

comme aussi l'on a (3.), pour la droite af' par rapport à l'origine des divisions harmoniques p' ,

$$\frac{2}{p'b'} = \frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'c'}, \quad \frac{2}{p'c'} = \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'd'}, \quad \frac{2}{p'd'} = \frac{1}{p'c'} + \frac{1}{p'e'}, \quad \dots$$

ou

$$\frac{1}{p'b'} - \frac{1}{p'a'} = \frac{1}{p'e'} - \frac{1}{p'b'} = \frac{1}{p'd'} - \frac{1}{p'b'} = \frac{1}{p'e'} - \frac{1}{p'd'} \dots$$

9. Il résulte de ce rapprochement, en particulier, qu'on pourra calculer un terme quelconque de la progression harmonique, par les mêmes règles que l'on calcule un terme de la progression arithmétique, au moyen des extrêmes, quand son rang est assigné.

Supposons, par exemple, que la droite af soit divisée en $m+n$ parties égales aux points $b, c, d, \dots$, et qu'il y ait parconséquent $m+n+1$ segmens $pa, pb, pc, \dots pf$ correspondans au point arbitraire p ; proposons nous de rechercher le segment pd du point d qui appartient à la n^e partie à compter de a , nous aurons, dans le cas dont il s'agit, des divisions égales,

$$pd = pa + ad = pa + \frac{n}{m+n}af = pa + \frac{n}{m+n}(pf - pa)$$

ou

$$pd = \frac{m}{m+n}pa + \frac{n}{m+n}pf = \frac{1}{m+n}(mpa + npf);$$

donc on aura aussi, dans le cas de la division harmonique, c'est-à-dire pour la perspective $a'f'$,

$$\frac{1}{p'd'} = \frac{1}{m+n} \left(\frac{m}{p'a'} + \frac{n}{p'f'} \right),$$

relation qui, en vertu de la continuité, doit même s'étendre au cas où les nombres m et n sont incommensurables entr'eux, et qui servira immédiatement à résoudre tous les problèmes analogues à ceux où il s'agit de diviser des distances en parties proportionnelles à des nombres donnés. On voit, en outre, qu'elle a une forme tout-à-fait semblable à celle (3.) qui concerne la simple division harmonique de $a'f'$ en p' et d' ; si l'on y suppose en effet, m et n égaux à l'unité, on retombera sur celle dont il s'agit. C'est pourquoi on pourroit dire que le segment $p'd'$, relatif au point de division d' , est moyen harmonique entre les segmens $p'a'$ et $p'f'$ pour les coefficients m et n , et que le point d' lui-même est le centre des moyennes harmoniques de a' et f' relativement à p' et à ces mêmes coefficients.

Enfin il résulte encore de ce qui précède que les points extrêmes a' et f' d'une échelle harmonique étant donnés, ainsi que le nombre des parties dont elle se compose et l'origine p' des segmens harmoniques, on pourra construire successivement, à l'aide du calcul, et sans recourir à l'échelle des divisions égales af , l'échelle harmonique dont il s'agit, à laquelle son grand usage dans la perspective a fait donner le nom d'Echelle perspective ou fuyante *).

10. On déduiroit beaucoup d'autres conséquences remarquables de ce qui précède; nous nous contenterons d'observer que, pour se construire une échelle harmonique sur un dessin, ou pour diviser une ligne $a'f'$ en un certain nombre de parties harmoniques par rapport à un point quelconque p' pris pour origine, et qu'on nomme quelque fois point de fuite dans les Traités de perspective, il n'est point indispensable de recourir au calcul, comme nous venons de le faire, ni même de construire d'abord une échelle ordinaire de parties égales comme l'indique la Fig. 3.; des opérations purement linéaires ou qui s'exécutent avec la règle seule, suffisent pour atteindre le même but.

Remarquons d'abord que, quand une droite $a'f'$ est divisée en parties harmoniques aux points $b', c', d', e', \dots$, par rapport à un point

*) Je ne crois pas que ces dernières propriétés de l'échelle harmonique aient encore été remarquées des géomètres; elle en possède quelques autres intéressantes, auxquelles les précédentes nous conduiroient aisément, mais dont l'examen nous écarteroit de notre objet. On peut consulter, à cet égard, le Mémoire de Mr. Brianchon, déjà cité art. 8. ci-dessus.

p' qui sert d'origine aux segmens harmoniques, la même chose aura lieu encore (2. et 8.) dans toutes ses projections centrales ou perspectives sur une autre droite quelconque; c'est-à-dire que, quel que soit le centre de projection s que l'on ait choisi en particulier, si l'on coupe le faisceau des projetantes sp' , sa' , sb' , ... sf' qui lui correspondent par une droite arbitraire, le système de points qui en résulte, forme encore une échelle harmonique, ayant pour origine le point répondant à p' ; c'est-à-dire, en un mot, que l'échelle harmonique est projective. Si, de plus, on prend pour transversale une droite af parallèle à la projetante sp' , ou que l'origine des segmens harmoniques passe à l'infini dans la projection, l'échelle harmonique se changera en une échelle ordinaire de parties égales (2. et 8.).

11. Supposons donc (Fig. 4.) que a' et b' étant les deux premiers points de division d'une échelle harmonique, et p l'origine des segmens harmoniques ou le point de fuite, il s'agisse de construire successivement toutes les autres parties de l'échelle, prolongée de part et d'autre de a' jusqu'à l'infini: on tirera arbitrairement les deux droites pe'' , ps'' par le point p , et l'on joindra, par d'autres droites $a''b'$, $a''a'$, un point quelconque a'' de pe'' aux points donnés a' et b' , ces droites iront déterminer sur ps'' deux points s' et s'' , dont on se servira ainsi qu'il suit pour construire l'échelle harmonique $a'b'c'd'$.

On tirera $s''b'$ qui rencontrera pe'' en b'' ; traçant $s'b''$, elle ira rencontrer pf' au 3^e point de division harmonique c' ; traçant ensuite $c's''$, elle rencontrera pe'' en c'' , et $s'c''$ ira construire le 4^e point de division d' ; il est évident que l'on pourra poursuivre cette opération à volonté, soit à droite, soit à gauche du point a' , ce qui donnera l'échelle harmonique demandée $a', b', c', d', ...$ *).

En effet, si l'on met la figure en projection sur un nouveau plan parallèle à $ps's''$, c'est à dire tel que cette droite passe à l'infini, les quadrilatères $a'b'a''b''$, $b'c'b''c''$, ... seront des parallélogrammes, et par conséquent la droite $a'f'$ sera une échelle ordinaire de parties éga-

*) Ces constructions sont entièrement analogues à celles que M. Brianchon a données pour la division d'une distance en parties égales dans les Applications de la Théorie des transversales (voy. §. 51. et 52.); mais, dans ce cas, elle ne peuvent s'effectuer uniquement avec la règle ou des alignemens.

les pour la nouvelle figure, de sorte qu'elle en est une de parties harmoniques pour l'ancienne.

12. Supposons maintenant que, s'étant donné une distance quelconque af , il s'agisse de la diviser en un certain nombre de parties harmoniques relativement au point quelconque p pris pour origine: on tracera arbitrairement une droite pf' passant par p , et l'on construira, comme ci-dessus, une échelle harmonique quelconque $a'b'c'd'...f'$ par rapport à ce point, mais dont le nombre des divisions soit précisément celui des parties qu'on veut obtenir sur af . Cela posé, on tracera les droites aa' , ff' qui, par leur intersection, donneront le point s , dont on se servira pour projeter les points de division de l'échelle $a'f'$ sur af . Il est évident, en effet, qu'à cause que la relation harmonique est projective, les points $b, c, ...$ ainsi obtenus seront les points demandés.

Mais si, le nombre de parties harmoniques de af étant $m + n$, on demandoit simplement le point d qui appartient à la n^e partie, comme dans le problème ci-dessus (9.) résolu à l'aide du calcul, ayant d'ailleurs construit l'échelle harmonique $a'f'$, il n'y auroit autre chose à faire qu'à projeter le n^e point de division d' en d sur af , à partir de s .

Ces dernières considérations, quoiqu'elles nous aient un peu écarté de notre premier objet, nous seront néanmoins utiles pour ce qui concerne la partie des applications.

Du centre des moyennes harmonique des points quelconques rangés en ligne droite.

13. Jusqu'ici nous nous sommes bornés à comparer la division en parties égales à celle en parties harmoniques; mais on peut étendre plus loin l'objet des ce définitions, en observant, en général, que toutes les relations ou propriétés qui ont pour fondement la division en parties égales, doivent pouvoir se convertir en des relations ou propriétés analogues de la division harmonique; or de cette nature sont évidemment toutes celles qui concernent les centres de moyennes distances.

Soient, par exemple, a, b, c (Fig. 5.) trois points quelconques situés en ligne droite; soit q le centre de moyennes distances de ces points, p un point quelconque pris pour origine des segmens, on aura, comme on sait,

$$pq = \frac{pa + pb + pc}{3},$$

pourvu qu'on ait égard à la règle des signes posée ci-dessus (6.). Projétons les points a, b, c, q sur une droite quelconque $a'd'$, à partir d'un point arbitraire s et soient a', b', c', q' les points de la projection, on peut se demander quel rôle le point q' jouera par rapport aux points a', b', c' . Or je dis qu'en nommant p' le point qui représente, sur $a'c'$, celui à l'infini de ad , et dont la projetante sp' est ainsi parallèle à ad , on aura

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} \right),$$

toujours en ayant égard à la règle des signes qui vient d'être indiquée.

Pour le prouver, il nous suffira de rechercher la manière dont on peut obtenir les points q et q' au moyen de ceux dont ils dépendent respectivement.

Pour le point q , il faut, comme on sait, prendre le milieu x de ab , puis diviser cx en trois parties égales, et prendre le premier point de division q , à partir de x , pour le point demandé; en effet on aura,

$$2px = pa + pb,$$

$$pq = px + \frac{1}{3}(pc - px) = \frac{2px + pc}{3} = \frac{pa + pb + pc}{3},$$

Or, pour obtenir ce qui concerne le point q' de la projection, il suffira évidemment de remplacer la division en parties égales par la division harmonique, en prenant p' pour origine; c'est à dire (3. et 9.) que, dans les relations ci-dessus, il faudra simplement remplacer les segmens qui se rapportent au point arbitraire p , par les réciproques de ceux qui répondent au point p' , projection de celui à l'infini de ac ; on aura donc,

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} \right);$$

ce qui précède montre aussi, d'après l'article 12., comment il faudroit s'y prendre pour construire directement le point q' avec la règle, et sans recourir à la division en parties égales qu'indique la figure.

14. Le cas où l'on remplaceroit les trois points a, b, c par quatre points quelconques seroit encore plus facile à établir. En effet, s'il s'agissoit d'obtenir leur centre des moyennes distances, il suffiroit évidemment de prendre le milieu ou le centre des moyennes distances de deux quelconques de ces points, puis celui des deux autres, puis enfin le centre des moyennes distances des deux centres partiels ainsi trouvés; ce qui donneroit de suite, en nommant d le quatrième point, et conservant d'ailleurs

les mêmes dénominations que ci-dessus,

$$pq = \frac{pa + pb + pc + pd}{4},$$

et par conséquent, en passant à la projection sur une droite quelconque $a'c'$,

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} + \frac{1}{p'd'} \right).$$

En général, on voit que, quel que soit le nombre m des points $a, b, c, d, \dots$ rangés sur une même droite, le centre q des moyennes distances de tous ces points sera unique, et tel qu'en le projetant ainsi que ces points, sur une droite quelconque en $q', a', b', c', d', \dots$, et nommant p' le point qui représente celui à l'infini de la proposée abc , on aura

$$\frac{1}{p'q'} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} + \frac{1}{p'd'} + \text{etc.} \right),$$

ou

$$\frac{m}{p'q'} = \frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} + \frac{1}{p'd'} + \text{etc.},$$

pourvu encore qu'on ait égard à la règle des signes posée art. 6. On voit de plus (12.), comment on pourra construire, avec la règle seule et sans recourir aux centres des moyennes distances, le point q' dont il s'agit, quand tous les autres $a', b', c, d', \dots$ seront donnés ainsi que le point p' qui sert d'origine commune aux segmens harmoniques; mais cette construction se faisant d'une manière successive et assez pénible, quand le nombre des points donnés est tant soit peu considérable, nous indiquerons plus tard des moyens généraux et simples pour y parvenir.

15. Mac-Laurin, qui a eu à considérer, dans son *Traité des courbes géométriques*, quelques unes des propriétés du point q' défini par les relations métriques ci-dessus, et qui n'a point aperçu l'analogie qui regnoit entre ce point et le centre des moyennes distances, ni les moyens de déduire l'un de ces points de l'autre, s'y prenoit d'une manière différente pour construire la valeur de $p'q'$: il déterminoit, à l'aide du procédé de l'article 7., le point dont la distance à p' a pour réciproque la somme des réciproques de $p'a'$ et de $p'b'$, c'est à dire $\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'}$, puis le nouveau point dont la distance à p' a pour réciproque la somme des réciproques du point déjà obtenu et du point c' , c'est-à-dire $\frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'}$, puis etc.; car, en nommant Q' le dernier point ainsi

obtenu, on aura

$$\frac{1}{p'Q'} = \frac{1}{p'a'} + \frac{1}{p'b'} + \frac{1}{p'c'} + \text{etc.} = \frac{m}{p'q'},$$

et par conséquent $p'q' = mp'Q'$: cette méthode a, comme on voit, l'inconvénient d'exiger l'emploi de la règle et du compas réunis, au lieu que la précédente n'exige simplement que celui de la règle.

Mac-Laurin nomme $p'q'$ la moyenne harmonique des segmens $p'a'$, $p'b'$, $p'c'$, ...; nous pourrons donc dire aussi, par analogie, que le point q' , projection du centre des moyennes distances des points a , b , c , ... en nombre m , est lui-même le centre des moyennes harmoniques des points a' , b' , c' , ... de la projection, par rapport à p' qui représente le point à l'infini de pc ; or cette définition s'accorde parfaitement avec celle de l'art. 4., dont elle n'est guère que l'extension; et, comme ici le faisceau des projetantes sa' , sb' , sc' , ... conserve les mêmes propriétés à l'égard de sp' , sq' , quelle que soit la transversale $p'c'$, on pourra dire encore que la projetante sq' est l'axe des moyennes harmoniques du faisceau dont il s'agit; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport à la projetante sp' qui, à son tour, conservera le nom d'axe des origines harmoniques, et qui, venant à passer à l'infini avec les points, changera évidemment la projetante sq' en un simple axe des moyennes distances.

16. Les relations qui définissent le centre q' (Fig. 5.) des moyennes harmoniques étant projectives (14.), ou telles qu'elles subsistent dans toutes les projections centrales de la figure, on voit que les définitions et propriétés précédentes seront applicables directement à un faisceau quelconque de droites projetantes qui s'appuieront sur des points donnés en ligne droite, sur leur centre de moyenne harmonique et sur l'origine relative à ce centre; c'est-à-dire que toute transversale déterminera, dans ce faisceau, un nouveau système de points qui auront entr'eux la même corrélation que les premiers, sauf le cas où la transversale sera parallèle à l'axe des origines, et pour lequel l'origine des segmens harmoniques passant à l'infini, le centre des moyennes harmoniques se changera évidemment en un centre des moyennes distances.

Enfin on voit que si, par l'origine des segmens harmoniques de plusieurs points situés en ligne droite, on mène une droite ou un axe quelconque, et qu'on abaisse, de ces différens points et de leur centre de mo-

yennes harmoniques des ordonnées sur cet axe, qui soient parallèles entr'elles, et à un autre axe arbitraire, celle qui répond au centre de moyennes harmoniques, sera encore la moyenne harmonique de toutes celles qui répondent aux points proposés; propriété qui est entièrement analogue à celle du centre des moyennes distances, si ce n'est que, pour ce dernier, l'origine étant entièrement arbitraire, il en est de même des axes de projection.

17. Au surplus, on peut partir de la définition générale du centre des moyennes harmoniques, pour établir directement ses diverses propriétés, sans recourir aux considérations précédentes, qui d'ailleurs nous paraissent mériter l'attention des géomètres. Or cette nouvelle manière d'envisager la question va nous conduire à d'autres résultats non moins remarquables que les premiers.

Soient $a, b, c, d, \dots$ (Fig. 6.) des points quelconques, en nombre m , rangés sur une même droite, et p un point arbitraire de cette droite pris pour origine des segmens; regardons, d'après la règle de l'art. 6., comme positifs tous les segmens qui sont à droite de p , et comme négatifs ceux qui sont dirigés dans le sens contraire. Cela posé si l'on choisit, sur la droite dont il s'agit, un point q tel que

$$\frac{m}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} \dots \dots,$$

en attribuant à chaque terme le signe qu'il doit avoir d'après le sens du segment qu'il renferme, le point q , ainsi déterminé, sera unique et le centre des moyennes harmoniques des points $a, b, c, d, \dots$ relativement à p . Il s'agit, en premier lieu, de prouver que ce point est projectif, c'est-à-dire tel qu'en le mettant en projection, sur une droite quelconque $p'd'$ et à partir d'un point arbitraire s de l'espace, aussi bien que le système de tous les points que l'on considère sur pd , la relation ci-dessus aura toujours lieu entre ces différens points.

Pour y parvenir nous mettrons cette relation sous la forme suivante, afin d'en mieux étudier ses propriétés:

$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pa} + \frac{1}{pq} - \frac{1}{pb} + \frac{1}{pq} - \frac{1}{pc} + \frac{1}{pq} - \frac{1}{pd} + \text{etc.} = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{1}{pq} - \frac{1}{pa} &= \frac{pa - pq}{pa \cdot pq} = -\frac{aq}{ap \cdot pq}, & \frac{1}{pq} - \frac{1}{pb} &= -\frac{bq}{bp \cdot pq}, \\ \frac{1}{pq} - \frac{1}{pc} &= \frac{cq}{cp \cdot pq}, & \dots \dots \end{aligned}$$

donc, substituant et supprimant le facteur pq commun à tous les termes, il viendra

$$-\frac{aq}{ap} - \frac{bq}{bp} + \frac{cq}{cp} + \frac{dq}{dp} + \text{etc.} = 0,$$

équation dans laquelle les termes négatifs proviennent uniquement des points $a, b, c, \dots$ qu'on a supposés à gauche de q . Mais, d'après la règle de signes admise ci-dessus pour la définition du point q , chaque terme devra conserver le signe qu'il a actuellement, ou en changer, selon que le point $a, b, c, \dots$ auquel il se rapporte sera à droite ou à gauche du point p ; donc l'équation ci-dessus pourra être remplacée généralement par cette autre

$$\frac{aq}{ap} + \frac{bq}{bp} + \frac{cq}{cp} + \frac{dq}{dp} + \text{etc.} = 0,$$

pourvu que, dans chaque position des points du système, on attribue le signe $+$ ou le signe $-$ à un segment quelconque, selon qu'il est situé sur la droite ou sur la gauche de celles des origines p ou q à la quelle il se rapporte, ou ce qui revient au même et ce qui est plus simple encore, pourvu qu'on attribue à chaque terme de la relation ci-dessus le signe $+$ ou le signe $-$, selon que les deux segmens qui y entrent sont dirigés dans le même sens ou en sens contraire, par rapport à celui des points $a, b, c, \dots$ qui leur est commun.

D'après cela, on pourra énoncer ainsi d'une manière générale la relation dont il s'agit:

L'origine p et le centre q des moyennes harmoniques d'un nombre quelconque de points $a, b, c, d, \dots$ rangés en ligne droite, sont tels que, si l'on prend successivement le rapport des distances de chacun de ces points à q et à p , la somme de tous ces rapports sera nulle, en attribuant le signe $+$ ou le signe $-$ à un rapport quelconque, selon que le point correspondant est situé sur l'un des prolongemens de la distance pq , ou entre ses extrémités.

18. Cet énoncé n'est évidemment que l'extension de celui qui se rapporte au cas particulier de l'art. 1. d'où nous sommes partis, et dans le quel on ne considère que deux points a et b ; prouvons maintenant qu'il s'applique à toutes les projections de la figure faite, d'un point quelconque s de l'espace, sur une droite arbitraire $p'd'$ du plan spd , et par

conséquent qu'il en est de même de la relation (17.) d'où nous sommes partis.

En effet, d'après ce qui a été établi art. 9. et suiv. du Traité des propriétés projectives, on a, en nommant P la perpendiculaire abaissée de s sur pd , et $p, q, a, b, c, \dots$ les projetantes $sp, sq, sa, sb, sc, \dots$,

$$aq = \sin(asq) \frac{a \cdot q}{P}, \quad bq = \sin(bsq) \frac{b \cdot q}{P}, \quad cq = \sin(csq) \frac{c \cdot q}{P}, \quad \dots,$$

$$ap = \sin(asp) \frac{a \cdot p}{P}, \quad bp = \sin(bsp) \frac{b \cdot p}{P}, \quad cp = \sin(csp) \frac{c \cdot p}{P}, \quad \dots$$

Donc en substituant ces expressions dans la dernière relation ci-dessus, et supprimant les facteurs communs à tous les termes, on aura la nouvelle relation

$$\frac{\sin asq}{\sin asp} + \frac{\sin bsq}{\sin bsp} + \frac{\sin csq}{\sin csp} + \text{etc.} = 0,$$

qui exprime qu'il y a entre les sinus des angles projetants la même relation qu'entre les segmens qui leur correspondent respectivement. Or de là on conclut aisément, et par réciproque, que, cette relation ayant lieu pour le faisceau des droites projetantes, il faut nécessairement qu'elle subsiste entre les segmens d'une transversale quelconque $p'd'$ prise pour axe de projection des segmens; donc enfin la relation examinée est de sa nature projective, ainsi qu'il s'agissoit de le démontrer directement; c'est-à-dire que, dans le faisceau ci-dessus, les projetantes sp et sq sont des axes (15.) d'origines et de moyennes harmoniques relativement à toutes les autres.

19. Remarquons en passant que, quoique la relation examinée en dernier lieu, subsiste entre les sinus des angles projetans des différens segmens qui y entrent, on ne sauroit pourtant en conclure que celle d'où nous sommes partis (17.) jouisse de la même propriété; or, je dis que cette dernière relation aura encore lieu de la même manière, non plus entre les sinus des angles projetans des différens segmens, mais entre les tangentes trigonométriques de ces angles, c'est-à-dire qu'on aura

$$\frac{m}{\tan p s q} = \frac{1}{\tan p s a} + \frac{1}{\tan p s b} + \frac{1}{\tan p s c} + \text{etc.}$$

En effet, la relation dont il s'agit étant projective d'après ce qui précède, devra subsister pour une transversale $p'd'$ perpendiculaire à la projetante sp du point p , mais les segmens $p'q', p'a', p'b', p'c', \dots$ de

cette transversale, sont évidemment alors proportionnels aux tangentes trigonométriques des angles projetants qui leur correspondent respectivement; donc la relation ci-dessus a lieu entre ces tangentes, comme il s'agissoit de le démontrer, et comme il seroit facile de l'établir de plusieurs autres manières.

20. La transformation que nous avons fait subir, art. 17., à la relation qui définit le centre des moyennes harmoniques, n'est pas la seule qui puisse lui convenir, et il en est d'autres qui ne sont pas moins dignes de remarque, et qui sont tout aussi générales.

En effet, soit A un point quelconque de la direction de pd , pris pour nouvelle origine des segmens, servant à remplacer l'origine p , on aura identiquement

$$pa - pq = Aa - Aq, \quad pb - pq = Ab - Aq, \quad pc - pq = Ac - Aq, \\ pd - pc = Ad - Ac, \dots$$

pourvu qu'on regarde comme positifs les segmens des points placés à la droite de A , et comme négatifs ceux des points placés à la gauche de ce point; donc on aura aussi

$$\frac{1}{pq} - \frac{1}{pa} = \frac{pa - pq}{pa \cdot pq} = \frac{Aa - Aq}{pa \cdot pq} = \frac{Aa}{pa \cdot pq} - \frac{Aq}{pq} \cdot \frac{1}{pa}, \\ \frac{1}{pq} - \frac{1}{pb} = \frac{Ab}{pb \cdot pq} - \frac{Aq}{pq} \cdot \frac{1}{pb}, \quad \frac{1}{pq} - \frac{1}{pc} = \frac{Ac}{pc \cdot pq} - \frac{Aq}{pq} \cdot \frac{1}{pc} + \text{etc.}$$

d'où, en substituant dans la première des transformées de l'art. 17., et multipliant tout par pq ,

$$\frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.} = Aq \left(\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \text{etc.} \right) = \frac{m Aq}{pq}$$

relation qui est assujettie à la même règle de signes que celle de l'endroit cité, et qui, de plus, la renferme comme cas particulier, puisqu'elle redonne celle-ci quand on y suppose $Aq = 0$, ou qu'on suppose le point A en q . En admettant même que l'origine arbitraire A soit à l'infini, les segmens infinis devant être censés égaux, disparaîtront comme facteurs communs à tous les termes, et l'on retombera sur la relation

$$\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{etc.} = \frac{m}{pq},$$

d'où nous sommes partis en premier lieu.

Mais la relation générale obtenue en dernier lieu, conduit à beaucoup d'autres relations semblables, selon qu'on suppose le point A placé en a ou b ou c . . . ; par exemple: si $Aa = 0$, on aura

$$\frac{maq}{pq} = \frac{ab}{pb} + \frac{ac}{pc} + \frac{ad}{pd} + \text{etc.},$$

relation dans la quelle il faudra avoir égard à la règle de signes posée ci-devant, en regardant a et p comme les origines des divers segmens.

Elle deviendrait de même, pour $Ab = 0$, $Ac = 0$, etc.

$$\frac{mbq}{pq} = \frac{ba}{pa} + \frac{bc}{pc} + \frac{bd}{pd} + \text{etc.}$$

$$\frac{mcq}{pq} = \frac{ca}{pa} + \frac{cb}{pb} + \frac{cd}{pd} + \text{etc.}$$

d'où l'on en déduiroit une infinité d'autres.

Ces diverses relations, y compris celle d'où elles dérivent, satisfont toutes aux conditions indiquées art. 18.; donc, non seulement elles sont projectives, mais elles ont encore lieu d'une manière semblable entre les sinus des angles projetans qui répondent aux différens segmens.

21. Ce qui précède suffit pour faire apercevoir que le point q , ou le centre des moyennes harmoniques de points rangés en ligne droite, offre, dans ses propriétés, l'analogie la plus grande avec ce que l'on nomme le centre des moyennes distances de points pareils; pour la mettre dans tout son jour, il ne s'agit évidemment (14.) que d'examiner ce qui arrive dans les relations ci-dessus, pour le cas où l'on suppose le point p , qui sert d'origine aux segmens harmoniques, situé à l'infini sur ad . Mais alors tous les segmens qui ce comptent de ce point, sont infinis et doivent être censés égaux comme ne différant entre eux que d'une quantité finie; donc la relation générale trouvée ci-dessus,

$$\frac{mAq}{pq} = \frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.},$$

se réduira simplement à la suivante

$$mAq = Aa + Ab + Ac + Ad + \text{etc.},$$

dans laquelle les différens termes devront, d'après ce qui précède, être affectés du signe $+$ ou du signe $-$, selon que le point auquel ils se rapportent sera à droite ou à gauche de l'origine A des segmens, et qui aura lieu quelle que soit la position de cette origine relativement aux points donnée $a, b, c, \dots$; or on reconnoit ici la propriété caractéristique de ce qu'on nomme le centre des moyennes distances.

De plus, puisque la relation générale ci-dessus est de sa nature projective, on voit que l'un de ces systèmes pourra toujours être envisagé comme la projection centrale ou perspective de l'autre, ainsi que

cela a déjà été établi d'une manière différente art. 14. et 16. de ce mémoire. On peut d'ailleurs, comme on va le voir, partir directement de la définition particulière du centre des moyennes distances pour en déduire celle, beaucoup plus générale, qui convient au centre des moyennes harmoniques.

En effet, si nous nommons p le point à l'infini de ad , et q le centre des moyennes distances des points $a, b, c, d, \dots$, nous pourrons, d'après le raisonnement déjà établi ci-dessus, mettre la relation particulière qui définit ce centre q , sous la formule générale,

$$\frac{mAq}{pq} = \frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.};$$

or cette relation, dans la quelle les segmens qui se mesurent du point p , sont infinis et égaux, satisfait aux conditions indiquées art. 18.; donc elle aura lieu à la fois pour toutes les perspectives du système proposé sur des droites arbitraires; et par conséquent, dans ces perspectives, le centre des moyennes distances deviendra le centre des moyennes harmoniques.

22. Supposons maintenant que, dans l'équation générale relative au centre des moyennes harmoniques q , les segmens relatifs à ce centre deviennent infinis, ou si l'on veut, supposons le point q à l'infini, ce qu'on peut toujours obtenir en mettant la figure en projection sur une droite quelconque parallèle à la projetante de ce point; le rapport des segmens infinis Aq, pq devenant l'unité, l'on aura pour définir alors le point correspondant p , la nouvelle relation

$$m = \frac{Aa}{pa} + \frac{Ab}{pb} + \frac{Ac}{pc} + \frac{Ad}{pd} + \text{etc.}$$

Mais l'origine A étant entièrement arbitraire, on peut également la supposer à l'infini, confondue avec q , ce qui réduit la relation ci-dessus à la suivante,

$$\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{etc.} = 0,$$

en supprimant les facteurs ou segmens égaux et infinis; or, sous cette forme, elle est une conséquence très simple de celle d'où nous sommes partis (17.) pour la définition du centre q des moyennes harmoniques.

On voit, d'après cela, que les points p et q ne sont pas réciproques, et ne jouissent pas entr'eux des mêmes propriétés à l'égard des points $a, b, c, d, \dots$ comme sembleroit l'indiquer le cas particulier où ces derniers points sont au nombre de deux seulement (6.); aussi arrive-t-il

que, bien qu'il ne corresponde nécessairement qu'un seul point q , ou qu'un seul centre des moyennes harmoniques relativement à un même point p pris pour origine (14.), et aux m points donnés $a, b, c, d, \dots$, cependant il existe, en général, $m - 1$ points p répondans à un même point q , choisi à volonté, et aux m points donnés $a, b, c, \dots$. C'est ce qu'il est, en effet, aisé de démontrer, avec ou sans calcul; mais, comme cette démonstration exige des développemens qui ne seroient pas ici à leur place, nous nous abstiendrons, pour le moment, de la donner, en renvoyant le lecteur à nos prochains mémoires.

23. Avant de terminer ce sujet, nous remarquerons que les diverses transformations que nous avons fait subir à la relation du No. 17., et qui expriment autant de propriétés du centre des moyennes harmoniques, sont uniquement basées sur ce que le nombre m est précisément égal à celui qui marque le nombre des points donnés $a, b, c, \dots$. Pour toute autre valeur de m , ces transformations seroient évidemment impossibles, ou du moins on seroit conduit à d'autres résultats, et la relation cesseroit d'être projective sous sa forme actuelle. Dans ces mêmes circonstances, pour construire le point q défini par cette relation, il faudra nécessairement faire usage de mesures graduées ou du compas, tandis que la construction du centre des moyennes harmoniques n'exige, comme on l'a fait voir (14.), que l'usage de la règle seule.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de construire le point Q (Fig. 6.) tel qu'on ait, en égard à la règle des signes établie ci-dessus:

$$\frac{n}{pQ} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{etc.},$$

n étant un nombre quelconque. On pourra d'abord construire avec la règle, le centre des moyennes harmoniques q des points donnés $a, b, c, d, \dots$ par rapport à l'origine p ; ce qui donnera, m étant le nombre de ces points

$$\frac{m}{pq} = \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} + \frac{1}{pd} + \text{etc.},$$

d'où

$$\frac{n}{pQ} = \frac{m}{pq} \text{ et } pQ = \frac{n}{m} pq,$$

expression qu'on ne pourra construire qu'à l'aide de mesures graduées ou du compas.

Il est évident qu'on pourroit aussi opérer directement, comme il a été indiqué art. 15.

24. En général, une équation dont les deux membres seroient composés de la somme d'une suite de réciproques assujetties à la règle de signes posée ci-dessus, et d'ailleurs multipliées par des coefficients numériques quelconques, sera ou non projective sous sa forme actuelle, et appartiendra ou non à la géométrie de la règle, toutes les fois que la somme des coefficients numériques relatifs à chaque terme, sera, abstraction faite des signes de position, ou ne sera pas la même de part et d'autre.

Pour fixer nos idées, supposons d'abord que l'on ait entre les points $p, q, a, b, c, \dots$ (Fig. 6.) la relation

$$\frac{m+m'+m''+\dots}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \text{etc.}$$

dans laquelle $m, m', m'', \dots$ sont des coefficients numériques quelconques, positifs ou négatifs, mais indépendans de la position des points $a, b, c, \dots, q$, à l'égard de p ; cette équation étant d'ailleurs assujettie à la règle de signes posée art. 6., elle se changera évidemment en ces deux autres, par des transformations analogues à celles des No. 17. et 20.:

$$\frac{maq}{ap} + \frac{m'bq}{bp} + \frac{m''cq}{cp} + \frac{m'''dq}{dp} + \text{etc.} = 0,$$

$$\frac{mAa}{pa} + \frac{m'Ab}{pb} + \frac{m'Ac}{pc} + \frac{m'Ad}{pd} + \text{etc.} = (m+m'+m''+\dots)\frac{Aq}{pq},$$

A étant une nouvelle origine quelconque; et réciproquement, de celle-ci on pourra conclure la relation primitive. Mais ces relations sont projectives (18.), donc il en sera de même de la primitive; je dis en outre qu'elles appartiennent à la géométrie linéaire ou de la règle.

En effet, au moyen de la règle, on trouvera (12.) le point x de ab tel, qu'en supposant ab divisée en $m+m'$ parties harmoniques par rapport à p , ax en contienne m' et bx , m : or on aura, d'après l'art. 9.,

$$\frac{m+m'}{px} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb}.$$

Pareillement on trouvera avec la règle, sur cx le point m' qui répond à la m^e partie harmonique de cette distance supposée en contenir $m+m'+m''$, et l'on aura

$$\frac{m+m'+m''}{px'} = \frac{m+m'}{px} + \frac{m''}{pc'} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc}$$

et ainsi de suite. Donc on arrivera à un dernier point de division X tel qu'on aura:

$$\frac{m + m' + m'' + \dots}{pX} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \dots,$$

et qui ne sera par conséquent que le point q lui-même, le quel se trouvera ainsi construit linéairement ou avec la règle seule.

25. Supposons maintenant (Fig. 7.) qu'on ait la relation harmonique quelconque

$$\frac{n}{pq} + \frac{n'}{pr} + \frac{n''}{ps} + \dots = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \dots$$

relativement à des points $a, b, c, \dots, q, r, s$ situés en ligne droite, et à l'origine p des segmens harmoniques.

D'après ce qui précède, on pourra d'abord remplacer tous les points $a, b, c, \dots$ par un point X , constructible à l'aide de la règle, et tel qu'on ait

$$\frac{m + m' + m'' + \dots}{pX} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \dots;$$

on en trouvera, de la même manière, un autre Y tel qu'on ait

$$\frac{n + n' + n'' + \dots}{pY} = \frac{n}{pq} + \frac{n'}{pr} + \frac{n''}{ps} + \dots;$$

donc, d'après la relation proposée, il viendra

$$\frac{n + n' + n'' + \dots}{pY} = \frac{m + m' + m'' + \dots}{pX}.$$

Si donc $n + n' + n'' + \dots = m + m' + m'' + \dots$ le point X devra se confondre avec le point Y , et par conséquent la relation d'où l'on est parti, appartiendra uniquement à la géométrie de la règle et sera d'ailleurs projective d'après ce qui précède, tandis qu'elle exigera, pour être construite, la règle et le compas dans toute autre supposition.

26. Ces diverses considérations nous permettent de généraliser la définition du centre des moyennes harmoniques, à peu près comme l'ont déjà fait MM. Carnot et Simon L'huillier de Genève, à l'égard du centre des moyennes distances: en posant, par exemple, pour la définition de ce point, l'équation

$$\frac{m + m' + m'' + \dots}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \text{etc.},$$

q pourra encore être appelé le centre des moyennes harmoniques de $a, b, c, \dots$ relativement à p , mais pour des coefficients numériques quelconques positifs $m, m', m'', \dots$. Quant au cas où quelques uns de ces coefficients seroient négatifs indépendamment des signes de posi-

tion des segmens auxquels ils se rapportent, on pourroit nommer le point correspondant q l'ex-centre des moyennes harmoniques, comme l'a fait, d'une manière analogue, Mr. L'huillier pour le cas des simples distances. En effet, la relation ci-dessus conduisant à cette autre, d'après ce qui a été observé plus haut (24.),

$$(m + m' + m'' + \dots) \frac{Aq}{pq} = \frac{mAa}{pa} + \frac{m'Ab}{pb} + \frac{m''Ac}{pc} + \text{etc.},$$

on retombera directement sur les définitions du centre et de l'ex-centre des moyennes distances, définis par M. L'huillier, en supposant (21.) que le point p passe à l'infini.

27. Je crois inutile de pousser plus loin ces rapprochemens entièrement analogues à ceux qui ont été établis, dans ce qui précède, pour le cas particulier où les coefficients $m, m', m'', \dots$ sont simplement égaux à l'unité; et je ferai seulement remarquer que les diverses définitions et propositions établies jusqu'à présent, pour ce cas particulier, doivent s'étendre, de la même manière, au cas général: ainsi, par exemple, le point p sera toujours l'origine des segmens harmoniques; et si, d'un point quelconque s de l'espace, on mène aux différens points que l'on considère des projetantes $sp, sq, sa, sb, sc, \dots$ celles qui appartiennent à p et à q devront continuer à s'appeler (15.) les axes des origines et des moyennes harmoniques de toutes les autres etc.

Dans le paragraphe suivant, je montrerai comment on peut étendre toute cette doctrine du centre des moyennes harmoniques, au cas où l'on considère des points quelconques situés dans un plan ou dans l'espace.

Du centre des moyennes harmoniques d'un système de points quelconques situés ou non dans un même plan.

28. Nous n'avons encore envisagé, jusqu'à présent, que les propriétés relatives au centre des moyennes harmoniques de points rangés en ligne droite; mais ce que nous avons dit pour ce cas particulier va nous conduire, sans peine, à ce qui concerne le système d'un nombre quelconque de points situés à volonté sur un plan ou dans l'espace; car tout consiste simplement à partir de la définition ordinaire du centre des moyennes distances pour en déduire, à l'aide de la perspective ou projection centrale, celle qui convient au centre des moyennes harmoniques en général, et même les diverses propriétés qui peuvent lui appartenir. Il est

entendu d'ailleurs que, dans tout ce qui va suivre, le centre des moyennes distances et celui des moyennes harmoniques seront pris par rapport à des coefficients numériques quelconques, répondans respectivement aux points proposés suivant les définitions admises No. 26.

Considérons d'abord le cas où le système des points proposés $A, B, C, D, \dots$ (Fig. 8.) appartient à un même plan, et soit Q le centre des moyennes distances de ces points: l'une des propriétés essentielles du point Q c'est que, si l'on fait la projection du système sur une droite arbitraire bd , et par des parallèles $Aa, Bb, Cc, \dots$ à un axe quelconque, la projetante Qq de Q , sera l'axe des moyennes distances (15. et 27.) de celles des autres points du système, de sorte que, pour la transversale arbitraire bd , le point Q qui appartient à cet axe, sera le centre des moyennes distances des points $a, b, c, d, \dots$ relatifs aux diverses projetantes, ou, en d'autres termes, il sera (21.), par rapport au point à l'infini de bd , le centre des moyennes harmoniques, de ces mêmes points.

Cela posé, voyons ce qui se passe dans la perspective de la figure sur un nouveau plan arbitraire: tout système de projetantes parallèles $Aa, Bb, Cc, \dots$ sera devenu (Fig. 9.) un faisceau de droites convergentes en un même point S , et tous les points de concours S seront rangés sur une même droite PS , projection ou perspective de tous les points à l'infini du premier plan (Traité de propriétés projectives, No. 106.); le point p où la droite PS ira rencontrer la transversale arbitraire bd qui lui correspond, représentera donc aussi le point à l'infini de bd dans la figure primitive 8., de sorte que le point q sera devenu (26.) le centre des moyennes harmoniques des points $a, b, c, \dots$ par rapport à p . Mais la droite bd est arbitraire; donc, pour tout faisceau de projetantes, semblable à celui qui précède, la projetante SQ de Q sera (27.) l'axe des moyennes harmoniques de celles $SA, SB, SC, \dots$ des points proposés, par rapport à la droite invariable SP , qui, ici, sert d'axe commun des origines.

29. D'après cela, on peut dire que le point Q est le centre des moyennes harmoniques des points proposés $A, B, C, \dots$; et cela non d'une manière absolue, mais seulement par rapport à la droite particulière PS , qu'on peut appeler l'axe des origines harmoniques. Or il s'agit de prouver maintenant qu'un système quelconque de points

$A, B, C, \dots$ (Fig. 9.) étant donné sur un plan, aussi bien qu'une droite PS prise pour axe des origines harmoniques, on peut toujours déterminer un point Q , et seulement un point Q , qui jouisse, par rapport à cette droite, des propriétés qui viennent d'être examinées, ou qui soit le centre des moyennes harmoniques des points proposés $A, B, C, \dots$ relativement à cette droite.

Qu'on mette, en effet, la figure en perspective sur un plan quelconque parallèle à la droite PS , c'est-à-dire tel que cette droite passe à l'infini dans la nouvelle figure; il est clair, d'après ce qui précède, que s'il existe, pour la figure primitive, un ou plusieurs points qui soient des centres de moyennes harmoniques par rapport aux proposés et à PS , tous ces centres devront se changer à la fois, en des centres de moyennes distances pour la nouvelle figure; mais un système de points quelconques ne sauroit avoir plus d'un centre de moyennes distances, et possède cependant toujours un tel point; donc pareillement le système des points proposés a toujours un centre de moyennes harmoniques par rapport à une droite donnée à volonté sur son plan, et ne sauroit avoir qu'un seul point pareil pour chaque position donnée de cette droite, ce qui donne lieu à la proposition suivante.

Une droite, prise pour axe des origines, étant donnée à volonté dans le plan d'un système de points quelconques, il existe un autre point et seulement un point, qu'on peut nommer le centre des moyennes harmoniques des premiers par rapport à la droite proposée, et dont la propriété est telle que, si d'un point quelconque de cette droite, on mène des projetantes aux points donnés, l'axe (27.) des moyennes harmoniques de toutes ces projetantes, par rapport à la droite donnée, ira toujours passer par le point fixe ou centre des moyennes harmoniques dont il s'agit.

30. Les propriétés ci-dessus du centre des moyennes harmoniques de points quelconques situés sur un plan, se rapportent évidemment (24.) à celles que nous avons nommées projectives; donc si, d'un point quelconque de l'espace, on fait la projection ou perspective de la figure sur un nouveau plan quelconque, le centre des moyennes harmoniques des points proposés ne cessera pas d'être un centre de moyennes harmoniques en projection, par rapport à la droite qui représente l'axe des ori-

gines harmoniques du premier système; on pourra donc dire aussi que, dans l'espace, la projetante de ce point est l'axe des moyennes harmoniques des projetantes qui appartiennent aux points proposés, et cela non d'une manière absolue, mais relativement au plan projetant de la droite d'où se comptent les segmens harmoniques, plan qu'on peut aussi nommer pour cette raison, plan des origines harmoniques.

Ces définitions sont évidemment des extensions de celles de l'art. 27. relatives aux faisceaux de droites convergentes tracées dans un même plan, et elles donnent lieu à l'énoncé qui suit:

Un système de points quelconques étant situé dans un même plan, et un plan quelconque étant donné à volonté dans l'espace, si, d'un point choisi arbitrairement dans ce dernier plan, on mène des droites ou *projetantes* aux différens points du premier, puis qu'on détermine, par rapport au second plan considéré comme plan des origines, l'axe des moyennes harmoniques de ces droites, tous ses axes semblables iront passer par un même point, qui sera (29.) le centre des moyennes harmoniques des proposés, relativement à la droite d'intersection de son plan et du plan des origines.

31. Maintenant il ne nous sera pas difficile d'étendre ces considérations au cas où les points proposés $A, B, C, D, \dots$ (Fig. 9.) au lieu d'être sur un même plan, sont situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Remarquons d'abord qu'un système pareil a toujours un centre de moyennes distances et n'en a qu'un seul dont la propriété est que, „si „l'on projette par des parallèles quelconques, tous les points proposés sur un plan arbitraire, la projection de ce centre sera encore le „centre des moyennes distances de la projection des autres points du „système; c'est-à-dire que la projetante qui lui est relative sera l'axe „des moyennes distances de celles des autres points de la figure.”

Mais, d'après les principes que nous avons établis dans le *Traité des propriétés projectives* (Supplément. No. 5. 6. et suiv.), la figure qu'on vient de considérer peut toujours être censée la perspective en relief d'une autre, dans la quelle tous les points à l'infini de l'espace, relatifs à la première, sont remplacés par ceux d'un plan unique; de sorte que les différens faisceaux de projetantes parallèles de cette figure,

sont devenus des faisceaux de droites convergeants en des points de ce plan. De plus, dans la nouvelle figure, les centres et axes de moyennes distances sont devenus (30.) des centres et axes de moyennes harmoniques par rapport au plan dont il s'agit ou aux droites qui le concernent; et d'un autre côté, quelle que soit la situation d'un plan à l'égard d'un système de points quelconques donnés dans l'espace, on peut toujours, d'après les principes cités, considérer ce système comme la perspective en relief d'un autre pour lequel le plan dont il s'agit est passé à l'infini; donc enfin:

Un système de points quelconques, et un plan étant donnés dans l'espace, il existe toujours un autre point et un seul point, qu'on peut nommer *centre des moyennes harmoniques* des proposés par rapport au plan que l'on considère en particulier, et dont la propriété est telle que, si on le projette ainsi que tous les proposés sur un nouveau plan arbitraire et à partir d'un point quelconque du premier pris pour centre de projection, il demeure dans cette projection un centre de moyennes harmonique relativement à la droite d'intersection des deux plans; c'est-à-dire que la projetante qui le renferme est (30.) l'axe des moyennes harmoniques de toutes les autres, relativement au plan qui contient tous les centres de projection, et qui est encore ici le *plan des origines harmoniques*.

32. S'il étoit permis de se servir du compas ou du tracé des parallèles, ce qui précède montre assez comment on devrait opérer pour obtenir le centre des moyennes harmoniques d'un système de points quelconques situés dans un plan ou, en général dans l'espace; car, en mettant le système de ces points en perspective de façon que la droite ou le plan des origines harmoniques, qu'on s'est donné arbitrairement, passe à l'infini, tout reviendrait à déterminer le centre des moyennes distances des points de la nouvelle figure et à le projeter sur la première.

Mais, si l'on veut simplement opérer avec la règle, il faudra s'y prendre d'une autre manière.

Par exemple, si les points proposés $A, B, C, D, \dots$ (Fig. 9.) sont dans un même plan, ainsi que la droite PS qui sert d'origine aux segmens harmoniques, il faudra, de deux points différens S, S' de cette

droite, faire la perspective ou projection centrale des proposés sur deux droites arbitraires telles que pd par exemple; cherchant ensuite, par les procédés du No. 24., et pour chaque droite pd , le centre des moyennes harmoniques q des points $a, b, c, d, \dots$ de la projection, et cela par rapport au point p qui appartient à l'axe PS des origines harmoniques, les projetantes qS des centres partiels ainsi obtenus, iront se couper au centre unique (29.) Q des moyennes harmoniques que l'on cherche.

Si les points proposés $A, B, C, \dots$ étoient situés d'une manière quelconque dans l'espace, il suffiroit évidemment de remplacer, dans les opérations ci-dessus, l'axe PS des origines harmoniques et les transversales arbitraires pd par des plans.

33. Mais on peut aussi opérer directement sur les points proposés, sans recourir à la projection, ainsi que cela se pratique lorsqu'il s'agit de trouver le centre des moyennes distances; et cette méthode aura en même temps l'avantage d'être plus expéditive que la précédente.

Pour cela, il suffit d'observer, d'après ce qui précède, que l'un de ces systèmes peut toujours être envisagé comme la perspective de l'autre, et qu'il n'y a de différence entre eux, qu'en ce que, pour le cas des moyennes distances, le point, la droite, le plan qui servent d'origine aux segments harmoniques, sont situés entièrement à l'infini, de sorte que les systèmes de lignes qui y convergent sont des systèmes de parallèles, tandis que les divisions harmoniques sont remplacées par les divisions en parties égales, et vice versa pour l'autre système de points.

Soient, par exemple, A, B, C (Fig. 10.) trois points quelconques dont il faille trouver le centre des moyennes harmoniques Q par rapport à la droite PP' ; on se rappellera que, dans le cas où la droite PP' est à l'infini, et où le point Q devient (Fig. 11.) le centre des moyennes distances de A, B, C , on n'a qu'à prendre les points milieux q, q', q'' des côtés du triangle ABC , et à joindre par une droite chacun de ces points au sommet opposé du triangle; car ces droites donneront, par leur croisement, le point Q demandé. Opérant donc de la même manière sur le triangle proposé ABC (Fig. 10.), en prenant (2. et 7.) pour les points q, q', q'' , les centres de moyennes harmoniques des couples de sommets correspondans, et cela en choisissant pour origines respectives des segments harmoniques les points P, P', P'' , où les côtés du triangle ABC vont rencontrer la droite PP' , le point Q , ainsi construit, sera le cen-

tre des moyennes harmoniques des sommets A, B, C par rapport à cette droite.

34. Pour le cas de quatre points A, B, C, D (Fig. 12.), dont on veut avoir le centre Q des moyennes harmoniques par rapport à la droite $P'P''$, on prendra ces points pour les sommets d'un quadrilatère $ABCD$, dont on prolongera les côtés jusqu'à la droite $P'P''$; on déterminera ensuite les centres des moyennes harmoniques q, q', q'', q''' des paires de sommets appartenans à chaque côté, et cela relativement au point de rencontre de ce côté et de la droite $P'P''$; joignant ensuite ceux de ces centres qui se trouvent sur les côtés opposés du quadrilatère, on aura les droites $qq'', q'q'''$ dont l'intersection Q sera le point demandé; car c'est ainsi qu'on opéreroit si la droite $P'P''$, passant à l'infini, il s'agissoit de déterminer le centre Q des moyennes distances des points A, B, C, D .

On pourroit d'ailleurs remplacer le quadrilatère $ABCD$ par tout autre qui auroit les mêmes sommets; on pourroit aussi chercher le centre des moyennes harmoniques de trois quelconques des points proposés, et le joindre au quatrième par une droite qui devrait renfermer le point cherché etc.; dans tous les cas on obtiendra un point unique Q , comme cela a lieu lorsqu'on suppose l'axe des origines $P'P''$ à l'infini.

35. Si l'on avoit cinq points à considérer, on rechercheroit d'abord le centre des moyennes harmoniques de quatre quelconques de ces points; et la droite qui le joindroit au cinquième, renfermeroit le centre des moyennes harmoniques du système total des points donnés; une nouvelle opération analogue donneroit donc ce centre lui-même. En général, on pourra prendre le centre des moyennes harmoniques d'un certain nombre de points, puis le centre pareil des points restans; la droite qui renfermera les deux centres ainsi trouvés contiendra aussi celui du système total des points donnés. Mais, au lieu de rechercher une nouvelle droite qui contienne ce dernier centre, on pourra se contenter de déterminer, sur la première (9. et 12.), le centre des moyennes harmoniques des deux centres partiels déjà trouvés, relativement aux nombres qui marquent de combien de points ces centres respectifs proviennent etc.

On voit comment il faudroit s'y prendre pour un nombre quelconque de points qui seroient supposés dans l'espace; il suffiroit, dans les

opérations ci-dessus, de remplacer la transversale $P'P''$ par un plan, ainsi qu'il a déjà été expliqué (32.).

36. Ce qui précède est simplement relatif au cas où les coefficients numériques, par rapport auxquels on prend les centres de moyennes harmoniques, sont égaux à l'unité ou égaux entre eux; mais il est évident d'après les art. 26., 27. etc. que tout ce que nous avons pu dire, jusqu'à présent, de ce cas particulier, est immédiatement applicable à celui où les coefficients seroient des nombres quelconques répondant respectivement aux points donnés. Ainsi, par exemple, si l'on a trois points A, B, C (Fig. 10.) dont m, m', m'' sont les coefficients numériques respectifs, et qu'il s'agisse d'en trouver le centre des moyennes harmoniques Q , par rapport à ces coefficients et à la droite P, P' ; on prendra d'abord (9. et 12.) le centre des moyennes harmoniques q des points A et B , par rapport aux coefficients m et m' qui leur correspondent, et au point P de la droite des origines PP' ; puis on prendra pareillement le centre des moyennes harmoniques q' des points B et C , par rapport aux coefficients numériques m' et m'' et au point P' de PP' ; les droites qC et $q'A$ iront encore se croiser au point Q demandé, et il en seroit de même de la droite $q''B$, qui appartient au centre des moyennes harmoniques q'' de A et de C , par rapport aux coefficients numériques m et m'' de ces points.

En effet, si l'on met la figure en perspective de façon que la droite PP' passe à l'infini, le point Q deviendra évidemment le centre des moyennes distances des points A, B, C par rapport aux coefficients respectifs m, m', m'' .

D'après cet exemple et d'après ce qui a été dit pour le cas particulier où les coefficients numériques sont égaux à l'unité, on voit ce qu'il y auroit à faire pour celui où l'on auroit un nombre quelconque de points auxquels correspondroient respectivement des coefficients numériques donnés, s'il s'agissoit de trouver, pour ces coefficients, le centre des moyennes harmoniques des points dont il s'agit.

37. Il n'est pas inutile d'observer que le cas particulier où les coefficients numériques sont égaux entre eux ou égaux à l'unité, donne lieu à des simplifications notables dans la construction générale ci-dessus du centre des moyennes harmoniques. Car, par exemple, s'il s'agit des sommets d'un triangle ABC (Fig. 10.), tout consistera alors, pour avoir les

trois droites cq , Aq' et Bq'' qui contiennent leur centre Q des moyennes harmoniques, de former un nouveau triangle $A'B'C'$ circonscrit au premier, et dont les côtés aillent concourir respectivement aux points P , P' et P'' où les côtés qui leur sont opposés dans le premier, vont rencontrer l'axe ou le plan des origines harmoniques PP' ; en effet en se reportant à la projection (Fig. 11.), où l'on suppose PP' à l'infini, il sera facile de voir que les droites AA' , BB' , CC' qui joignent les sommets opposés des triangles seront précisément celles qui se croisent au point Q demandé.

On peut d'ailleurs remarquer que le triangle inscrit $qq'q''$, qui a ses sommets aux centres des moyennes harmoniques q , q' , q'' des côtés du proposé ABC , jouit, à son égard, des mêmes propriétés que le triangle circonscrit $A'B'C'$; de sorte que, si l'on connoissoit seulement l'un quelconque q de ses sommets, on obtiendrait les deux autres par le simple tracé des droites $P'q''q$, $P''q'q$.

38. Plus généralement, si l'on a un nombre quelconque de points A , B , C , D (Fig. 12.) situés ou non dans un même plan, et que $P'P''$ soit l'axe ou le plan des origines harmoniques, il suffira de connaître le centre des moyennes harmoniques q de deux quelconques A , B de ces points, pour en déduire sur le champ, ceux qui appartiennent à tous les points proposés en les prenant deux à deux.

Supposons, par exemple, que les points A , B , C , D , ... soient pris pour les sommets d'un polygone $ABCD$, il sera très facile d'obtenir, sur chaque côté, le centre des moyennes harmoniques des sommets adjacens; car, d'après ce qui précède, pour avoir le centre q' des sommets B et C , ayant déjà le centre q de A et B , on n'aura qu'à tracer la droite qq' qui va rencontrer l'axe des origines harmoniques $P'P''$ au même point que la diagonale AC du polygone appartenant aux trois sommets consécutifs A , B , C que l'on considère.

Pareillement, pour obtenir le centre q'' qui appartient au côté suivant CD , on n'aura qu'à tracer la droite $q'q''$ qui va rencontrer l'axe des origines au point où le rencontre la diagonale BD , déterminée par les sommets extrêmes des côtés BC et CD que l'on considère et auxquels appartiennent les points q' et q'' . En continuant donc ainsi jusqu'au dernier côté du polygone $ABCD$, on formera un nouveau polygone q , q' , q'' , q''' inscrit au premier, dont les côtés rencontreront respectivement l'axe des origines $P'P''$ aux points où le coupent les diago-

nales du premier polygone qui joignent ses sommets alternatifs, et dont les sommets seront précisément les centres de moyennes harmoniques qu'on cherche sur les côtés du polygone $ABCD\dots$

Il est clair qu'ayant une fois les centres de moyennes harmoniques des différens côtés du polygone $ABCD\dots$, on aura, sans peine, celui qui appartient à une diagonale ou à deux sommets quelconques, car cette diagonale est elle-même le dernier côté de l'un ou de l'autre des polygones dans lesquels elle divise le proposé, polygones dont on connoît déjà les centres de moyennes harmoniques des différens côtés à l'exception de celui du dernier, qu'on pourra obtenir ainsi par le tracé des simples lignes droites.

39. Toutes ces constructions peuvent d'ailleurs s'établir directement, en supposant qu'on mette la figure en perspective, de façon que la droite ou le plan $P'P''$ des origines harmoniques passe à l'infini; et l'on voit en même temps quelle espèce de simplifications elles apportent dans la détermination ci-dessus (art. 35.) du centre des moyennes harmoniques d'un nombre quelconque de points situés à volonté sur un plan ou dans l'espace; or ces remarques ne sont pas simplement curieuses comme on va s'en convaincre par ce qui suit.

En effet, ce qui précède fournit un moyen très simple et très expéditif pour construire, sur une droite pd (Fig. 9.), le centre des moyennes harmoniques q d'un nombre quelconque de points $a, b, c, \dots$, par rapport à un dernier point p pris pour origine de segmens harmoniques; car, ayant mené d'un point quelconque S situé au dehors de la droite pd , les projetantes $Sa, Sb, Sc, Sd, \dots$, puis, ayant pris, à volonté, de nouveaux points $A, B, C, D, \dots$ sur chacune d'elles et répondant respectivement à ceux dont on cherche le centre des moyennes harmoniques, tout consistera à construire, comme il vient d'être expliqué dans ce qui précède, le centre pareil Q des points $A, B, C, D, \dots$ par rapport à PS pris pour axe des origines, et à projeter ce centre, de S , sur pd , en q qui sera (28. et 29.) le point demandé.

40. Cette construction est plus simple que celle qui a été indiquée art. 14., et l'on peut remarquer qu'elle s'étend immédiatement au cas général où le centre q des moyennes harmoniques que l'on cherche, est relatif (26.) à des coefficients numériques quelconques $m, m', m'', \dots$ répondant respectivement aux points donnés $a, b, c, d, \dots$, puisqu'il

suffit évidemment, au lieu de se borner à ne prendre qu'un seul point $A, B, C, \dots$ sur chacune des projetantes $Sa, Sb, Sc, \dots$ qui appartiennent aux proposés, d'en choisir autant qu'il est marqué par le coefficient numérique relatif à cette projetante ou au point d'où elle dérive.

Que l'on ait, par exemple, deux points a, b auxquels correspondent respectivement les coefficients numériques m et m' , on devra prendre m points arbitraires sur la projetante Sa , et m' points pareils sur la projetante Sb ; cherchant ensuite le centre Q des moyennes harmoniques de ces $m + m'$ points et le projetant en q sur pb , q sera le centre des moyennes harmoniques de a et de b relativement à m et m' ; c'est-à-dire qu'on aura (9.)

$$\frac{m+m'}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb},$$

ou (24.)

$$m \frac{aq}{ap} + m' \frac{bq}{bp} = 0,$$

en ayant égard à la règle de signes posée art. 17.

Les points $A, B, C, \dots$ qu'on doit prendre sur les diverses projetantes $Sa, Sb, Sc, \dots$ pouvant avoir une position quelconque, on devra profiter de cette indétermination pour simplifier les opérations relatives à la recherche des points Q et q ; mais ces simplifications se présentent d'une manière trop facile, dans les projections de la figure où ces points deviennent des centres de moyennes distances, pour qu'il soit nécessaire d'entrer dans des détails; et l'on seroit conduit d'ailleurs à des résultats qui n'auroient qu'un léger avantage sur ceux de l'art. (9.) et suiv. où l'on ne considère simplement que deux points a, b et les coefficients numériques m et n relatifs à ces points.

Application de la théorie du centre des moyennes harmoniques aux propriétés des figures rectilignes et polyédrales.

41. La théorie qui vient de nous occuper donne lieu à un grand nombre de propriétés nouvelles concernant les figures rectilignes; beaucoup de ces propriétés entièrement analogues à celles qu'on déduit ordinairement de la théorie du centre des moyennes distances, sont par là même faciles à découvrir et peuvent être abandonnées aux investigations du lecteur; mais il en est d'autres qui, se rattachant à des propriétés du centre des moyennes distances non aussi généralement connues, et qui,

étant susceptibles d'être transportées dans la théorie des courbes et des surfaces géométriques, méritent qu'on leur accorde une attention plus particulière; or c'est à cet objet que nous allons consacrer les dernières pages de ce Mémoire.

Remarquons, en premier lieu, que la plupart des principes que nous avons établis sur le centre des moyennes harmoniques, peuvent être envisagés comme autant de propriétés distinctes des figures composées simplement de points, de droites et de plans quelconques.

Par exemple, les principes des No. 24. et suiv. conduisent immédiatement à cet énoncé:

„Etant donné à volonté, dans un plan, un faisceau de droites projetantes $Sp, Sa, Sb, Sc, \dots$ (Fig. 7.), c'est-à-dire convergeant en un même point S , si, ayant choisi l'une quelconque d'entre elles Sp , pour axe des origines harmoniques, on mène arbitrairement des transversales droites $ps, p's', \dots$ dans ce faisceau, puis qu'on détermine, sur chacune d'elles, le centre des moyennes harmoniques $q, q', \dots$, des points d'intersection $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots$, qui lui appartiennent, par rapport aux points $p, p', \dots$ de l'axe Sp des origines harmoniques et relativement à des coefficients numériques quelconques (26.); la suite des centres pareils sera une seule et même droite Sq , passant par S , et que nous avons nommée l'axe des moyennes harmoniques du faisceau formé par toutes les autres projetantes.”

42. Au lieu de mener arbitrairement les transversales $ps, p's', \dots$, on peut exiger qu'elles passent par un même point du plan de la figure, et prendre ce point, sur l'axe Sp des origines harmoniques, en p par exemple, au quel cas cet axe devient inutile pour déterminer les centres q , puisque le point p est, pour toutes les transversales, l'origine commune et unique des segmens harmoniques: le théorème ci-dessus subsiste évidemment toujours; mais ainsi particularisé, il offre l'avantage singulier de pouvoir s'étendre à un système de droites quelconques situées dans un plan, et non plus simplement à un système de droites convergeant en un même point S ; bien plus, pour arriver au théorème ainsi généralisé, il suffit, comme on va le voir, de partir du cas particulier où l'on ne considère que deux droites uniques Sa et Sb , cas qui se déduit immédiatement des principes exposés art. 8. et 9. de ce Mémoire.

Soient, en effet, $AB, BC, CD, \dots$ (Fig. 13.) des droites indéfinies quelconques situées sur un plan, p un point arbitraire pris pour pôle des transversales pb qui rencontrent respectivement en $a, b, c, d, \dots$ les droites fixes dont il s'agit; je dis que si l'on détermine, sur chaque transversale pb , le centre q des moyennes harmoniques des points $a, b, c, d, \dots$ par rapport au pôle p , pris pour origine des segmens et aux coefficients numériques quelconques $m, m', m'', \dots$, la suite des points q sera une droite unique qQ' , qu'on pourra appeler l'axe des moyennes harmoniques des droites proposées, relativement à p et aux différens coefficients qui leur correspondent respectivement.

Pour le prouver, considérons d'abord deux droites AB, BC , aux quelles répondent les coefficients numériques m et m' ; si, sur les transversales pd , nous prenons sans cesse les centres q' des moyennes harmoniques qui répondent aux points a et b de l'angle ABC , et aux coefficients m et m' , d'après ce qui précède, la suite des centres q' sera une droite $q'B$ passant par le sommet de l'angle, et à laquelle correspondra (24. et 26.) un nouveau coefficient $m + m'$. Soit Q le point où cette droite rencontre CD , la troisième des droites données; prenons sur la transversale variable pb , le nouveau centre q'' des moyennes harmoniques des points c et q' qui appartiennent aux côtés Cdc et BQq' , de l'angle Q , et cela par rapport au point p et aux coefficients $m'', m + m'$ répondans respectivement à ces côtés; le point q'' sera le centre des moyennes harmoniques de a, b, c , et la suite de ces centres sera sur une nouvelle droite $q''Q$ passant par Q , à la quelle correspondra un coefficient $m + m' + m''$, et qui rencontrera la quatrième AD des droites données en un point Q' , qu'il faudra prendre pour nouveau sommet d'angle B . On arrivera donc, en continuant ainsi, à une dernière droite qQ' qui sera le lieu des centres de moyennes harmoniques de tous les points d'intersection $a, b, c, d, \dots$ de la transversale mobile et des droites proposées, et qui en sera l'axe des moyennes harmoniques pour les coefficients $m, m', m'', \dots$, et relativement au pôle p ; théorème qu'on peut énoncer très simplement de cette manière:

Un système de droites quelconques étant donné dans un plan, si l'on coupe ce système par une suite de droites transversales passant par un même point ou pôle, puis qu'on détermine, pour chaque transversale, le centre des moyen-

nes harmoniques des points d'intersection correspondans, en prenant le pôle pour origine des segmens; la suite de tous les centres pareils sera une droite unique; c'est-à-dire l'axe des moyennes harmoniques des proposées par rapport au pôle et aux coefficients donnés *).

43. Remarquons que chaque de manières dont nous avons enseigné (20. 24. 26.) à définir graphiquement ou numériquement le point q de la transversale mobile pb , donne lieu à un énoncé particulier du théorème qui précède. Ainsi, par exemple, si l'on définit le point q par la relation

$$\frac{maq}{ap} + \frac{m'bq}{bp} + \frac{m''cq}{cp} + \frac{m'''dq}{dp} + \text{etc.} = 0,$$

ou par celle-ci

$$\frac{m+m'+m''+\dots}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \text{etc.},$$

la suite des points q sera une ligne droite.

Il en sera de même évidemment de la suite des points q déterminés par la relation plus générale

$$\frac{k}{pq} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pb} + \frac{m''}{pc} + \text{etc.},$$

dans laquelle k est un coefficient numérique quelconque. Maintenant si, dans cette dernière relation, on suppose tous les coefficients égaux à l'unité, on retombera sur le cas particulier démontré directement par Mac-Laurin, dans son *Traité des lignes géométriques*, à l'aide du principe de l'art. 7. qui lui est dû. Mais on peut généraliser d'avantage encore ces diverses propositions.

44. Si nous remplaçons en effet, dans le théorème ci-dessus, les différents droites données par des plans situés d'une manière quelconque

*) Dans le cas particulier où, les coefficients $m, m', \dots$ étant égaux à l'unité, on ne considère que le système de trois lignes droites, et où l'on prend pour pôle p le centre de gravité ou des moyennes distances du triangle formé par ces droites, l'axe des moyennes harmoniques passe tout entier à l'infini, et l'on a, pour une transversale quelconque issue de p et rencontrant en a, b, c , les côtés du triangle,

$$\frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{pc} = 0;$$

et, en effet, cette relation, en ayant égard à la loi des signes (17.), est satisfaite pour les trois positions de la transversale où elle passe par l'un des sommets du triangle; car on a alors, par exemple, $pb = pc = 2pa$.

Ce théorème a été démontré par Mac-Laurin dans son *Traité des courbes géométriques*.

dans l'espace; la suite des points g ne sera plus simplement sur une droite, mais sur un dernier plan qu'on pourra nommer le plan des moyennes harmoniques relativement au pôle des transversales.

On pourroit établir ce théorème directement et d'une manière analogue à celle que nous venons de mettre en usage pour les systèmes de lignes droites, en partant du cas particulier, et très facile à démontrer, où l'on n'a que deux plans à considérer; mais on peut le déduire aussi très simplement du théorème qui précède.

Par le point qui sert de pôle aux transversales et d'origine aux segmens harmoniques, menons, en effet, un plan arbitraire; il coupera les plans proposés suivant un système de droites ayant, d'après le théorème cité, une droite unique pour axe des moyennes harmoniques par rapport à ce pôle; or tous les axes semblables se rencontreront évidemment deux à deux; donc ils seront tous compris dans un seul plan, qui sera le plan même des moyennes harmoniques des proposés, suivant la définition admise ci-dessus. Ainsi:

Un système de plans quelconques a toujours, par rapport à un point fixe pris pour origine et pour pôle des transversales un plan unique des moyennes harmoniques, c'est-à-dire renfermant tous les centres de moyennes harmoniques des points d'intersection qui appartiennent aux diverses transversales.

45. Remplaçons encore, dans le théorème de l'art. 42., le pôle par une droite servant d'axe des origines harmoniques, les transversales droites par des plans transversaux passant par cet axe; enfin supposons les droites proposées situées d'une manière quelconque dans l'espace; je dis que la suite des centres (29.) de moyennes harmoniques des points d'intersection de ces droites et des différens plans transversaux, par rapport à l'axe commun des origines, sera une dernière ligne droite, qu'on pourra nommer l'axe de moyennes harmoniques des proposées par rapport au premier axe.

Projetons, en effet, sur un plan quelconque, le système des droites proposées et l'axe des origines harmoniques, à partir d'un point quelconque de cet axe pris pour centre de projection, c'est-à-dire de façon que cet axe y devienne un point; tous les plans transversaux seront représentés par des droites en projection, et les centres de moyennes harmo-

niques qui appartiennent aux points d'intersection de ces plans et des droites proposées resteront encore (29.) de pareils centres pour les points de la projection, par rapport au point ou pôle qui représente l'axe des origines harmoniques; mais ces derniers centres sont (42.) sur une droite, donc les autres restent dans le plan projetant unique de cette droite; et, comme pareille chose doit avoir lieu pour tout autre centre et tout autre plan de projection, on voit que les différens centres de moyennes harmoniques que l'on considère dans l'espace doivent se trouver à l'intersection commune, et par conséquent unique, de tous les plans projetans analogues à celui qu'on vient d'examiner en particulier; donc enfin nous pouvons énoncer ce théorème:

Un système de droites quelconques étant donné dans l'espace, si l'on coupe ce système par une suite de plans transversaux passant par une même droite ou charnière; puis qu'on détermine, pour chaque plan, le centre (art. 32. et suiv.) des moyennes harmoniques des points d'intersection qui lui appartiennent, en prenant la charnière pour axe des origines harmoniques; la suite de tous ces centres sera une même droite, axe des moyennes harmoniques des proposées.

46. Supposons que, dans les figures relatives aux théorèmes qui précèdent, le point et la droite qui servent de pôle ou de charnière aux droites et aux plans transversaux, passe à l'infini, ces systèmes de droites et de plans transversaux deviendront respectivement parallèles, et les centres de moyennes harmoniques des points qui s'y trouvent, se changeront (26. et 29.) en des centres de moyennes distances; on arrivera donc, pour ces derniers centres, à des théorèmes qui ne seront que des cas très particuliers de ceux dont il s'agit, et qu'il sera d'ailleurs très facile d'établir directement d'après les propriétés généralement connues de cette sorte de centres. Or, en partant delà, on pourra réciproquement s'élever aux théorèmes généraux par des principes de projection analogues à ceux qui ont été mis en usage dans le chapitre précédent (31.); car on remarquera aisément que la figure relative à l'un de ces systèmes, peut toujours être regardé comme la perspective plane ou en relief de l'autre.

47. La doctrine du centre des moyennes harmoniques donne lieu à plusieurs autres propriétés générales des systèmes de points, de droites et de plans, qui ne le cèdent en rien, pour l'élégance, à celles qui précè-

dent. Parmi ces propriétés, on peut ranger les principes mêmes qui ont été énoncés art. 29. 30. et 31., lesquels sont purement relatifs à des systèmes de points quelconques rangés sur un plan ou dans l'espace; nous nous contenterons d'en indiquer rapidement quelques autres, qu'il n'eût pas été convenable d'examiner aux endroits cités.

Soit un système de plans quelconques passant par une même droite; concevons un dernier plan par cette droite, dont les différens points soient pris pour origine des segmens harmoniques, et qui sera par conséquent le plan des origines harmoniques relativement à tous les autres. Cela posé, traçons à volonté une droite transversale, et déterminons sur elle, le centre de moyennes harmoniques de toutes ses intersections avec les derniers plans par rapport au point de section du plan des origines; il est évident, d'après les principes posés art. 42. et 44., que ce centre et tous ses semblables seront compris dans un seul et même plan passant par la droite commune aux proposés, et qu'on pourra nommer le plan des moyennes harmoniques de ceux-ci par rapport au plan des origines. Ce même faisceau de plans convergeant en une même droite, sera évidemment tel que tout plan transversal y déterminera un faisceau de droites concourrant en un même point, et ayant (27.) un axe des origines et un axe des moyennes harmoniques; enfin il existera entre les sinus et les tangentes trigonométriques des angles formés par ces plans, des relations analogues à celles que nous avons vu (18. et 19.) appartenir aux faisceaux harmoniques de simples droites projetantes situées dans un plan unique, mais qui seront plus générales étant relatives à des coefficients numériques quelconques.

48. Supposons maintenant que tous les plans proposés concourent simplement en un même point; en prenant une droite arbitraire, passant par ce point, pour axe des origines, le lieu des centres harmoniques relatifs aux diverses transversales qui s'appuient sur cet axe sera évidemment encore un plan unique passant par le point commun aux proposés; car il renfermera à la fois et tous les axes de moyennes harmoniques (27.) des faisceaux de droites convergentes déterminées dans les plans proposés par tout plan transversal passant par l'axe des origines, et tous les axes de moyennes harmoni-

ques (42.) des systèmes de droites résultantes de l'intersection de ces mêmes plans par un plan transversal arbitraire, relativement au point où ce plan rencontre l'axe des origines; ce qui ne sauroit avoir lieu évidemment sans qu'il ne soit un seul et même plan.

49. Ces lemmes étant établis, concevons un système de points quelconques dans l'espace, et un plan pris pour plan des origines harmoniques; par une droite quelconque de ce plan, menons de nouveaux plans vers les points donnés, et déterminons pour chaque système pareil (47.), le plan des moyennes harmoniques par rapport au plan commun des origines, ce plan et tous ses semblables passeront par un seul et même point (31.), centre des moyennes harmoniques des proposés.

Ce théorème offre, comme on voit, une autre manière d'énoncer le principe de l'art 31. cité.

Concevons encore un système de droites quelconques situées dans l'espace, et prenons une dernière droite arbitraire pour axe des origines harmoniques; cela posé, d'un point quelconque de cet axe, menons aux diverses droites des plans, et prenons (48.), par rapport à l'axe dont il s'agit, le plan des moyennes harmoniques de ce système de plans, ce plan et tous ses semblables passeront (45.) par une seule et même droite qui sera l'axe des moyennes harmoniques des proposées.

50. Les divers exemples que nous venons de donner, doivent suffire pour montrer la nature des propositions qu'il est possible de deduire des divers principes de la doctrine du centre des moyennes harmoniques, pour les systèmes de points, de droites et de plans quelconques. Il y en auroit d'autres bien plus difficiles à établir, et qui sont en quelque sorte les réciproques des précédentes: ainsi, par exemple, ayant vu (42.) que le lieu des centres de moyennes harmoniques des différentes transversales passant par un point ou pôle, et rencontrant un système de droites données dans un plan, est une seule et dernière droite, axe des moyennes harmoniques des proposées, on pourroit se demander réciproquement quelle est l'enveloppe de tous les axes semblables de moyennes harmoniques des différens points d'une même droite prise dans le plan des pro-

posées etc.; mais cette question et toutes ses analogues exigent d'autres principes pour résolues, et elles se rattachent intimement à la théorie des courbes géométriques, que nous nous proposons d'établir dans d'autres mémoires, auxquels celui-ci ne sert pour ainsi dire que d'introduction.

Il semble d'ailleurs qu'on ne trouvera pas superflus et dénués d'intérêt par eux-mêmes, les développemens dans lesquels nous venons d'entrer, et dont la plupart nous seront très utiles pour la suite de ces recherches. Par ces mêmes considérations, nous croyons pouvoir, avant de terminer, ajouter à tous ce qui précède, quelques réflexions tendant à modifier et à rendre plus concis l'énoncé de plusieurs des théorèmes qu'on vient de faire connoître, en même temps qu'elles serviront à établir l'espèce de dépendance qui existe entre la théorie des centres de moyennes harmoniques et les principes déjà connus de la théorie des transversales.

51. Considérons le système de trois droites quelconques, pA , pB , pC (Fig. 14.), situées dans un plan et convergeant en un même point p ; soient α , β et γ trois points quelconques de leur directions respectives; on aura, pour exprimer que ces trois points sont en ligne droite:

$$\text{triang. } \alpha p \gamma = \text{triang. } \alpha p \beta + \text{triang. } \beta p \gamma,$$

et par conséquent:

$$p\alpha \cdot p\gamma \cdot \sin \alpha p \gamma = p\alpha \cdot p\beta \cdot \sin \alpha p \beta + p\beta \cdot p\gamma \cdot \sin \beta p \gamma;$$

d'où, en divisant tout par le produit $p\alpha \cdot p\beta \cdot p\gamma$,

$$\sin \angle pC \frac{1}{p\beta} = \sin \angle pB \frac{1}{p\gamma} + \sin \angle pC \frac{1}{p\alpha}.$$

Supposons que le point α soit, par rapport à p , le centre des moyennes harmoniques des points a , a' , a'' , ... situés sur la droite pA , et cela pour les coefficients numériques quelconques m , m' , m'' , ..., pareillement que β soit le centre des moyennes harmoniques des points b , b' , b'' , ... de pB par rapport à p et pour les mêmes coefficients, qu'enfin γ soit le centre pareil des points c , c' , c'' , ...; le nombre des points situés sur chaque droite étant d'ailleurs le même, on aura (26.):

$$\frac{m+m'+m''+\dots}{p\alpha} = \frac{m}{pa} + \frac{m'}{pa'} + \frac{m''}{pa''} + \text{etc.} = \Sigma \left(\frac{m}{pa} \right),$$

$$\frac{m+m'+m''+\dots}{p\beta} = \frac{m}{pb} + \frac{m'}{pb'} + \frac{m''}{pb''} + \text{etc.} = \Sigma \left(\frac{m}{pb} \right),$$

$$\frac{m+m'+m''+\dots}{p\gamma} = \frac{m}{pc} + \frac{m'}{pc'} + \frac{m''}{pc''} + \text{etc.} = \Sigma \left(\frac{m}{pc} \right),$$

dans les quelles Σ est le signe abrégé de somme.

Si nous mettons ces valeurs des réciproques de pa , $p\beta$, $p\gamma$ dans la relation trouvée ci-dessus, elle deviendra,

$$\sin ApC \cdot \Sigma \left(\frac{m}{pb} \right) = \sin ApB \cdot \Sigma \left(\frac{m}{pc} \right) + \sin BpC \cdot \Sigma \left(\frac{m}{pa} \right),$$

nouvelle relation qui permet d'exprimer ainsi très simplement le théorème du No. 43.

Ayant sur un plan un système de droites quelconques abc , $a'b'c'$, $a''b''c''$, ... , si, d'un point p pris à volonté sur ce plan, on mène trois transversales arbitraires pA , pB , pC rencontrant respectivement les proposées en a , a' , a'' , ... , b , b' , b'' , ... , c , c' , c'' , ... ; on aura constamment, pour des coefficients numériques m , m' , m'' , ... appartenans respectivement à ces mêmes droites,

$$\sin ApC \cdot \Sigma \left(\frac{m}{pb} \right) = \sin ApB \cdot \Sigma \left(\frac{m}{pc} \right) + BpC \cdot \Sigma \left(\frac{m}{pa} \right).$$

Il est évident, en effet, que cette relation exprime tout autant que le théorème de l'art. cité; car on en conclut d'abord que le centre des moyennes harmonique de a , a' , a'' , ... , celui de b , b' , b'' , ... , enfin celui de c , c' , c'' , ... sont en ligne droite, quelles que soient les transversales, pA , pB , pC menées à travers le système des proposées; laissant donc deux d'entre elles fixes, et faisant varier la troisième autour de p , on voit que la suite des centres des moyennes harmoniques qui lui appartiennent, sera une seule et même droite.

52. La relation que nous venons d'établir ci-dessus pour exprimer que les trois points α , β , γ situés sur les transversales pA , pB , pC convergeant en un même point p , appartiennent à une même droite, et la relation beaucoup plus générale, que nous avons déduite du théorème de l'art. 43., relativement à un système quelconque de points a , b , c , ... , a' , b' , c' , ... , a'' , b'' , c'' , ... situés trois par trois en ligne droite, doivent être considérées toutes deux comme des cas particuliers et des conséquences très simples de celles qui ont lieu pour trois transversales arbitraires pA , pB , qC (Fig. 15.) formant par leur rencontre mutuelle un triangle pqr , au lieu de converger en un même point.

En effet, on a alors, comme on sait *), dans les hypothèses ci-dessus,

*) Carnot *Essai sur la théorie des transversales*, *Traité des propriétés projectives etc.*
Crelle's Journal. III. Bd. 3. Hft.

$$\alpha p . \beta r . \gamma q = \alpha q . \beta p . \gamma r,$$

$$(pa) . (rb) . (qc) = (qa) . (pb) . (rc),$$

dans la dernière desquelles (pa) représente le produit de tous les segmens $pa, pa', pa'', \dots$, (rb) celui de tous les segmens $rb, rb', rb'', \dots$ et ainsi de suite pour les autres.

Or, si nous mettons la première de ces relations sous cette forme

$$\alpha p (\beta p + pr) . \gamma q = (\alpha p + pq) . \beta p . (\gamma q + qr),$$

nous en tirerons la suivante, en développant et divisant par pr ,

$$\alpha p . \gamma q = \alpha p . \beta p . \frac{qr}{pr} + \beta p . \gamma q . \frac{pq}{qr} + \beta p . \frac{pq . qr}{pr},$$

qui devient, en remplaçant les rapports des côtés du triangle pqr par les sinus des angles opposés, et en supposant ensuite que p, q, r se confondent en un seul point p (Fig. 14.)

$$pa . pr . \sin ApC = pa . p\beta . \sin ApB + p\beta . pr . \sin BpC,$$

laquelle est précisément la relation obtenue directement à l'art. 51., pour le cas où les transversales pA, pB, qC concourent en un même point.

53. D'après cela, il est donc naturel de considérer les relations générales qui concernent un nombre quelconque de points rangés sur les trois transversales en question, comme étant pareillement des modifications l'une de l'autre; et c'est, en effet; ce qu'apprend le calcul appliqué à ce cas général, d'une manière analogue à celle qui vient d'être mise en usage pour le cas particulier; mais nous établirons cette conséquence dans un prochain mémoire, indépendamment de tout calcul, c'est-à-dire par des considérations purement géométriques, et cela même quels que soient les points que l'on considère sur les côtés du triangle transversal pqr ; la seule condition étant qu'ils satisfassent à la relation générale, déjà posée ci-dessus:

$$(pa) . (rb) . (qc) = (qa) . (pb) . (rc).$$

Quant au cas présent, où l'on suppose les points $a, b, c, \dots$, $a', b', c', \dots$, $a'', b'', c'', \dots$ situés trois par trois en ligne droite, la même dépendance peut être établie très simplement sans recourir à des transformations algébriques prolixes.

En effet d'après ce qui précède, on aura pour ces différens groupes de points lorsque (Fig. 14.) le triangle pqr s'évanouit,

$$\sin ApC \frac{1}{pb} = \sin ApB \frac{1}{pc} + \sin BpC \frac{1}{pa},$$

$$\sin ApC \frac{1}{pb'} = \sin ApB \frac{1}{pc'} + \sin BpC \frac{1}{pa'},$$

$$\sin ApC \frac{1}{pb''} = \sin ApB \frac{1}{pc''} + \sin BpC \frac{1}{pa''},$$

.

multipliant la première de ces équations par m , la deuxième par m' , la troisième par m'' , ... etc., $m, m', m'', \dots$ étant des nombres quelconques relatifs aux droites $abc, a'b'c', a''b''c'', \dots$, ajoutant enfin toutes les nouvelles équations, on retombera directement sur la relation générale posée art. 51. Ainsi le principe de l'art. 43. est une conséquence très simple de la théorie des transversales rectilignes, et il seroit facile de prouver la même chose des autres principes posés en cet endroit; mais, au lieu de nous arrêter à ces détails, nous nous contenterons d'ajouter quelques nouvelles remarques à toutes celles qui précèdent, renvoyant à la note ci-après pour montrer comment on peut les étendre facilement au cas de l'espace.

54. La relation à laquelle nous sommes parvenus pour exprimer que les trois points α, β, γ (Fig. 14.) sont situés en ligne droite sur les transversales pA, pB, pC , peut être mise sous une autre forme, qui offre l'avantage particulier d'être indépendante des lignes trigonométriques, et de ne point devenir insignifiante quand le point p s'éloigne à l'infini, comme cela arrive pour la première. Coupons en effet le faisceau des droites pA, pB, pC par la nouvelle droite ABC , nous aurons

$$\frac{\text{triang. } ApC}{\text{triang. } BpC} = \frac{AC}{BC} = \frac{pA \cdot pC \cdot \sin ApC}{pB \cdot pC \cdot \sin BpC};$$

d'où l'on tire

$$\sin ApC = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{pB}{pA} \cdot \sin BpC.$$

On auroit de même, par la comparaison des triangles ApB et BpC ,

$$\sin ApB = \frac{AB}{CB} \cdot \frac{pC}{pA} \cdot \sin BpC;$$

substituant ces valeurs dans la relation citée, supprimant le facteur $\sin BpC$, et multipliant ensuite tous les termes par $BC \cdot pA$, il viendra

$$\frac{AC \cdot pB}{p\beta} = \frac{AB \cdot pC}{p\gamma} + \frac{BC \cdot pA}{p\alpha},$$

nouvelle relation qui, satisfaisant aux conditions indiquées art. 18. est pro-

jective de sa nature; elle n'apprend d'ailleurs guères plus que celle d'où nous sommes partis, quand on suppose le point p à l'infini; puisquelle ce réduit alors à celle-ci $AC = AB + BC$, qu'on doit considérer comme une simple identité.

Mais, en observant qu'on a

$pB = p\beta + B\beta$, $pc = p\gamma + C\gamma$, $pA = p\alpha + A\alpha$,
on en déduira, sur le champ,

$$AC \cdot \frac{B\beta}{p\beta} = AB \cdot \frac{C\gamma}{p\gamma} + BC \cdot \frac{A\alpha}{p\alpha},$$

qui est également projective, mais n'a pas l'inconvénient de devenir identique quand les droites pA , pB , pC sont parallèles (Fig. 16.), ou que p s'éloigne à l'infini.

On a alors en effet, à cause que les distances infinies $p\beta$, $p\gamma$, $p\alpha$ peuvent être censées égales entre elles,

$$AC \cdot B\beta = AB \cdot C\gamma + BC \cdot A\alpha,$$

pour exprimer que les points α , β , γ sont situés en ligne droite, de même que les points A , B , C .

Supposons maintenant que l'on considère, sur les transversales pA , pB , pC , un nombre quelconque de points $a, b, c, \dots, a', b', c', \dots, a'', b'', c'', \dots$ rangés trois par trois en ligne droite, on aura donc, pour remplacer la relation générale de l'art. 51., dans le cas de la figure 14.,

$$AC \cdot \Sigma \left(m \frac{Bb}{pb} \right) = AB \cdot \Sigma \left(m \frac{Cc}{pc} \right) + BC \cdot \Sigma \left(m \frac{Aa}{pa} \right),$$

et dans celui de la figure 16., où le point p est à l'infini,

$$AC \cdot \Sigma (m \cdot Bb) = AB \cdot \Sigma (m Cc) + BC \cdot \Sigma (m Aa),$$

relations dont la première exprime que les centres des moyennes harmoniques, et la seconde que les centres des moyennes distances des groupes de points respectifs $a, a', a'', \dots, b, b', b'', \dots, c, c', c'', \dots$, sont situés en ligne droite; et qui, l'une et l'autre, peuvent être considérés, ainsi que celle du No. 51., comme des modifications particulières de la relation (52.) qui se rapporte au cas général où les transversales pA , pB , pC sont quelconques et forment un triangle pqr (Fig. 15.)

Au surplus, nous aurions pu partir directement de la relation qui appartient à la figure 16. et qu'il est facile d'établir a priori, pour en déduire, de suite, celle qui se rapporte à la Fig. 14., en employant à cet

effet des principes de projection analogues à ceux qui ont été mis en usage à la fin du No. 21.; mais la marche précédente nous a paru plus directe et plus lumineuse.

NOTE première.

Sur les moyens d'exprimer que quatre points quelconques, appartenans respectivement à un même nombre de droites convergeant en un point unique de l'espace, sont situés sur un seul et même plan.

Sont α, β, γ et δ (Fig. 17.) quatre points quelconques situés respectivement sur les côtés pq, qr, rs et sp du quadrilatère gauche $pqrs$; on aura, comme on sait, d'après la théorie des transversales, pour exprimer que ces quatre points sont dans un même plan, la relation

$$\alpha p . \beta q . \gamma r . \delta s = \alpha q . \beta r . \gamma s . \delta p;$$

d'où il seroit aisé de déduire (52.) celle qui est relative au cas où, le quadrilatère $pqrs$ s'évanouissant, les droites pq, qr, rs et ps concourent simplement en un même point p (Fig. 18.). Mais on peut arriver au même but d'une manière entièrement directe et simple, par des procédés analogues à ceux qui ont été mis en usage (51.) pour le cas particulier de trois points situés en ligne droite.

En effet, pour que les quatre points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, placés sur les transversales pA, pB, pC, pD , se trouvent compris dans un même plan, il est nécessaire évidemment et il suffit qu'on ait la relation

$$\text{sol. } p\alpha\gamma\delta + \text{sol. } p\alpha\gamma\beta = \text{sol. } p\alpha\beta\delta + \text{sol. } p\beta\gamma\delta;$$

or on a, d'après les principes connus et en représentant par l'expression $\sin(p\delta, \alpha p\gamma)$ le sinus de l'angle formé par la droite $p\delta$ et le plan $\alpha p\gamma$, et par $(\alpha\beta\gamma)$ l'aire du triangle qui a pour sommets les points α, δ, γ ,

$$\text{sol. } p\alpha\gamma\delta = \frac{(\alpha\beta\gamma)p\delta . \sin(p\delta, \alpha p\gamma)}{3} = \frac{1}{3}\sin(\alpha p\gamma) . \sin(p\delta, \alpha p\gamma) . p\alpha . p\gamma . p\delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{sol. } p\alpha\gamma\delta = \frac{1}{3}\sin(ApC) . \sin(pD, ApC) . p\alpha . p\gamma . p\delta;$$

on auroit pareillement et selon les mêmes conventions,

$$\text{sol. } p\alpha\beta\gamma = \frac{1}{3}\sin(ApC) . \sin(pB, ApC) . p\alpha . p\beta . p\gamma,$$

$$\text{sol. } p\alpha\beta\delta = \frac{1}{3}\sin(BpD) . \sin(pA, BpD) . p\alpha . p\beta . p\delta,$$

$$\text{sol. } p\beta\gamma\delta = \frac{1}{3}\sin(BpD) . \sin(pC, BpD) . p\beta . p\gamma . p\delta;$$

donc substituant et divisant par le produit $\frac{1}{3} \cdot p\alpha \cdot p\beta \cdot p\gamma \cdot p\delta$, il viendra la relation

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(ApC) \cdot \sin(pD, ApC)}{p\beta} + \frac{\sin(ApC) \cdot \sin(pB, ApC)}{p\delta} \\ &= \frac{\sin(BpD) \cdot \sin(pA, BpD)}{p\gamma} + \frac{\sin(BpD) \cdot \sin(pC, BpD)}{p\alpha}, \end{aligned}$$

qui est entièrement analogue à celle de l'art. 51., et d'où l'on déduiroit des conséquences semblables pour le cas d'un nombre quelconque de groupes de quatre points rangés dans un plan, tel que celui des points α , β , γ et δ .

Considérons maintenant un plan arbitraire $ABCD$, auquel correspondent les quatre points A , B , C , D sur les droites pA , pB , pC , pD , nous aurons, comme ci-dessus, en nommant P la perpendiculaire abaissée de P sur le plan $ABCD$,

$$\text{sol. } pACD = \frac{1}{3} P \cdot (ACD) = \frac{1}{3} \sin(ApC) \cdot \sin(pD, ApC) \cdot pA \cdot pC \cdot pD,$$

$$\text{sol. } pABC = \frac{1}{3} P \cdot (ABC) = \frac{1}{3} \sin(ApC) \cdot \sin(pB, ApC) \cdot pA \cdot pB \cdot pC,$$

$$\text{sol. } pABD = \frac{1}{3} P \cdot (ABD) = \frac{1}{3} \sin(BpD) \cdot \sin(pA, BpD) \cdot pA \cdot pB \cdot pD,$$

$$\text{sol. } pBCD = \frac{1}{3} P \cdot (BCD) = \frac{1}{3} \sin(BpD) \cdot \sin(pC, BpD) \cdot pB \cdot pC \cdot pD;$$

substituant, dans la relation déjà trouvée ci-dessus, les produits des sinus tirés de ces dernières, et simplifiant, il viendra

$$(ACD) \frac{pB}{p\beta} + (ACB) \frac{pD}{p\delta} = (BAD) \frac{pC}{p\gamma} + (BCD) \frac{pA}{p\alpha},$$

nouvelle relation qui est projective suivant les principes posés art. 45. du Traité des propriétés projectives, et de laquelle on en déduiroit plusieurs autres en remplaçant les rapports d'aires triangulaires par ceux des lignes de la figure $ABCD$. Contentons nous de remarquer que puisqu'on a

$pA = p\alpha + A\alpha$, $pB = p\beta + B\beta$, $pC = p\gamma + C\gamma$, $pD = p\delta + D\delta$, on peut de nouveau la transformer en celle-ci,

$$ACD \cdot \frac{B\beta}{p\beta} + ACB \cdot \frac{D\delta}{p\delta} = (BAD) \cdot \frac{C\gamma}{p\gamma} + (BCD) \cdot \frac{A\alpha}{p\alpha},$$

qui jouit de la même propriété, et a de plus l'avantage de demeurer applicable au cas où le point p est censé à l'infini; elle devient effective-
mens alors,

$$(ACD) \cdot B\beta + (ACB) \cdot D\delta = (BAD) \cdot C\gamma + (BCD) \cdot A\alpha,$$

comme il seroit aisé de le vérifier directement pour ce cas particulier.

Ces diverses relations sont entièrement analogues à celles qui ont été exposées dans le texte pour le cas du plan, et donnent lieu à des conséquences et à des rapprochemens qu'il est facile de deviner et sur lesquelles il est peu nécessaire d'insister.

NOTE DEUXIÈME.

Sur les relations linéaires projectives entre les distances de points rangés sur une même droite, et les formules trigonometriques qui en dérivent.

Avant de terminer, je crois devoir présenter, à l'occasion des recherches qui sont le sujet de ce mémoire, une observation générale et très importante, sur la quelle je n'ai pas suffisamment insisté dans le *Traité des propriétés projectives des figures*; c'est qu'il n'est, pour ainsi dire, aucune relation métrique, entre les distances d'une figure, qui ne puisse être proposée, généralisée ou transformée d'une manière convenable pour satisfaire aux conditions particulières de *projectibilité* indiquées aux art. 9., 10. et 45. de ce traité, et rappelées No. 18. du présent mémoire.

On en a vu un grand nombre d'exemples dans l'un et dans l'autre de ces écrits, mais il n'y ont été amenés, en quelque sorte, qu'incidemment, et l'on n'a nullement insisté sur les principes et les moyens qui pourroient y conduire directement ou généralement.

Or ces moyens, comme on a dû s'en apercevoir, consistent principalement dans les suivans, 1) se servir des relations qui expriment la juxtaposition ou la contiguité des distances rangées sur une même droite, pour transformer la relation proposée en une autre qui satisfasse aux conditions déjà citées, en introduisant même, si cela est nécessaire, de nouveaux points parmi ceux de la figure; 2) restituer, par la pensée, les points qui, dans le passage de la figure générale à celle qu'on examine, ont pu s'éloigner à l'infini en faisant ainsi disparaître, par suite de leur égalité, certaines distances qui multipliaient ou divisaient les termes de cette dernière relation; 3) chercher enfin à rétablir ces distances dans la relation, sans la troubler et de façon que, sous sa nouvelle forme, elle satisfasse aux conditions prescrites, et devienne par con-

séquent applicable aux projections centrales ou perspectives de la figure ainsi modifiée par la restitution des points à l'infini.

Le premier de ces moyens convient particulièrement aux relations et aux figures que, par leur nature générale, on reconnaît être essentiellement projectives, quoique, dans leur état actuel, elles ne satisfassent pas aux conditions particulières qui viennent d'être indiquées; les autres conviennent principalement aux relations et aux figures qui, ayant une forme tout à fait particulière et déterminée, ne sauroient la conserver en perspective ou projection centrale: les art. 17. et 20. de ce mémoire nous ont offert des exemples qui se rapportent au premier de ces moyens, et l'art. 21. en contient un seul qui se rapporte aux derniers; mais la théorie du centre des moyennes distances eût pu aisément en fournir un grand nombre de cette sorte. Enfin il est des relations et des figures qui permettent l'emploi simultanée de ces deux moyens; et, parmi ces relations, celles qui expriment la juxta-position des distances rangées sur une même droite sont, sans contredit, les plus simples et les plus remarquables, outre qu'elles sont susceptibles de conduire à des principes de trigonométrie aussi beaux qu'étendus. Je crois, en conséquence, devoir choisir ces relations particulières pour nouvel exemple propre à éclairer les applications des préceptes qui précèdent, d'autant plus que ces sortes d'identités jouent un rôle nécessaire et fort important parmi toutes celles qui peuvent en général appartenir aux figures. Observons d'ailleurs, une fois pour toutes, que dans le cas dont il s'agit, où tous les points sont sur une même droite, les conditions de projectibilité se réduisent simplement à ce que les différens termes de la relation proposée renferment les mêmes lettres, ou qu'en considérant ces différentes lettres comme autant de quantités simples, elles puissent disparaître comme facteurs, soit dans chaque terme séparément, soit dans l'ensemble de tous les termes (voy. les Nr. 9. et suiv. de l'ouvrage déjà cité).

Cela posé, considérons d'abord trois points quelconques *A*, *B*, *C* (Fig. 19.) situés en ligne droite, on aura, pour la position actuelle de ces points

$$AC = AB + BC,$$

relation qui, sous cette forme, ne satisfait pas aux conditions ci-dessus, quoiqu'elle subsiste bien évidemment dans les projections centrales des points de la figure sur une droite arbitraire *pn*.

Pour la transformer en une autre qui satisfasse à ces conditions, nous chercherons, en premier lieu, à y introduire, selon ce qui a été prescrit ci-dessus, quelques uns des segmens qui se rapportent au point situé à l'infini sur AC , point que nous représenterons par P , et cela de manière à ne pas troubler l'égalité. Or c'est à quoi l'on parvient évidemment en multipliant chacun des termes de cette relation par celui des segmens infinis et égaux PA , PB , PC , qui n'appartient à aucun des points relatifs à ce terme. Cette relation se changera ainsi en cette autre,

$$AC.PB = AB.PC + BC.PA,$$

dont les différens termes renferment les mêmes lettres; et l'on voit aussi comment il faudroit agir pour préparer, de la même manière, toute relation linéaire du premier degré entre les simples distances de points rangés en ligne droite.

Sous cette nouvelle forme d'ailleurs, la relation qui précède n'exprime évidemment rien de plus que celle d'où elle provient, attendu que le point P est censé à l'infini. Mais étant projective, elle ne devra pas cesser d'avoir lieu en mettant les points A , B , C et P en perspective sur la nouvelle droite arbitraire pn , à partir d'un point quelconque S ; on aura donc, en nommant a , b , c et p les nouveaux points, dont le dernier appartient évidemment à la projetante pS parallèle à AC ,

$$ac.pb = ab.pc + bc.pa,$$

relation qui a lieu, de la même manière (18.), entre les sinus des angles projetans relatifs à chacune des distances qui y entrent.

On pourroit croire que cette relation est simplement relative à une certaine position particulière de p à l'égard de a , b , c ; mais il est facile de prouver le contraire; car ayant choisi, à volonté, un tel point sur une droite abc , on pourra toujours mettre la figure en projection sur une autre droite AC , de façon que p passe à l'infini, puisqu'il suffit de prendre AC parallèle à la projetante Sp de ce point; or la relation ci-dessus, qui est projective, sera satisfaite naturellement pour la projection AC ; donc elle aura pareillement lieu pour la droite ac , quels que soient les points a , b , c , p .

Voyons maintenant comment, par des transformations convenables, nous aurions pu arriver directement à la relation dont il s'agit en parlant de celle $ac = ab + bc$ qui n'en est qu'un cas particulier relatif à l'hypothèse où P seroit à l'infini.

A cet effet, multiplions l'équation $ac = ab + bc$ par la distance pb , on aura successivement, pour la position actuelle de a, b, c et p :

$ac.pb = ab.pb + bc.pb = ab(pc - bc) + bc(pa + ab) = ab.pc + bc.pa$,
qui est précisément celle qui a été obtenue ci-dessus par une voie très différente.

Sans nous arrêter longuement aux cas particuliers, nous considérerons de suite un nombre quelconque de points a, b, c, d, m, n , rangés sur une même droite; il est évident qu'il existera entre les distances de ces points, pris trois à trois, quatre à quatre, etc., une infinité de relations purement linéaires et évidentes, telles que celle $ac = ab + bc$ qui vient de nous occuper précédemment; or, si l'on prend arbitrairement un nouveau point p sur la droite en question, il sera très aisé, d'après ce qui précède, d'en déduire, sur le champ, un égal nombre d'autres relations plus générales et jouissant de propriétés analogues à celles de la transformée $ac.pb = ab.pc + bc.pa$.

Par exemple, ayant pour la position actuelle des points a, b, c, d, m, n , la relation générale

$$an = ab + bc + cd \dots + mn,$$

ou en conclura la suivante, en multipliant chacun de ses termes par le produit des segmens relatifs au point p et à tous ceux des proposés qui n'appartiennent pas à ce terme,

$$an(pb.pc.pd\dots pm) = ab(pc.pd\dots pm.pn) + bc(pa.pd\dots pm.pn) + cd(pa.pb\dots pm.pn) + \dots + mn(pa.pb.pc.pd\dots).$$

Il est visible, en effet, que cette relation remplit toutes les conditions prescrites, et peut s'établir par les mêmes moyens et donner lieu aux mêmes réflexions que celle que nous avons trouvée pour le cas particulier de trois points.

Pour la justifier *a posteriori*, nous la mettrons sous cette forme beaucoup plus simple, en divisant chacun de ses termes par le produit de tous les segmens relatifs au point p et aux différens points proposés,

$$\frac{an}{pa.pn} = \frac{ab}{pa.pb} + \frac{bc}{pb.pc} + \frac{cd}{pc.pd} \dots + \frac{mn}{pm.pn};$$

et, en effet, on est immédiatement conduit à la relation suivante

$$\frac{pn - pa}{pa.pn} = \frac{pb - pa}{pa.pb} + \frac{pc - pb}{pb.pc} + \frac{pd - pc}{pc.pd} \dots + \frac{pn - pm}{pm.pn},$$

qui, en effectuant les divisions partielles, se réduit évidemment à une

simple identité entre les diverses réciproques des distances $pa, pb, pc, \dots$. Cette remarque, à laquelle on n'eût peut-être pas songé sans ce qui précède conduirait également aux diverses autres relations analogues à celle établie ci-dessus: ainsi, par exemple, on auroit, k étant le nombre des points proposés $a, b, c, \dots m, n$,

$$\frac{(k-3)an}{pa \cdot pn} = \frac{ab}{pa \cdot pb} + \frac{ac}{pa \cdot pc} + \dots + \frac{am}{pa \cdot pm} + \frac{nm}{pn \cdot pm} + \dots + \frac{nc}{pn \cdot pc} + \frac{nb}{pn \cdot pb}.$$

Au surplus, les relations précédentes ayant lieu pour des points quelconques rangés en ligne droite, doivent être soigneusement distinguées de celles qui expriment des conditions particulières, propres à faire trouver un ou plusieurs de ces points, à l'aide de certains autres supposés donnés. Elles ne sont, en dernière analyse, comme on voit, que des sortes d'identités exprimant et la juxta-position des distances qui y entrent, et leur situation en ligne droite; mais, en ce sens même, elles sont très dignes d'être remarquées pour les conséquences qu'on en peut déduire, en général, soit par rapport aux autres relations projectives entre les distances, soit relativement à celles qui ont lieu entre les lignes trigonométriques des arcs et des angles; car il est évident que, puisqu'elles satisfont toutes aux conditions des Nr. 9. et suiv. du Traité des propriétés projectives rappelées art. 18. de ce mémoire, elles doivent subsister également, et sans conditions quelconques, soit entre les sinus des angles formés par un nombre quelconque de droites $Sa, Sb, Sc, \dots$ passant par un même point S , soit entre les sinus des arcs $a'b', b'c', c'd', \dots$ qui mesurent ces angles sur une circonférence de cercle ayant pour centre le sommet commun S de tous ces angles.

Ainsi, par exemple, on aura entre ces différens sinus, la relation tres générale

$$\frac{\sin(a'n')}{\sin(p'a') \cdot \sin(p'n')} = \frac{\sin a'b'}{\sin(a'p') \cdot \sin(p'b')} + \frac{\sin b'c'}{\sin(p'b') \cdot \sin(p'c')} + \dots + \frac{\sin m'n'}{\sin(p'm') \cdot \sin(p'n')},$$

qu'on peut changer en cette autre, en rapportant tout à l'origine commune p' des arcs,

$$\frac{\sin(p'n' - p'a')}{\sin(p'a') \cdot \sin(p'n')} = \frac{\sin(p'b' - p'a')}{\sin(p'a') \cdot \sin(p'b')} + \frac{\sin(p'c' - p'b')}{\sin(p'b') \cdot \sin(p'c')} + \dots + \frac{\sin(p'n' - p'm')}{\sin(p'm') \cdot \sin(p'n')};$$

et qui comprend, sous cette nouvelle forme, comme cas particuliers, presque toutes les formules fondamentales de la trigonométrie, ainsi qu'on peut le voir par les articles 139., 140. et suiv. de la *Géométrie de position*, où cette même relation générale est exposée d'après des principes fort différens de ceux qui précèdent.

Au surplus, on déduirait beaucoup d'autres relations non moins générales des considérations qui précèdent, et en y supposant ensuite certains angles ou certains arcs égaux à un quadrant, on obtiendrait celles qui concernent les cosinus etc.; mais je laisserai au lecteur le soin de cette investigation et de ces rapprochemens très curieux, et me contenterai d'ajouter une dernière remarque à toutes celles qui précèdent: c'est que les relations entre les simples distances de points rangés sur une même droite, et qui satisfont aux conditions particulières déjà souvent indiquées, s'appliquent directement aux arcs de cercle et aux angles quelconques ayant un sommet commun, et peuvent être établies de la même manière; de sorte que, pour passer de là aux relations qui concernent les lignes trigonométriques, il ne s'agit que de remplacer chaque arc et chaque angle par le sinus qui lui est propre: proposition qui mérite particulièrement d'être remarquée des géomètres.

Enfin je ne crois pas devoir passer sous silence une autre observation très générale, et qui découle immédiatement des No. 18. et 19. du *Traité des propriétés projectives*; c'est que „toute la théorie du centre des „moyennes harmoniques, qui se trouve exposée dans le présent mémoire, „s'étend immédiatement aux figures tracées sur la surface de la sphère, „en remplaçant les droites indéfinies par des circonférences de grands „cercles, et les distances ou portions de droites par les sinus des portions „correspondantes de ces circonférences.”

23.

Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heißen?

(Vom Herrn Prof. Möbius zu Leipzig.)

Dafs, wenn ein Dreieck in ein anderes eingeschrieben ist, dasselbe Dreieck nicht auch um das andere umschrieben sein kann, ist offenbar. Und eben so scheint es auch durchaus unmöglich, zwei Pyramiden zu construiren, von denen die Spitzen der einen in den Seitenflächen der andern und umgekehrt die Spitzen der andern in den Seitenflächen der erstern liegen. Auch ist diese Forderung in der That unerfüllbar, wenn die Spitzen einer jeden in den Seitenflächen der anderen selbst, nicht in den Erweiterungen derselben begriffen sein sollen, indem dann die eingeschriebene Pyramide immer die kleinere, die umschriebene die grössere ist. Es schwindet aber das Paradoxe der Forderung (bei den Pyramiden, — nicht bei den Dreiecken), wenn diese Beschränkung aufgehoben wird, und die Spitzen der einen auch in den erweiterten Seitenflächen der andern liegen können. Heifsen nämlich A, B, C, D die vier Spitzen der einen, und F, G, H, I die vier Spitzen der andern Pyramide, so läfst sich darthun, dafs die acht hierzu erforderlichen Bedingungen:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| I. A in GHI , | V. F in BCD , |
| II. B in HIF , | VI. G in CDA , |
| III. C in IFG , | VII. H in DAB , |
| IV. D in FGH , | VIII. I in ABC |

sehr wohl neben einander bestehen können, und überdies noch, dafs jede dieser acht Bedingungen eine Folge der sieben übrigen ist.

Es sei mir erlaubt den Beweis hiervon mit Anwendung meines barycentrischen Calculs zu führen, wo sich die Sache folgendergestalt symmetrisch und einfach behandeln läfst. —

Weil der Schwerpunkt dreier Punkte mit ihnen selbst immer in einer Ebene liegt, und weil jeder Punkt einer Ebene als Schwerpunkt irgend dreier anderer Punkte der Ebene, die nicht in einer Geraden liegen, genommen werden kann, so schreibe ich, um die Bedingung I. aus-

zudrücken, wonach A ein Punct der Ebene GHI sein soll:

$$\alpha A = \alpha G + \alpha' H + \alpha'' I.$$

Hierbei sind nämlich $\alpha, \alpha', \alpha''$ die Gewichte, womit die Puncte G, H, I belastet werden müssen, damit A der Schwerpunkt derselben wird, und $\alpha = \alpha + \alpha' + \alpha''$ das Gewicht, welches, in A angebracht, dieselbe Wirkung, als die drei einzelenen Gewichte in G, H, I , hervorbringt.

Auf gleiche Art werden die Bedingungen II., III., IV. durch die Gleichungen

$$\beta B = b H + b' I + b'' F,$$

$$\gamma C = c I + c' F + c'' G,$$

$$\delta D = d F + d' G + d'' H,$$

ausgedrückt. Sind nun die Puncte F, G, H, I mit ihren Gewichten oder Coëfficienten $\alpha, \alpha', \alpha'', b, \dots d''$ gegeben, so sind damit auch die Puncte A, B, C, D bekannt, und es fragt sich jetzt, ob jene Coëfficienten sich so bestimmen lassen, daß auch die Bedingungen V., ... VIII. erfüllt werden.

Man setze deshalb, weil nach V., F ein Punct der Ebene BCD sein soll:

$$\zeta F = f \beta B + f' \gamma C + f'' \delta D,$$

wo f, f', f'' zu bestimmende Coëfficienten sind. Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe von $\beta B, \gamma C, \delta D$ aus den vorhergehenden, so kommt, nachdem man gehörig geordnet hat:

$$(\zeta - f b'' - f' c' - f'' d) F = (f' c'' + f'' d') G + (f'' d'' + f b) H + (f b' + f' c) I.$$

Diese Gleichung drückt im Allgemeinen aus, daß F in der Ebene GHI liegt, so lange wenigstens, als von den Coëfficienten der Puncte G, H, I nicht jeder einzeln $= 0$ ist, indem, diesen Fall ausgenommen, die Lage von F gegen G, H, I in der Ebene dieser Puncte durch die Verhältnisse zwischen den Coëfficienten derselben immer bestimmt ist. Da nun F, G, H, I nicht in einer Ebene liegen, sondern die vier Spitzen einer Pyramide sein sollen, schliessen wir, daß

$$f' c'' + f'' d' = 0, \quad f'' d'' + f b = 0, \quad f b' + f' c = 0,$$

und hieraus ergibt sich nicht nur das gegenseitige Verhältniß zwischen f, f', f'' , sondern auch nach Elimination dieser Coëfficienten die Bedingungsgleichung

$$1) \quad b c d' = - b' c'' d'',$$

wenn F in BCD liegen soll. — Auf eben die Weise führen die Bedingungen VI., VII., VIII. zu den Gleichungen:

$$2) \quad cda' = -c'd''a'',$$

$$3) \quad dab' = -d'a''b'',$$

$$4) \quad abc' = -a'b''c''.$$

Es giebt aber das Product sowohl aus der Gleichung 1) in 3), als aus 2) in 4):

$$abcd = a''b''c''d'',$$

woraus man ersieht, daß von den vier Gleichungen 1) . . 4) eine jede eine Folge aus den drei übrigen ist. Sind mithin die Bedingungen I., . . . IV., und noch von den Bedingungen V., . . VIII. irgend drei erfüllt, so ist es damit auch die vierte der letztern; und da durch Vertauschung der beiden Pyramiden auch die Bedingungen I., . . IV. und V., . . VIII. gegenseitig in einander übergehen, so schliessen wir, daß wenn von allen acht Bedingungen irgend sieben erfüllt sind, damit auch die achte besteht.

Ist demnach eine Pyramide $ABCD$ (Fig. 1. Taf. IV.) gegeben, so läßt sich eine zweite $FGHI$, welche der erstern zugleich ein- und umschrieben ist, etwa folgendergestalt construiren. — Man lege durch die Spitze D der Pyramide $ABCD$ eine Ebene, welche die Kanten BC , CA , AB in A' , B' , C' schneide. In dieser Ebene sei nach IV. die Seitenfläche FGH der Pyramide $FGHI$ enthalten. Weil nach V., F zugleich in der Ebene $BCDA'$ liegen soll, so wird F irgend ein Punct der Geraden DA' sein müssen; und eben so wird man wegen VI. und VII., G und H beliebig in DB' und DC' zu nehmen haben. Vermöge I., II., III. ist ferner I als der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der drei Ebenen AGH , BHF , CFG zu bestimmen, und es ist somit den Bedingungen I., . . . VII. Genüge geschehen. Zufolge des erwiesenen Satzes muß alsdann, wie es VIII. erfordert, I in der Ebene ABC liegen.

Statt die drei Ebenen AGH , . . . zu legen, kann man zur Bestimmung des Punctes I auch so verfahren. — Man ziehe GH , welche die Gerade $A'B'C'$ in F' schneide, so ist F' ein Punct der Ebene ABC , und folglich AF' der Durchschnitt der Ebenen AGH und ABC , worin I liegen muß. Eben so ziehe man HF , FG , welche $A'B'C'$ in G' , H' schneiden, und es muß I auch in BG' , CH' enthalten sein. Die drei Geraden AF' , BG' , CH' müssen sich folglich in einem Puncte, nämlich in I , schneiden.

Hieraus fließt zugleich folgender nicht uninteressante Satz:
 ABC , FGH sind zwei Dreiecke, MN eine gerade Linie, welche mit je-

dem der beiden Dreiecke in einer Ebene liegt, also die Durchschnittslinie der beiden Dreiecksebenen, wenn die Dreiecke in verschiedenen Ebenen liegen. Wird nun MN von den Dreiecksseiten BC, CA, AB, GH, HF, FG resp. in A', B', C', F', G', H' geschnitten und begegnen sich $A'F, B'G, C'H$ in einem Punkte D , so treffen auf AF', BG', CH' in einem Punkte I zusammen.

So wie dieser Satz eine Folge des Vorigen ist, so kann man aus ihm auch umgekehrt jene Eigenschaft der Pyramiden selbst herleiten. Es läßt sich aber dieser Satz, unabhängig von dem Vorhergehenden, mit Hülfe eines andern Theorems (Baryc. Calcul, §. 291.) und seiner Inverse darthun, wonach, wenn die drei Spitzen eines Dreiecks FGH mit einem vierten in der Ebene desselben liegenden Punkte D durch Gerade verbunden werden, und wenn eine beliebige andere Gerade MN der Ebene von den Seiten des Dreiecks GH, HF, FG in F', G', H' und von jenen drei Geraden DF, DG, DH in A', B', C' geschnitten wird, — das Product aus den drei Verhältnissen

$$(G'A':H'A')(H'B':F'B')(F'C':G'C') = 1 \text{ ist.}$$

Denn eben so muß auch, mit Anwendung der Inverse, weil BC, CA, AB die Linie MN in A', B', C' schneiden, und weil AF', BG', CH' in einem Punkte I zusammen kommen sollen,

$$(B'F':C'F')(C'G':A'G')(A'H':B'H') = 1 \text{ sein.}$$

Diese Gleichung ist aber mit der vorigen identisch.

Zusatz. Obschon es durchaus unmöglich ist, zwei Dreiecke zu construiren, von denen ein jedes in das andere eingeschrieben und folglich auch um das andere umschrieben ist, so läßt sich doch bei mehrseitigen Vielecken diese Unmöglichkeit nicht ohne vorangegangene näherer Prüfung behaupten.

Seien z. B. A, B, C, D (Fig. 2.) die auf einander folgenden Spitzen eines ebenen Vierecks; a, b, c, d vier durch sie resp. gezogene Geraden, so bilden diese ein um $ABCD$ umschriebenes Viereck, dessen Spitzen die Durchschnitte von a mit b , von b mit c , etc., oder, wie ich der Kürze wegen schreiben will, ab, bc, cd, da sind. Soll nun dieses Viereck zugleich ein eingeschriebenes sein, so muß ab in einer der Seiten von $ABCD$, und zwar in CD , liegen, wenn nicht die Seiten des einen Vierecks mit denen des andern zum Theil zusammenfallen sollen. Eben so muß bc in DA , cd in AD , da in BC liegen. Man denke sich daher

die Linien a, b, c, d resp. um A, B, C, D sich drehend; a willkürlich; b dergestalt, daß der Punct ab in CD fortrückt; c so, daß bc in AD , und d so, daß cd in AB fortgeht. Der Punct ad wird alsdann eine Curve beschreiben, und wenn er dabei einmal durch die Gerade BC geht, so wird das in diesem Momente von den Linien a, b, c, d gebildete Viereck zugleich ein eingeschriebenes sein.

Um nun die gedachte Curve und ihre vielleicht möglichen Durchschnitte mit BC zu finden, so setze man zuerst, weil D mit A, B, C in einer Ebene liegt:

$$\delta D = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

oder kürzer, wenn man hier und in dem Verfolg der Rechnung für $\alpha A, \beta B, \gamma C, \delta D$ schlechthin $A, B, C, -D$ schreibt:

$$A + B + C + D = 0.$$

Man bezeichne ferner die Puncte ab, bc, cd, da mit F, G, H, I , und setze, weil F in CD liegen soll:

$$F = C + xD;$$

(oder vielmehr $fF = \gamma C - x\delta D$, wo $f = \gamma - \delta x$ ist, und $\gamma, -\delta x$ die Gewichte sind, womit die Puncte C, D belastet, F zu ihrem Schwerpunct haben. Eben so aber, wie vorhin in C und D die Coëfficienten γ und $-\delta$, so wird hier in F der Coëfficient f mit eingeschlossen gedacht. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die in der Folge vorkommenden Buchstaben G, H, I . (Baryc. Calc. §. 235. etc.))

Substituirt man für C seinen Werth aus der vorhergehenden Gleichung, so kommt:

$$F = -A - B - D + xD$$

und

$$F + B = -A + (x-1)D = G,$$

weil G der gemeinschaftliche Punct von FB und AD ist. Dies giebt weiter:

$$G = -A - (x-1)(A + B + C),$$

$$G + (x-1)C = -xA - (x-1)B = H,$$

weil GC und AB sich in H schneiden;

$$H = -xA + (x-1)(A + C + D) = -A + (x-1)(C + D)$$

$$= -A + (x-1)D + (x-1)(F - xD),$$

$$H + (x-1)^2 D = -A + (x-1)F = I,$$

als dem Durchschnitte von HD mit AF ;

$$I = B + C + D + (x-1)(C + xD) = B + xC + (1-x+x^2)D.$$

I ist also der Schwerpunkt der Punkte B, C, D mit Gewichten, die sich wie $1:x:1-x+x^2$ (oder vielmehr wie $\beta:\gamma x:-\delta(1-x+x^2)$) zu einander verhalten. Läßt man nun F (oder ab) in der Geraden CD sich fortbewegen, so erhält x nach und nach alle möglichen Werthe, und alle die damit sich ergebenden Schwerpunkte I (oder ad) liegen in einem Kegelschnitte (B. C. §. 130.). Dieser Kegelschnitt kann aber der BC nicht begegnen, oder, was dasselbe ist: I kann niemals mit B und C in eine Gerade zu liegen kommen, weil der Ausdruck von I durch B, C, D sich niemals auf B und C allein reduciren kann. Denn für keinen möglichen Werth von x kann der Coëfficient von D , $1-x+x^2=0$ werden.

Es ist folglich auch nicht möglich, daß von zwei Vierecken ein jedes dem andern zugleich ein- und umschrieben sein sollte. — Auf Vielecke von mehreren Seiten habe ich die Untersuchung nicht ausgedehnt.

Anzeige einiger Fehler und Verbesserungen in meinem Aufsatze über Vielecke im Kreise, im ersten Hefte des dritten Bandes.

Seite 7 Zeile 18 v. o. statt d. h. lies und folglich die Summe aller m Bögen.

— 8 — 8 v. o. statt ungeraden lies geraden.

— 11 — 7 v. u. statt 16 lies 10.

— 14 — 12 v. o. statt $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta \dots)$ lies $\sin \frac{1}{2}(-\alpha + \beta \dots)$.

— 15 — 9 v. o. Multiplicirt man je zwei unter einander geschriebene Factoren etc.
Dies paßt nicht mehr ganz, da die Formel in den vier ersten Zeilen dieser Seite im Manuscript nur zwei Zeilen einnahm.

— 16 — 6 v. u. statt nach lies für.

— 16 bei der letzten Formel lies IV^* statt VI^* .

— 18 Zeile 16 v. o. statt vor lies von.

— 22 — 15 v. u. setze vor $\frac{4bcde}{a}$ das Zeichen —.

— 29 — 9 v. u. statt aus dieser Gleichung für das Vieleck lies: aus dieser Gleichung, aus der Gleichung für das Vieleck.

— 34 — 2 v. u. statt — setze =.

24.

Beweise des Lehrsatzes No. 16. im 2. Heft des
3. Bandes dieses Journals.

16. **Lehrsatz.** Bekanntlich können die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen von 4 Kreisen berührt werden. Ist das Dreieck rechtwinklig, so ist der Radius des Kreises über der Hypothense so groß als die Summe der Radien der 3 übrigen Kreise, und ferner: Bei dem bekannten Pythagorischen Dreieck, dessen Seiten durch irgend eine Längen-Einheit gemessen, 3, 4, 5 sind: sind die Radien jener Kreise durch die nemliche Einheit gemessen, 1, 2, 3, 6.

(Erster Beweis vom Herrn Professor Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

Bezeichnen a, b, c die 3 Seiten eines Dreiecks; S den Ausdruck $a + b + c$; A den $b + c - a$; B den $a + c - b$; C den $a + b - c$; ϱ den Halbmesser des Kreises im Dreieck, α den außerhalb des Kreises jenseits a , β den jenseits b , γ den jenseits c , so ist

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{B+C}{BC} = \frac{2a}{a^2 - (b-c)^2} = \frac{2a}{(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)};$$

also, weil nach der Voraussetzung $a^2 = b^2 + c^2$ ist:

$$\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{a}{bc}.$$

Eben so erhält man

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{S} = \frac{a}{bc},$$

und folglich

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{S} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C};$$

also auch, wenn F den Inhalt des Dreiecks bezeichnet,

$$\frac{2F}{A} = \frac{2F}{S} + \frac{2F}{B} + \frac{2F}{C}.$$

Nach §. 303. meiner Geometrie ist aber

$$\alpha = \frac{2F}{A}, \quad \varrho = \frac{2F}{S}, \quad \beta = \frac{2F}{B}, \quad \gamma = \frac{2F}{C},$$

und folglich

$$\alpha = \varrho + \beta + \gamma.$$

Verhalten sich ferner a, b, c wie 5, 4, 3, so geben diese Formeln sogleich, weil $F = 6$ ist: $\alpha = 6, \beta = 3, \gamma = 2, \varrho = 1$.

(Zweiter Beweis von Herrn Remy, Stud. phil. zu Berlin.)

Es sei ABC (Fig. 3. Taf. IV.) das gegebene bei A rechtwinklige Dreieck, dessen Seiten, den Winkeln A, B, C gegenüber, a, b, c sein mögen. Die Mittelpunkte O, M, P, N der Kreise, welche die Seiten des Dreiecks und ihre Verlängerungen berühren, liegen in den Durchschnitten der geraden Linien AO, BO, CO, MN, NP und PM , welche die Winkel bei A, B, C halbiren. Zieht man von den Mittelpunkten M, P, N, O nach den Berührungspunkten $D, F; Z, G; T, Q; W, U$ die Radien $MD, MF, PZ, PG, NT, NQ, OW, OU$, so erhält man, wie leicht zu sehen, die 4 Quadrate $ADMF, AGPZ, ATNQ, AWOU$. Es sei MD oder $AD = \alpha$, GP oder $AG = \beta$, NT oder $AT = \gamma$, WO oder $AW = \delta$. Nun ist

$$AD + AF = 2AD = DB + CF + b + c,$$

und da, wegen der Congruenz der Dreiecke DBM, BMV und VMC, CMF ,

$$DB + CF = BV + VC = a$$

ist, so ist auch

$$2AD = a + b + c,$$

und folglich

$$1) \quad AD = \alpha = \frac{a+b+c}{2}.$$

Eben so ist auch

$$LB + BG \text{ oder } 2BG = a + b + c,$$

also

$$BG = \frac{a+b+c}{2},$$

und folglich

$$BG - AB \text{ oder } AG = \frac{a+b+c}{2} - c,$$

also

$$2) \quad \beta = \frac{a+b-c}{2}.$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man

$$3) \quad AT = \gamma = \frac{a+c-b}{2}.$$

Endlich ist auch

$$AW + AU = 2AW = b + c - (WB + UC)$$

oder, da $WB = BY$ und $UC = YC$, also $WB + UC = a$,

$$2AW = b + c - a,$$

mithin

$$4) \quad AW = \delta = \frac{b+c-a}{2}.$$

Addirt man nun die Ausdrücke (2. 3. 4.), so ergibt sich

$$\beta + \gamma + \delta = \frac{a+b-c}{2} + \frac{a+c-b}{2} + \frac{b+c-a}{2} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Nach (1.) ist aber auch

$$\alpha = \frac{a+b+c}{2},$$

folglich

$$\alpha = \beta + \gamma + \delta.$$

Für das Pythagoräische Dreieck ist

$$\delta = \frac{4+3-5}{2} = 1; \quad \gamma = \frac{5+3-4}{2} = 2,$$

$$\beta = \frac{5+4-3}{2} = 3; \quad \alpha = \frac{5+4+3}{2} = 6.$$

(Dritter Beweis, nebst einigen Zusätzen; von einem Ungenannten.)

ABC (Fig. 4. Taf. IV.) sei ein beliebiges Dreieck, dessen drei Seiten, den Winkeln A, B, C gegenüber, a, b, c sein mögen. Der Halbmesser des Kreises P , welcher die 3 Seiten des Dreiecks innerhalb berührt, sei r_1 . Der Halbmesser des Kreises Q , welcher die Seite a außerhalb und die Seiten b und c innerhalb berührt sey r_2 . DE berühre den Kreis Q , und sei mit BC parallel. Alsdann sind die Dreiecke ADE und ABC ähnlich, und wenn man $DE = n \cdot a$ setzt, so ist $AE = nb$ und $AD = nc$. Nun ist, wenn man den Inhalt des Dreiecks ABC durch Δ bezeichnet, bekanntlich

$$1. \quad r_1 = \frac{2\Delta}{a+b+c}.$$

Eben so ist

$$2. \quad r_2 = \frac{2\Delta n^2}{n(a+b+c)} = \frac{2n\Delta}{a+b+c},$$

weil der Inhalt des Dreiecks $ADE = n^2\Delta$ ist. Der Inhalt des Vierecks $BCDE$ ist aber gleich $(n^2 - 1)\Delta$, und durch r_2 ausgedrückt, weil $BD = (n-1)c$, $CE = (n-1)b$, $BC = a$ und $DE = na$ ist,

$$3. \quad 2(n^2 - 1)\Delta = r_2[(n+1)a + (n-1)b + (n-1)c] = r_2[n(a+b+c) - (b+c-a)].$$

Hierin den obigen Ausdruck (2.) von r_2 gesetzt, giebt

$$2(n^2 - 1)\Delta = \frac{2n\Delta}{a+b+c} \cdot [n(a+b+c) - (b+c-a)], \text{ oder}$$

$$n^2 - 1 = n^2 - n \cdot \frac{b+c-a}{a+b+c},$$

woraus

$$4. \quad n = \frac{a+b+c}{b+c-a},$$

also

$$5. \quad r_2 = \frac{2\Delta}{b+c-a}$$

folgt. Ganz auf dieselbe Weise findet man, wenn man die Halbmesser der Kreise, die b und c auferhalb berühren, r_3 und r_4 setzt,

$$r_3 = \frac{2\Delta}{a+c-b}, \quad r_4 = \frac{2\Delta}{a+b-c}.$$

Zusammengenommen also ist

$$6. \quad r_1 = \frac{2\Delta}{a+b+c}, \quad r_2 = \frac{2\Delta}{b+c-a}, \quad r_3 = \frac{2\Delta}{a+c-b}, \quad r_4 = \frac{2\Delta}{a+b-c}.$$

Man gebe diesen vier Ausdrücken das Product ihrer Nenner, welches nichts anderes ist als $16\Delta^2$, zum Nenner, so gehen sie in folgende über:

$$7. \quad \begin{cases} 8\Delta r_1 = (a+c-b)[a-(c-b)](b+c-a) = (a^2-c^2-b^2+2cb)(b+c-a), \\ 8\Delta r_2 = (a+c-b)[a-(c-b)](a+b+c) = (a^2-c^2-b^2+2cb)(a+b+c), \\ 8\Delta r_3 = (a+b+c)[a-(b+c)](c-a-b) = (a^2-c^2-b^2-2cb)(c-a-b), \\ 8\Delta r_4 = (a+b+c)[a-(b+c)](b-c-a) = (a^2-c^2-b^2-2cb)(b-c-a). \end{cases}$$

Gesetzt nun, das Dreieck sei bei A rechtwinklig, so ist $a^2 = b^2 + c^2$ und $2cb$ ist alsdann gleich 4Δ . In diesem Falle also gehen die vorhergehenden Ausdrücke in folgende über:

$$8. \quad \begin{cases} 8\Delta r_1 = 4\Delta(b+c-a) \text{ oder } r_1 = \frac{1}{2}(b+c-a), \\ 8\Delta r_2 = 4\Delta(a+b+c) \text{ oder } r_2 = \frac{1}{2}(b+c+a), \\ 8\Delta r_3 = 4\Delta(a+b-c) \text{ oder } r_3 = \frac{1}{2}(b-c+a), \\ 8\Delta r_4 = 4\Delta(a+c-b) \text{ oder } r_4 = \frac{1}{2}(a+c-b). \end{cases}$$

Dieses sind zugleich die Ausdrücke der Radien der vier berührenden Kreise für das rechtwinklige Dreieck, und es folgt aus denselben unmittelbar, daß $r_2 = r_1 + r_3 + r_4$ ist, wie in dem Lehrsatz behauptet wird.

Aus den Ausdrücken (7.) kann man leicht noch einige Zusätze herleiten.

Es ist nemlich

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A,$$

also

$$9. \quad a^2 - c^2 - b^2 = -2bc \cos A.$$

Setzt man dieses in die Ausdrücke (7.), so verwandeln sie sich in

$$\begin{aligned} 4\Delta r_1 &= bc(1-\cos A)(b+c-a), \\ 4\Delta r_2 &= bc(1-\cos A)(a+b+c), \\ 4\Delta r_3 &= bc(1+\cos A)(a+b-c), \\ 4\Delta r_4 &= bc(1+\cos A)(a+c-b). \end{aligned}$$

Dieses giebt z. B.

$$4\Delta(r_1 + r_3 + r_4) = bc[a + b + c + \cos A(3a - b - c)] \text{ oder}$$

$$4\Delta(r_1 + r_3 + r_4) = bc(1 - \cos A)(a + b + c) + 4abc \cos A,$$

folglich, vermöge des 2ten Ausdrucks (10.),

$$4\Delta(r_1 + r_3 + r_4) = 4\Delta r_2 + 4abc \cos A$$

oder

$$11. \quad r_1 + r_3 + r_4 = r_2 + \frac{abc}{\Delta} \cos A.$$

Es ist aber, wenn man den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises durch R bezeichnet, bekanntlich

$$12. \quad R = \frac{abc}{4\Delta},$$

also ist vermöge (11.)

$$13. \quad \begin{cases} r_1 + r_3 + r_4 - 4R \cos A = r_2, \text{ und eben so} \\ r_1 + r_2 + r_4 - 4R \cos B = r_3, \\ r_1 + r_2 + r_3 - 4R \cos C = r_4, \end{cases}$$

das heist: Für die Halbmesser des innern und der drei äusseren berührenden Kreise in einem beliebigen Dreieck ist der Halbmesser eines beliebigen äusseren Kreises gleich der Summe der Halbmesser der drei übrigen Kreise, weniger dem vierfachen Halbmesser des umschriebenen Kreises multiplicirt in den Cosinus des Winkels in welchem der einzelne berührende äussere Kreis liegt, oder was dasselbe ist: weniger dem vierfachen Abstände des Mittelpuncts des umschriebenen Kreises von derjenigen Seite des Dreiecks, die dem Winkel gegenüber liegt, in welchem sich der äussere Kreis befindet.

Wenn einer der Winkel des Dreiecks ein rechter ist, so ist dessen Cosinus Null und man erhält dann den Lehrsatz des Hrn. Steiner.

Ferner geben die Ausdrücke (10.)

$$4\Delta(r_2 + r_3 + r_4) = bc[3a + b + c + \cos A(a - b - c)]$$

oder

$$4\Delta(r_2 + r_3 + r_4) = bc(1 - \cos A)(b + c - a) + 4abc,$$

also vermöge des ersten Ausdrucks (10.)

$$4\Delta(r_2 + r_3 + r_4) = 4\Delta r_1 + 4abc,$$

und vermöge (12.)

$$\Delta(r_2 + r_3 + r_4) = \Delta r_1 + 4\Delta R$$

oder

$$14. \quad r_2 + r_3 + r_4 = r_1 + 4R,$$

das heist: In einem beliebigen Dreieck sind die Halbmesser der drei

äußeren berührenden Kreise zusammen so lang als der Halbmesser des inneren berührenden Kreises und der vierfache Halbmesser des umschriebenen Kreises.

Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, z. B. bei A , so ist $4R = 2a$. Also sind im rechtwinkligen Dreieck die Halbmesser der äußeren Kreise zusammen so lang als der Halbmesser des innern Kreises und die doppelte Hypothenuse. Addirt man die Gleichungen (13. 14.), so erhält man $3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + 4R(1 + \cos A + \cos B + \cos C)$, also den Satz:

$$15. \quad r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2R(1 + \cos A + \cos B + \cos C).$$

Setzt man z. B. die erste Gleichung (13.) in (14.), so erhält man

$$r_1 + r_3 + r_4 - 4R \cos A + r_3 + r_4 = r_1 + 4R,$$

oder

$$16. \quad \begin{cases} r_3 + r_4 = 2R(1 + \cos A), \text{ und eben so} \\ r_2 + r_4 = 2R(1 + \cos B), \\ r_2 + r_3 = 2R(1 + \cos C). \end{cases}$$

Für das rechtwinklige Dreieck giebt, wenn z. B. A der rechte Winkel ist, die erste Gleichung (16.) den Satz, daß die Halbmesser der äußeren Kreise, welche die Katheten berühren, zusammen so lang sind, als die Hypothenuse, was auch folgt, wenn man die 3. und 4. Gleichung (8.) addirt. Aehnliche Sätze geben die Gleichungen (8.) für die Katheten. Es folgt aus denselben auf gleiche Weise:

$$17. \quad r_1 + r_3 = b, \quad r_1 + r_4 = c, \quad r_3 + r_4 = a.$$

25.

Auflösung der Aufgaben und Beweis der Lehrsätze

5. 6. 7. 8. 9. im 1sten Hefte S. 96 und 29. 30. 31. 32. 33. im
2ten Hefte S. 191 des 2ten Bandes dieses Journals.

(Von Herrn Stud. math. Heinen zu Bonn.)

Aufgabe 5. Jeder beliebige Punct in der Ebene eines gegebenen geradlinigen Dreiecks kann einer der Brennpuncte eines Kegelschnittes sein, der alle drei Seiten des Dreiecks berührt. Man soll nun untersuchen, welche Lage der Punct in Beziehung auf das Dreieck haben müsse, damit der Kegelschnitt entweder Parabel oder Ellipse oder Hyperbel sei?

Die Beantwortung dieser Aufgabe giebt der 32. Lehrsatz des 2ten Hefts Bd. II. Dieser Satz findet sich auch in Plücker's „Analyt. geometr. Entwicklungen.“*) Wenn nämlich drei gerade Linien und ein Punct gegeben sind, so giebt es einen Kegelschnitt, welcher die drei gegebenen geraden Linien berührt und den gegebenen Punct zum Brennpuncte hat. Wir können den zweiten Brennpunct dieses Kegelschnittes unmittelbar mittelst folgenden Satzes bestimmen: Wenn man von irgend einem gegebenen Puncte Tangenten an eine gegebene Ellipse oder Hyperbel legt, und zwei gerade Linien nach den beiden Brennpuncten zieht, so bildet eine dieser geraden Linien mit einer Tangente denselben Winkel, als die andere gerade Linie mit der anderen Tangente. (Entwik. 333.) Sobald nun die beiden Brennpuncte gefunden sind, ergiebt sich sogleich die Natur des Kegelschnittes aus dem bekannten Satze, daß der Ort der Brennpuncte aller derjenigen Parabeln, die drei gegebene Geraden berühren, derjenige Kreis ist, welcher um das von den gegebenen geraden Linien gebildete Dreieck beschrieben werden kann.

Aufgabe 6. Fället man aus irgend einem Peripheriepuncte P des um ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises Lothe auf die Seiten des Dreiecks, so liegen bekanntlich die Fußpuncte dieser drei Lothe allemal in irgend einer Geraden G . Man soll denjenigen Punct P finden, für

*) Analytisch-geometrische Entwicklungen von Dr. Plücker. Erster Band. Mit acht Kupfertafeln. Essen bei G. D. Baedeker 1828.

welchen die ihm zugehörige Gerade G mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

Auflösung. Nach Sätzen, die wir gleich anführen und beweisen wollen, beruht die Construction der vorstehenden Aufgabe darauf, den Brennpunct derjenigen Parabel zu bestimmen, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt und deren Durchmesser senkrecht stehen auf der gegebenen Geraden G . Es ist nämlich I.) der Ort der Brennpuncte aller Parabeln, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren, der um das Dreieck beschriebene Kreis. II.) Wenn man von irgend einem Punkte dieses Kreises Perpendikel auf die drei Seiten des gegebenen Dreiecks fällt, so liegen die Fußpunkte dieser Perpendikel in einer und derselben geraden Linie, welche diejenige Parabel im Scheitel berührt, welche die drei Dreiecksseiten zu Tangenten und jenen Punct zum Brennpuncte hat. Um die eben angedeutete Construction auszuführen brauchen wir folgenden Satz: III.) Zieht man von einem willkürlichen Punkte aus zwei Tangenten an eine Parabel und eine Linie nach dem Brennpuncte, so bildet diese gerade Linie mit einer Tangente dieselben Winkel, als die andere Tangente mit einem beliebigen Durchmesser der Parabel. Wir wollen ihn zunächst beweisen, weil sich alsdann die beiden angeführten unmittelbar ergeben.

Es seien (Fig. 5. Taf. IV.) CD , CE die von einem willkürlichen Punkte C an eine gegebene Parabel gelegten Tangenten, und P der Brennpunct derselben. Man verbinde C mit P und ziehe durch C den Durchmesser CM der Parabel; alsdann ist darzuthun, daß $\angle MCE = \angle PCD$ ist. Zu diesem Ende ziehe man vom Brennpuncte P nach den Berührungspuncten D und E die geraden Linien PD , PE . Alsdann ist:

$\angle CPM + \angle CMP + \angle PCM = \angle CPD + \angle PCD + \angle CDP = 2R$.
Oder da nach bekannten Sätzen (Hamil. V. 10. u. II. 16.):
 $\angle CPM = \angle CPD$ und $\angle CDP = \angle PCD + \angle PCM$, und $\angle CMP = 2MCE$,
so folgt

$$\angle 2MCE + \angle PCM = \angle 2PCD + \angle PCM,$$

mithin

$$\angle MCE = \angle PCD.$$

Es sei, um Satz I. zu beweisen, AB das von den beiden Tangenten CE , CD interceptirte Stück irgend einer dritten Tangente, und BG parallel gezogen mit CM , so hat man:

$$\angle APB = 2R - \left\{ \begin{array}{l} PAB + ABP \\ ECM + \left\{ \begin{array}{l} GBD \\ MCB \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

also

$$\angle APB = 2R - \angle ACB.$$

In jeder Parabel, welche von den drei geraden Linien CA , CB und BA berührt wird, ergänzt also der Winkel ACB den Winkel am Brennpuncte APB zu zwei Rechten, oder der Ort der Brennpuncte aller Parabeln, welche von den drei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt werden, ist derjenige Kreis, welcher um das Dreieck beschrieben werden kann.

Eben so leicht knüpft sich der Beweis des Satzes II. hier an. Denn, wenn wir von irgend einem Puncte C irgend einer Tangente CE eine gerade Linie CP nach dem Brennpuncte der Parabel und eine zweite gerade Linie CD so ziehen, daß der Winkel PCD , welchen sie mit der erstgezogenen bildet, gleich ist demjenigen Winkel ECM , den die Tangente mit einem Durchmesser der Parabel bildet, so ist nach III. diese gerade Linie eine zweite Tangente der Parabel, und umgekehrt: wenn man von einem Brennpuncte einer Parabel aus nach allen möglichen Tangenten unter demselben gegebenen Winkel gerade Linien zieht, so liegen die Fußpuncte aller dieser geraden Linien auf einer neuen geraden Linie, die selbst eine jener Tangenten ist und mit den Durchmessern der Parabel den gegebenen Winkel bildet. Ist dieser Winkel ein Rechter, so ist diese gerade Linie offenbar die Tangente im Scheitel der Parabel. Da wir nun die drei Seiten irgend eines Dreiecks ansehen können als die Tangenten einer Parabel, welche nach II. irgend einen Punct des um das Dreieck beschriebenen Kreises zum Brennpuncte hat, so haben wir beiläufig den in der Aufgabe als bekannt vorausgesetzten Satz bewiesen, daß die von irgend einem Puncte des um irgend ein gegebenes Dreieck beschriebenen Kreises auf die Seiten des Dreiecks gefälltten Perpendikel in gerader Linie liegen. Nach diesen Sätzen ergibt sich folgende Construction:

Es sei HM (Fig. 6. Taf. IV.) die der Richtung nach gegebene gerade Linie, ABC das gegebene Dreieck. Man fälle aus einem beliebigen Winkelpuncte des Dreiecks, etwa aus C ein Perpendikel auf HM , welches mit der einen durch C gehenden Dreiecksseite AC einen Winkel α bildet, und lege endlich durch denselben Punct C eine zweite gerade Linie, welche mit der anderen durch C gehenden Dreiecksseite BC denselben Winkel α

bildet. Diese letztgezogene Linie schneidet den um das Dreieck beschriebenen Kreis in dem verlangten Punkte P . —

Die eben gegebene Construction, zu der wir mittelst obiger Sätze gelangten, läßt sich auch ohne Hülfe derselben folgendermaßen rechtfertigen.

Es seien E, G, D (Fig. 6. Taf. IV.) die Fußpunkte der vom Punkte P auf die Dreiecksseiten BC, BA und AC gefällten Perpendikel. Alsdann liegen die vier Punkte P, E, C und D auf dem Umfange desselben Kreises. Hieraus folgt, daß

$$\angle CED = \angle CPD; \text{ und da}$$

$$\angle ECF = \angle PCD, \text{ so ist in den Dreiecken } CPD \text{ und } CEF \text{ auch}$$

$$\angle PDC = \angle EFC = R, \text{ also } ED \text{ senkrecht auf } CM. \quad \text{q. e. d.}$$

Statt durch E, P, D und C können wir auch durch P, E, B und G einen Kreis legen, und es zeigt sich dann sogleich, indem wir BI parallel mit CM ziehen und P mit B verbinden, daß $\triangle EIB \sim \triangle PGB$, daher $\angle EIB = \angle EFC = R$, folglich auch die durch E und G gezogene Linie senkrecht auf CF ist, daher die drei Punkte E, G und D in gerader Linie liegen.

Lehrsatz 7. Halbiret man in einem Viereck im Kreise, sowohl die Winkel zwischen den Diagonalen, als auch die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten einschließen, so sind von den 6 Geraden, welche diese Winkel halbiren, drei und drei parallel *).

Beweis. Wir wollen

$$(1.) \quad y^2 + x^2 = r^2$$

für die Gleichung des Kreises nehmen, und zwei gegenüberstehende Seiten des in demselben beschriebenen Vierecks darstellen durch eine einzige Gleichung:

$$(y+ax+b)(y+a'x+b')=y^2+(a+a')xy+aa'x^2+(b+b')y+(ab'+a'b)x+bb'=0.$$

Wenn wir voraussetzen, die Coordinaten-Axen seien so bestimmt, daß sie denjenigen beiden geraden Linien, welche die von jenen Vierecksseiten gebildeten Scheitelwinkel halbiren, parallel sind, so haben wir offenbar folgende Bedingungsgleichung:

$$a + a' = 0,$$

und mithin reduzirt sich die Gleichung jenes Linien-Systems auf:

*) Ein anderer Beweis dieses Lehrsatzes steht im dritten Bande dieses Journals Heft I. S. 84.

$$(2.) \quad y^2 + a a' x^2 + (b + b') y + (a b' + a' b) x + b b' = 0.$$

Alle Gleichungen des zweiten Grades, die sich durch Verbindung von (1.) und (2.) ergeben, sind in folgender enthalten:

$$(3.) \quad y^2 + \frac{(a a' + \mu)}{1 + \mu} x^2 + \frac{(b + b')}{1 + \mu} y + \frac{(a b' + a' b)}{1 + \mu} x + \frac{b b' - \mu r}{1 + \mu} = 0,$$

wo wir durch μ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen. Bei einer gehörigen Bestimmung dieses Coefficienten stellt diese Gleichung jede beliebige Linie zweiter Ordnung dar, welche durch die vier Winkelpuncte des in den Kreis beschriebenen Vierecks gehet. In jener allgemeinen Gleichung sind also auch enthalten die Gleichungen der beiden übrigen Liniensysteme, die durch jene vier Puncte gehen, nämlich des Systems der beiden noch übrigen gegenüberliegenden Seiten und des Systems der beiden Diagonalen des in den Kreis beschriebenen Vierecks. Für jeden dieser beiden Fälle muß die Gleichung (3.) folgende der Gleichung (2.) ganz entsprechende Form annehmen können:

$$y^2 + (\alpha + \alpha') x y + \alpha \alpha' x^2 + (\alpha \beta' + \alpha' \beta) x + (\beta + \beta') y = 0,$$

und da in der Gleichung (2.) das mit xy behaftete Glied fehlt, so folgt hieraus

$$\alpha + \alpha' = 0,$$

d. h. diejenigen beiden geraden Linien, welche die von den beiden Linien jedes der resultirenden Systeme gebildeten Scheitelwinkel halbiren, sind wie in dem ursprünglich angenommenen Systeme den beiden Coordinatenachsen parallel. Hiermit ist also der obige Satz bewiesen.

In dem oben citirten Werke N. 293. wird aus Entwicklungen, die mit den vorstehenden im Wesentlichen übereinstimmen, unmittelbar der bekannte Satz angeknüpft, daß Peripheriewinkel auf demselben Bogen einander gleich sind. Dieß führt uns darauf hin, daß unser Satz sich auch aus diesem ergeben müsse.

Ist nämlich (Fig. 7. Taf. IV.) $ADBC$ das in den Kreis beschriebene Viereck, dessen Diagonalen sich in E und dessen gegenüberstehende Seiten, AD und BC in G , und AC und DB in F schneiden, so hat man, wenn GH , welche CD in M schneidet, den Winkel DGB und EK den Winkel AEC halbiret,

$$\begin{aligned} \angle AEC &= \angle ECB + \angle EBC \\ \angle ECB &= \angle CGD + \angle GDC \\ \hline \angle AEC &= \angle CGD + \angle GDC + \angle EBC \\ &= \angle CGD + 2\angle GDC, \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2} AEC = \frac{1}{2} GCD + GDC, \text{ oder } \angle KEC = \angle EMH, \text{ daher } EK \nparallel GH.$$

Hieraus ergibt sich leicht der vollständige Beweis des obigen Satzes. —

Lehrsatz 8. Vier beliebige Geraden in einer Ebene bilden zu drei und drei genommen vier Dreiecke. In jedem dieser Dreiecke schneiden die drei Lothe aus den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten einander in einem Punkte, und diese vier Punkte liegen allemal in einer Geraden.

Beweis. Es seien bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten:

$$(1.) \quad y + ax + b = 0,$$

$$(2.) \quad y + a'x + b' = 0,$$

$$(3.) \quad y + a''x + b'' = 0,$$

$$(4.) \quad y + a'''x + b''' = 0,$$

die Gleichungen der vier gegebenen geraden Linien. Alsdann findet man leicht für das von dem Durchschnitte von (1.) und (2.) auf (3.) gefällte Perpendikel folgende Gleichung:

$$(5.) \quad a''y - x + \frac{b - b' + (ba' - b'a)a''}{a' - a} = 0,$$

und durch Vertauschung ergibt sich für das vom Durchschnitte von (1.) und (3.) auf (2.) gefällte Perpendikel:

$$(6.) \quad a'y - x + \frac{b - b'' + (ba'' - b''a)a'}{a'' - a} = 0.$$

Multipliciren wir die Gleichung (5.) mit a' und die Gleichung (6.) mit a'' , und ziehen die erstere von der letzteren ab, so erhalten wir:

$$x = \frac{a'a''(a^2 - 1)(b' - b'') - aa''(a'^2 - 1)(b - b'') + aa'(a''^2 - 1)(b - b')}{(a' - a)(a' - a'')(a'' - a)}$$

für die Abscisse des Kreuzungspunctes der Perpendikel in dem von den drei ersten geraden Linien gebildeten Dreieck.

Wenn wir nun annehmen die zweite Axe, über welche ursprünglich durchaus keine Bestimmung gemacht worden ist, gehe durch den eben bezeichneten Kreuzungspunct, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$(7.) \quad ga'a''(b' - b'') - g'a a''(b - b'') + g''a a'(b - b') = 0.$$

(Wir wollen nämlich der kürzeren Bezeichnung wegen $a^2 - 1 = g$, $a'^2 - 1 = g'$, $a''^2 - 1 = g''$, $a'''^2 - 1 = g'''$ setzen.) Soll die zweite Axe ebenfalls durch den Kreuzungspunct in dem von den Geraden (1.), (2.) und

(4.) gebildeten Dreieck gehen, so muß eine zweite Bedingungsgleichung:

$$(8.) \quad g' a' a''' (b' - b''') - g' a' a''' (b - b''') + g''' a' a' (b - b') = 0$$

Statt finden, die wir unmittelbar aus (7.) erhalten, indem wir die zweimal accentuirten Buchstaben dreimal accentuiren. Wir können endlich noch zur völligen Bestimmung des Coordinatensystems annehmen, die erste Gerade (1.) gehe durch den Anfangspunct. Alsdann ist $b = 0$, und wir erhalten aus (7.) und (8.):

$$\frac{g}{a} a' a'' (b' - b'') + g' a'' b'' - g'' a' b' = 0,$$

$$\frac{g}{a} a' a''' (b' - b''') + g' a''' b''' - g''' a' b' = 0.$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen $\frac{g}{a}$, so findet man:

$$g''' a' a'' (b' - b'') - g' a'' a''' (b''' - b'') + g'' a' a''' (b''' - b') = 0.$$

Dieselbe Gleichung erhält man aus (7.), indem man die nicht accentuirten Buchstaben dreimal accentuirt. Es geht also die Axe der y auch durch den Kreuzungspunct der Perpendikel in dem von den Geraden (2.), (3.) und (4.) gebildeten Dreieck. Es ist also auch bewiesen, daß die Kreuzungspuncte dreier der vier im Satze bezeichneten Dreiecke in gerader Linie liegen, und da wir für dieselben je drei beliebige nehmen können, folgt auch, daß alle vier Kreuzungspuncte in gerader Linie liegen. —

Lehrsatz 9. Vier beliebige Punkte in der Peripherie eines gegebenen Kreises bestimmen zu dreien genommen vier Dreiecke. Die vier Punkte, in welchen die Lothe aus den Spitzen dieser vier Dreiecke auf die gegenüberliegenden Seiten einander schneiden, liegen allemal in der Peripherie eines Kreises, welcher dem gegebenen gleich ist.

Beweis. Es ist ein bekannter und leicht zu beweisender Satz, daß die vier gegebenen Punkte und die vier Constructionspuncte alle acht auf ein und derselben gleichseitigen Hyperbel liegen. Wir wollen die beiden Coordinatenaxen, was auf dreifache Weise geschehen kann, durch die vier gegebenen Punkte legen. Stellt alsdann die Gleichung:

$$(1.) \quad y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + 2\gamma y + 2\delta x + \varepsilon = 0$$

jene Hyperbel dar, so ist zunächst, wenn v den Coordinatenwinkel bedeutet,

$$1 - 2\alpha \cos v + \beta = 0,$$

und, da die gegebenen Punkte auf einem Kreise liegen,

$$\beta = 1,$$

mithin:

$$(2.) \quad \alpha = \frac{1}{\cos v}.$$

Wenn wir von denjenigen beiden (gegebenen) Puncten der Curve, welche auf der zweiten Axe liegen und deren Ordinaten wir y' , y'' nennen wollen, Perpendikel auf die erste Axe fällen, so sind die zweiten Durchschnitte dieser Perpendikel mit der Curve zwei der vier Constructionspuncte. Das System dieser beiden Perpendikel wird durch folgende Gleichung dargestellt:

$$\left(y - y' + \frac{x}{\cos v}\right) \left(y - y'' + \frac{x}{\cos v}\right) = 0,$$

die entwickelt folgende Form annimmt:

$$y^2 + \frac{2}{\cos v}xy + \frac{x^2}{\cos^2 v} - (y' + y'')y - \left(\frac{y' + y''}{\cos v}\right)x + y'y'' = 0.$$

Wenn wir diese Gleichung von (1.) abziehen und neben der Gleichung (2.) zugleich auch berücksichtigen, daß $-(y' + y'') = 2\gamma$, $y'y'' = \varepsilon$, so ergibt sich:

$$x \left(\left(\beta - \frac{1}{\cos^2 v} \right) x + \left(2\delta + \frac{y' + y''}{\cos v} \right) \right) = 0.$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir den Factor x fortlassen, diejenige gerade Linie dar, welche durch die beiden Constructionspuncte geht, und die, wie die Form der Gleichung zeigt, der zweiten Axe parallel ist. Es ist also bewiesen, daß zwei gegebene Puncte und zwei Constructionspuncte die Winkelpuncte eines Parallelogramms sind, und daß also, da wir die zweite Axe durch je zwei der gegebenen Puncte legen können, die vier Constructionspuncte ein Viereck bilden, das mit dem von den vier gegebenen Puncten gebildeten Viereck identisch ist. Hieraus folgt denn auch der vorstehende Satz. —

Wir hätten alle analytische Entwicklung bei Seite setzen können, wenn wir folgende beiden Sätze als bekannt betrachtet hätten:

- 1) Wenn man durch die vier Durchschnitte irgend eines Kegelschnittes und eines Kreises paarweise genommen, zwei gerade Linien legt, so schneiden dieselben die Axe des Kegelschnittes unter gleichen Winkeln.
- 2) Der Winkel zweier zugeordneter Durchmesser der gleichseitigen Hyperbel, weniger dem Doppelten desjenigen Winkels, den der eine dieser Durchmesser mit der Queraxe bildet, ist gleich einem rechten Winkel.

Lehrsatz 29. Die Leitlinien aller Parabeln in einer Ebene, von denen jede drei beliebige Geraden berührt, schneiden einander in einem und demselben Punkte, und zwar in dem nemlichen Punkte, in welchem die aus den Winkeln des von den drei Geraden eingeschlossenen Dreiecks auf die gegenüberstehenden Seiten gefällten Lothe einander schneiden.

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir bloß darzuthun, daß wenn eine Parabel von irgend drei geraden Linien berührt wird, die Leitlinien derselben durch den Kreuzungspunct der drei Perpendikel gehen, welche in dem von den drei Geraden gebildeten Dreieck von den Spitzen auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt werden. Zu diesem Ende sei:

$$y^2 = 2px$$

die Gleichung einer gegebenen Parabel, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, und

$$y + ax + b = 0,$$

$$y + a'x + b' = 0,$$

$$y + a''x + b'' = 0,$$

die Gleichungen dreier geraden Linien. Sollen diese Linien die gegebene Parabel berühren, so erhalten wir folgende drei Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten

$$b = \frac{p}{2a}, \quad b' = \frac{p}{2a'}, \quad b'' = \frac{p}{2a''}.$$

Substituiren wir diese Werthe für b, b', b'' in den Ausdruck für die Abscisse des Kreuzungspunctes der Perpendikel, welche von den Spitzen des von den drei geraden Linien gebildeten Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt werden, nemlich in folgenden Ausdruck: (siehe den Beweis des Satzes 8.)

$$x = \frac{a'a''(a^2-1)(b'-b'') - aa''(a'^2-1)(b-b'') + aa'(a''^2-1)(b-b')}{(a'-a)(a'-a'')(a''-a)},$$

so ergibt sich auf der Stelle:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Der Kreuzungspunct liegt also auf der Directrix der Parabel.

Lehrsatz 30. Berührt irgend eine Parabel drei Geraden, welche ein gleichseitiges Dreieck einschließen, so treffen die drei Geraden aus den Ecken des Dreiecks nach

den Berührungspuncten einander im Brennpuncte der Parabel.

Beweis. Dieser Satz ergibt sich unmittelbar, wenn wir beweisen, daß umgekehrt eine gerade Linie, welche durch einen Winkelpunct eines um eine gegebene Parabel beschriebenen gleichseitigen Dreiecks und den Brennpunct der Parabel geht, die gegenüberliegende Seite des Dreiecks in dem Berührungspuncte schneidet.

Es sei nun ABC (Fig. 8. Taf. IV.) das umschriebene Dreieck; F der Brennpunct, welcher auf dem um das Dreieck beschriebenen Kreise liegen muß. Man ziehe CF , welche BA im Punkte E schneidet; alsdann ist E derjenige Punct, in welchem die Parabel von BA (genugsam verlängert) berührt wird. Denn verbindet man den Punct F mit dem Puncte B und zieht hernach BG so, daß die Winkel ABF und GBC gleich sind, so ist BG ein Durchmesser der Parabel. Mit diesem Durchmesser parallel ziehe man endlich durch E die Linie EH . Hiernach ergibt sich nach allgemein bekannten Sätzen:

$$\begin{aligned} \angle BEC &= \left\{ \begin{array}{l} \angle BFC \\ \angle BAC \\ \angle ABC \end{array} \right\} - \angle EBF \\ &= \angle FBC \\ &= \angle ABG \\ &= \angle DEH \end{aligned}$$

woraus dann folgt, daß E der Berührungspunct ist.

Lehrsatz 31. a. Berührt irgend eine Fläche zweiten Grades die sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide oder ihre Verlängerungen, so schneiden die drei Geraden durch die Berührungspuncte der gegenüberliegenden Kanten, einander allemal in einem Puncte.

Beweis. Eine Fläche zweiter Ordnung ist durch sechs ihrer Tangenten und drei Puncte vollkommen bestimmt. Sind jene sechs Tangenten die Kanten eines Tetraëders, und jene drei Puncte diejenigen Puncte, in welchen drei dieser Kanten (die nicht in derselben Ebene sich befinden) berührt werden, so erhalten wir die drei übrigen Berührungspuncte auf der Stelle. Denn jede Seitenfläche jenes Tetraëders, etwa ABC (Fig. 9. Taf. IV.), schneidet die Fläche zweiter Ordnung in einer Curve derselben Ordnung, die von drei Kanten AB , AC , BC berührt wird.

Sind die Berührungspuncte M und O auf zwei dieser Kanten, auf AC und AB , gegeben, so erhalten wir nach einem bekannten Satze den Berührungspunct N auf der dritten Kante CB , indem wir durch den Durchschnitt von MB und CO , durch E , die gerade Linie AN ziehen, die auf BC jenen Berührungspunct bestimmt. Ist außer den Berührungspuncten M und O noch ein Berührungspunct z. B. P auf AD gegeben, so erhalten wir, wenn wir wie eben construiren, auch die beiden übrigen Berührungspuncte Q und R . Um nun zu beweisen, daß diejenigen geraden Linien, welche diese Puncte, paarweise genommen, P und N , Q und M , O und R verbinden, sich in demselben Puncte schneiden, verfahren wir am kürzesten auf folgende Weise. —

In den Puncten A , B , C und D wollen wir uns vier Gewichte denken, die sich verhalten, wie

$$1 : \frac{OA}{OB} : \frac{MC}{MA} : \frac{PD}{PA}.$$

Alsdann fallen die Schwerpuncte der Gewichte

$$\begin{array}{ll} A \text{ und } B \text{ in } O, & D \text{ und } C \text{ in } R, \\ A \text{ und } C \text{ in } M, & D \text{ und } B \text{ in } Q, \\ A \text{ und } D \text{ in } P, & B \text{ und } C \text{ in } N. \end{array}$$

Mithin gehen QR , MQ und PN durch den Schwerpunct aller vier Gewichte, und der obige Satz ist also bewiesen.

Zusätzlich bemerken wir, daß durch denselben Punct auch diejenigen vier geraden Linien gehen, die von jedem der Eckpuncte des Tetraeders nach dem Kreuzungspunct derjenigen drei geraden Linien gezogen werden, die in der gegenüberliegenden Seitenfläche die Berührungspuncte mit den gegenüberliegenden Winkelpuncten verbinden.

Lehrsatz 31.b. Berührt von zwei beliebigen Flächen zweiten Grades jede die sechs Kanten einer dreiseitigen Pyramide oder ihre Verlängerungen, so liegen die zwölf Berührungspuncte allemal in einer dritten Fläche desselben Grades.

Beweis. Wenn wir drei in derselben Ebene liegende Kanten des Tetraeders, etwa die Kanten AB , AC , BC (Fig. 10. Taf. IV.) nehmen, welche in den Puncten O , M , N und O' , M' , N' von den beiden Flächen zweiter Ordnung berührt werden, so gehen nach der schon vorhin gemachten Bemerkung die geraden Linien AN , CO und BM , so wie auch

AN' , CO' , und BM' durch denselben Punct. Alsdann ergibt sich leicht, daß die sechs Puncte O , M , N und O' , M' , N' auf einem und demselben Kegelschnitte liegen. Die vier Kegelschnitte, welche wir hiernach auf den vier Seitenflächen des Tetraëders construiren können, schneiden sich offenbar zu je zwei in zwei Puncten, und durch je zwei dieser Kegelschnitte können wir beliebig viele Flächen zweiter Ordnung legen. (Es ist leicht zu zeigen, daß dieß überhaupt immer dann geschehen kann, wenn zwei Kegelschnitte im Raume durch dieselben beiden Puncte gehen.)

Wenn wir uns auf die Fig. 11. Taf. IV. beziehen, so können wir z. B. einen Kegelschnitt durch die sechs Puncte O , O' , N' , N , M , M' und einen zweiten durch die sechs Puncte O , O' , Q' , Q , P , P' legen, welcher den ersten in den beiden Puncten O , O' schneidet. Durch diese beiden Kegelschnitte lassen sich unendlich viele Oberflächen zweiter Ordnung legen, die also durch die zehn Puncte O , O' , M , M' , N , N' , Q , Q' , P , P' gehen. Um eine solche Linie vollkommen zu bestimmen, müssen wir noch einen Punct annehmen; dieser Punct sei R . Die so bestimmte Fläche wird von der Ebene ACD nothwendig in einem Kegelschnitte geschnitten. Auf diesem Kegelschnitte liegen die Puncte MM' , PP' , RR' , also liegt auf demselben der Punct R' , welcher Punct mithin ein Punct der Oberfläche ist.

Lehrsatz 33. 1) Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien einander schneiden, so giebt es zwei andere Geraden, die ihre Winkel halbiren.

2) Sind drei Geraden gegeben, so wird jede derselben von den zwei Geraden, welche nach (1.) zu den beiden übrigen gehören, in zwei Puncten geschnitten; zusammen giebt es also 6 solcher Durchschnittspuncte, und von diesen 6 Durchschnittspuncten liegen 4 mal 3 in einer Geraden.

3) Sind vier gerade Linien gegeben, so wird jede derselben von den vier Geraden, welche zu den drei übrigen gehören, nach (2.) in vier Puncten geschnitten; solcher Puncte sind also zusammen 16, und von diesen 16 Puncten liegen 8 mal 4 in einer Geraden.

4) Sind 5 Gerade gegeben, so wird jede derselben von den 8 Geraden, welche zu den 4 übrigen gehören, nach (3.) in 8 Puncten geschnitten; dieses sind zusammen 40 Puncte, und von diesen 40 Puncten liegen 16 mal 5 in einer Geraden.—

Ueberhaupt bei n gegebenen Geraden wird jede von den 2^{n-2} Geraden, welche zu den $n-1$ übrigen gehören, in 2^{n-2} Punkten geschnitten, welches zusammen 2^{n-2} mal n Punkte ausmacht, und von diesen Punkten liegen 2^{n-1} mal n in einer Geraden.

Dieser Satz ist noch ein specieller Fall von einem allgemeineren Satze.

Beweis. Wenn bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$y + ax + b = 0$$

irgend eine gegebene gerade Linie und (y', x') irgend einen gegebenen Punkt darstellt, so ist bekanntlich der Abstand dieses Punktes von der geraden Linie durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$(I.) \frac{y' + ax' + b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Wir wollen x' und y' als veränderliche Größen betrachten, und alsdann diesen Ausdruck der Kürze wegen durch A bezeichnen, so daß mithin

$$A = 0$$

die Gleichung der gegebenen geraden Linie ist.

Wenn statt der gegebenen geraden Linie eine andere gegeben ist, so ändert sich die Form von (1.) nicht, nur a und b erhalten andere Werthe. Solche Ausdrücke, die sich auf eine zweite, dritte, ... $(n-1)$ gegebene gerade Linie beziehen, wollen wir durch $A', A'', \dots A^n$ bezeichnen. Alsdann stellt die Gleichung

$$A \pm A' = 0$$

diejenigen beiden geraden Linien dar, welche die von zwei gegebenen geraden Linien gebildeten Winkel halbiren, und die Gleichung

$$A \pm A' \pm A'' = 0 \dots,$$

nach dem Ausdrucke des Satzes, die zu drei gegebenen geraden Linien gehörigen vier Geraden dar, und um gleich zum Allgemeinen überzugehen, die Gleichung

$$(II.) A \pm A' \pm A'' \pm \dots A^n = 0$$

die zu n gegebenen geraden Linien gehörigen 2^{n-1} Geraden. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn folgende Paare von Gleichungen zugleich statt finden:

$$\begin{aligned} A &= 0, & A' \pm A'' \pm \dots A^n &= 0, \\ A' &= 0, & A \pm A'' \pm \dots A^n &= 0, \\ \dots & & \dots & \dots \dots \dots \\ A^n &= 0, & A \pm A' \pm \dots A^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten hiernach n Punkte jener geraden Linie, nämlich die Durchschnitte jeder der n gegebenen geraden Linien mit den zu den $n - 1$ übrigen gehörigen Geraden.

Den „allgemeineren Satz, von welchem der vorliegende ein specieller Fall ist,“ erhält man, wenn man die obige Construction auf irgend eine andere Ebene projecirt. Alsdann sind irgend zwei gegebene geraden Linien und die beiden zugehörigen Geraden solche Linien, die man Harmonicalen genannt hat. Wir brauchen aber in dem analytischen Beweise dieses allgemeineren Satzes nicht zum Projiciren unsere Zuflucht zu nehmen; denselben Satz erhalten wir, wenn wir in der Gleichung (II.) jedem Gliede irgend einen Coëfficienten beifügen. —

Man kommt zu einer neuen Reihe von Sätzen, wenn man die Gleichung (II.) auf eine andere Weise in zwei Theile zerlegt, um sie durch den Durchschnitt von Paaren gerader Linien zu construiren. Auch ergiebt sich leicht die geometrische Beziehung der zu n gegebenen geraden Linien gehörigen 2^{n-1} Geraden. Hierüber vergleiche man die oben angeführten Entwicklungen von Hrn. Plücker (54, 1.).

Z u g a b e.

Wenn man durch jede der drei Ecken eines gegebenen Dreiecks ABC und durch irgend zwei feste in der Ebene des Dreiecks beliebig angenommene Punkte V und V' (Fig. 12. Taf. IV.) zwei gerade Linien zieht, so wird von diesen Linien jede der drei gegenüberstehenden Seiten in zwei Punkten N und N' , M und M' , O und O' geschnitten. Diese Durchschnitte liegen alle sechs auf derselben Linie zweiter Ordnung.

Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß in dem von jenen Durchschnittspunkten bestimmten Sechseck die gegenüberliegenden Seiten OO' und $M'N$, MM' und $O'N'$, NN' und OM sich in solchen drei Punkten schneiden, die in gerader Linie liegen. Zu diesem Ende stellen wir die Gleichungen der drei Dreiecksseiten (Gleichungen von der Form $Ay + Bx + C = 0$) der Kürze halber folgendermaßen dar:

$$c = 0 \quad (AB),$$

$$b = 0 \quad (AC),$$

$$a = 0 \quad (BC).$$

Alsdann erhalten wir für die drei durch V und die drei durch V' gehenden geraden Linien folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} c - \mu b = 0 & \text{für } VA, \\ c - \nu a = 0 & \text{für } VB, \\ \mu b - \nu a = 0 & \text{für } VC, \end{array} \quad \begin{array}{ll} c - \mu' b = 0 & \text{für } V'A, \\ c - \nu' a = 0 & \text{für } V'B, \\ \mu' b - \nu' a = 0 & \text{für } V'C, \end{array}$$

wobei μ und ν , μ' und ν' gehörig zu bestimmende Coëfficienten bedeuten, deren Werth sich mit der Lage der Punkte V und V' ändert.

(Wir erhalten nämlich die allgemeine Gleichung aller geraden Linien, die durch den Durchschnitt zweier gegebenen gehen, indem wir die beiden Gleichungen der letztgenannten von einander abziehen (oder auch zu einander addiren), nachdem wir zuvor eine derselben mit einem unbestimmten Coëfficienten multiplicirt haben. Nehmen wir ferner Gleichungen von der Form $Ay + Bx + C = 0$, so können wir hiernach offenbar irgend drei durch denselben Punct gehende gerade Linien durch drei Gleichungen darstellen, von denen man eine durch Abziehen der beiden übrigen erhält.) Wir erhalten ferner folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} c - \mu b - \nu' a = 0 & \text{für } NM', \\ c + \mu b - \nu a = 0 & \text{für } MO, \\ c - \mu' b + \nu' a = 0 & \text{für } N'O'. \end{array}$$

Denn die erste dieser Gleichungen wird befriedigt, wenn zugleich:

$$\begin{array}{ll} a = 0 & \text{und } c - \mu b = 0 \text{ (im Puncte } N), \\ b = 0 & \text{und } c - \nu' a = 0 \text{ (im Puncte } M'). \end{array}$$

Die zweite derselben wird befriedigt, wenn zugleich:

$$\begin{array}{ll} b = 0 & \text{und } c - \nu a = 0 \text{ (im Puncte } M), \\ c = 0 & \text{und } \mu b - \nu a = 0 \text{ (im Puncte } O). \end{array}$$

Die dritte endlich, wenn:

$$\begin{array}{ll} a = 0 & \text{und } c - \mu' b = 0 \text{ (im Puncte } N'), \\ c = 0 & \text{und } \mu' b - \nu' a = 0 \text{ (im Puncte } O'). \end{array}$$

(Die allgemeine Gleichung der Linien, die durch N , den Durchschnitt der Linien $a = 0$ und $c - \mu b = 0$, gehen, ist nach dem früher Bemerkten $\xi a + c - \mu b = 0$, indem ξ irgend einen unbestimmten Coëfficienten bedeutet. Auf ähnliche Weise ist die allgemeine Gleichung der Linien, die durch M' , den Durchschnitt der Linien $b = 0$ und $c - \nu' a = 0$ gehen folgende: $\xi' b + c - \nu' a = 0$. Wenn wir ξ und ξ' so bestimmen, daß

die beiden Gleichungen identisch werden, was dann geschieht, wenn $\xi' = -\mu$, $\xi = -\nu'$, so erhalten wir die obige Gleichung

$$c - \mu b - \nu' a = 0$$

derjenigen geraden Linie, die zugleich durch M' und N geht.) Nun ist auch:

$$(1.) \quad c + \mu b + \nu' a = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, und diese wird befriedigt, wenn zugleich:

$$\begin{array}{l} 2c = 0 \\ (\nu + \nu')a = 0 \\ (\mu + \mu')b = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{oder bloß } c = 0 \\ - \quad - \quad a = 0 \\ - \quad - \quad b = 0 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} -(c - \mu b - \nu' a) = 0, \\ - \quad c + \mu b - \nu a = 0, \\ - \quad c - \mu' b + \nu' a = 0, \end{array}$$

d. h. die Durchschnitte von AB und NM' , von BC und OM und von AC und $O'M'$ liegen auf der durch (1.) dargestellten Linie.

Beiläufig bemerken wir, daß wir 60 verschiedene gerade Linien erhalten, die, ähnlich der durch (1.) dargestellten, drei Durchschnitte derjenigen Linien enthalten, welche die sechs Punkte O , O' , N , N' , M , M' paarweise genommen verbinden.

26.

Beantwortung der Aufgabe S. 212. dieses Bandes:

„Kann $\alpha^{\mu-1} - 1$, wenn μ eine Primzahl und α eine ganze Zahl und kleiner als μ und gröfser als 1 ist, durch $\mu\mu$ theilbar sein.“

(Von Herrn Prof. C. G. J. Jacobi.)

Veranlaßt durch vorstehende interessante Aufgabe, ersuchte ich einen meiner Freunde hieselbst, Hrn. Busch, die Congruenz

$$x^{\mu-1} = 1$$

in Bezug auf den Modul $\mu\mu$ für die Primzahlen bis 37 nach allen ihren Wurzeln aufzulösen. Das Resultat dieser Arbeit enthält die unten stehende Tabelle. Es ist darin den Wurzeln die Form $a + \mu a'$ gegeben, wo a und a' positive Zahlen sind, die kleiner sind als μ ; zu dem a , das in der ersten Verticalreihe steht, giebt sie für $\mu = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$, welche Zahlen sich in der obersten Horizontalreihe befinden, das entsprechende a' , damit $a + \mu a'$ eine Wurzel sei. So z. B. sind die Wurzeln von $x^{36} = 1 \pmod{37^2}$

1, $2 + 2.37$, $3 + 17.37$, $4 + 8.37$, $5 + 24.37$, etc. etc.

Ist $a' = 0$, so ist eine in der Aufgabe verlangte Zahl gefunden. Die Tabelle giebt $a' = 0$, für

μ	a
11	3.9.
29	14.
37	18.

Die einfachste Lösung giebt $3^5 = 243 = 2.11^2 + 1$; also auch $3^{10} = 1$, wenn man die Vielfachen von 121 fortläßt.

27.

Suite des notices sur les fonctions elliptiques. (V. p. 192.)

(Par Mr. C. G. J. Jacobi, prof. en phil. à Königsberg.)

(Extrait d'une lettre de l'auteur au rédacteur de ce journal, du 21. Juillet 1828.)

J'ajoute aux formules données dans ma dernière lettre les développemens des fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèce.

Soit en adoptant la notation de Mr. Legendre, $\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, $E\varphi = \int_0^\varphi \Delta \partial \varphi$, $E^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta \partial \varphi$, $F\varphi = \int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{\Delta}$, $F^1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\Delta}$, de manière que F^1 est ce que je désigne par K : si l'on mêt

$$\varphi = am \frac{2Kx}{\pi}, \quad q = e^{\frac{-K'\pi}{K}},$$

conformément à la notation dont j'ai coutûme de me servir pour ma part, on aura:

$$1) F^1 E\varphi - E^1 F\varphi =$$

$$2\pi \frac{9 \sin 2x - 2q^4 \sin 4x + 3q^9 \sin 6x - 4q^{16} \sin 8x + \dots}{1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16} \cos 8x - \dots} =$$

$$2\pi \left\{ \frac{q \sin 2x}{1 - q^2} + \frac{q^2 \sin 4x}{1 - q^4} + \frac{q^3 \sin 6x}{1 - q^6} + \dots \right\}.$$

Mr. Legendre a démontré que l'expression suivante, dépendante des fonctions elliptiques de seconde et de troisième espèce:

$$2) \int_0^\varphi \partial \varphi \cdot \frac{2k^2 \sin A \cos A \Delta A \sin q^2}{\Delta \varphi (1 - k^2 \sin^2 A \sin^2 q^2)} - \frac{2F\varphi}{F^1} (F^1 E A - E^1 F A),$$

reste la même si l'on échange entre eux les angles A et φ . Si l'on mêt

$$\varphi = am \frac{2Kx}{\pi}, \quad A = am \frac{2K\alpha}{\pi}, \quad \text{je trouve qu'elle est égale à}$$

$$\log \frac{1 - 2q \cos 2(x - \alpha) + 2q^4 \cos 4(x - \alpha) - 2q^9 \cos 6(x - \alpha) + \dots}{1 - 2q \cos 2(x + \alpha) + 2q^4 \cos 4(x + \alpha) - 2q^9 \cos 6(x + \alpha) + \dots}$$

$$= -2 \left\{ \frac{q \sin 2\alpha \sin 2x}{1 - q^2} + \frac{q^2 \sin 4\alpha \sin 4x}{2(1 - q^4)} + \frac{q^3 \sin 6\alpha \sin 6x}{3(1 - q^6)} + \dots \right\},$$

formules symétriques en α et x , et dont la première embrasse tous les cas des fonctions elliptiques de troisième espèce, pourvû qu'on donne à α des valeurs réelles ou imaginaires quelconques.

On peut remplacer les fonctions elliptiques par la nouvelle transcendante:

$$1 - 2q \cos 2x + 2q^2 \cos 4x - 2q^3 \cos 6x + 2q^4 \cos 8x - \dots = \Theta x.$$

Si l'on mêt $-\log q = \frac{\pi K'}{K} = \omega$, $i = \sqrt{-1}$, on aura

$$3) \Theta(x + \pi) = \Theta x,$$

$$4) \Theta(x + i\omega) = \frac{-e^{-2ix} \Theta x}{q},$$

$$5) \Theta\left(\frac{i\omega}{2}\right) = 0,$$

$$6) \Theta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \Theta(x, -q).$$

Soit

$$-i\sqrt[4]{q} \cdot e^{ix} \Theta\left(x + \frac{i\omega}{2}\right) = i\sqrt[4]{q} \cdot e^{-ix} \Theta\left(x - \frac{i\omega}{2}\right) = Hx,$$

on aura

$$Hx = 2\sin x \sqrt[4]{q} - 2\sin 3x \sqrt[4]{q^9} + 2\sin 5x \sqrt[4]{q^{25}} - 2\sin 7x \sqrt[4]{q^{49}} + \dots$$

On aura de plus:

$$7) H(x + \pi) = -Hx,$$

$$8) H\left(x + \frac{i\omega}{2}\right) = \frac{ie^{-ix} \Theta x}{\sqrt[4]{q}},$$

$$9) \Theta\left(x + \frac{i\omega}{2}\right) = \frac{ie^{-ix} Hx}{\sqrt[4]{q}},$$

$$10) Hi\omega = 0,$$

$$11) H(x + i\omega) = \frac{-e^{-2ix} Hx}{q}.$$

Les fonctions elliptiques peuvent être exprimées par les fonctions Θx et Hx qu'on peut réduire à une seule au moyen des formules:

$$12) \sin am \frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{Hx}{\Theta x},$$

$$13) \cos am \frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{H\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\Theta x},$$

$$14) \Delta am \frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'} \cdot \frac{\Theta\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\Theta x}.$$

Les constantes k , k' , K se trouvent à l'aide des formules:

$$15) \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + \dots$$

$$16) \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = \Theta 0 = 1 - 2q + 2q^2 - 2q^3 + 2q^4 - \dots$$

$$17) \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = \sqrt[4]{q} \cdot \Theta\left(\frac{\pi}{2} + i\omega\right) = H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \dots$$

La fonction elliptique de troisième espèce 2. devient simplement:

$$\log \frac{\Theta(x-\alpha)}{\Theta(x+\alpha)}.$$

On tire de l'équation (12.) les deux autres (13., 14.), le théorème d'Euler sur la sommation des fonctions elliptiques, l'équation différentielle

$$\partial \sin am \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2K}{\pi} \cos am \frac{2Kx}{\pi} \Delta am \frac{2Kx}{\pi} \partial x,$$

et quantité d'autres formules, à l'aide de l'équation identique:

$$\begin{aligned} 18) \quad H(x, q) \Theta(X, q) - H(X, q) \Theta(x, q) = \\ 2H\left(\frac{x-X}{2}, \sqrt{q}\right) H\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x+X}{2}, \sqrt{q}\right), \end{aligned}$$

ou en d'autres termes:

$$\begin{aligned} 19) \quad (\sin x \sqrt[4]{q} - \sin 3x \sqrt[4]{q^9} + \sin 5x \sqrt[4]{q^{25}} - \dots)(1 - 2q \cos 2X + 2q^4 \cos 4X - 2q^9 \cos 6X + \dots) \\ - (\sin X \sqrt[4]{q} - \sin 3X \sqrt[4]{q^9} + \sin 5X \sqrt[4]{q^{25}} - \dots)(1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots) \\ = 2\left(\sin \frac{x-X}{2} \sqrt[4]{q} - \sin \frac{3(x-X)}{2} \sqrt[4]{q^9} + \sin \frac{5(x-X)}{2} \sqrt[4]{q^{25}} - \dots\right) \times \\ \left(\cos \frac{x+X}{2} \sqrt[4]{q} + \cos \frac{3(x+X)}{2} \sqrt[4]{q^9} + \cos \frac{5(x+X)}{2} \sqrt[4]{q^{25}} + \dots\right). \end{aligned}$$

équation remarquable et aisément à démontrer au moyen des premiers élémens de la trigonométrie.

Les fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$ peuvent être résolues en facteurs.

On trouve

$$\Theta x = C(1 - 2q \cos 2x + q^2)(1 - 2q^3 \cos 2x + q^6)(1 - 2q^5 \cos 2x + q^{10}) \dots$$

$$Hx =$$

$$2\sqrt[4]{q} \cdot C \sin x (1 - 2q^2 \cos 2x + q^4)(1 - 2q^4 \cos 2x + q^8)(1 - 2q^6 \cos 2x + q^{12}) \dots,$$

C étant une constante. En appliquant seulement à ces formules le théorème de Côtes, on trouve sur le champ la théorie générale de la transformation et de la multiplication des fonctions Θ ou H , et par suite en même temps celle des fonctions elliptiques. En effet on a suivant le théorème de Côtes, n étant un nombre impair quelconque:

$$20) \quad \Theta x \Theta\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \Theta\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) \dots \Theta\left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = C' \Theta(nx, q^n),$$

$$21) \quad Hx H\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) H\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) \dots H\left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = C' H(nx, q^n),$$

C' étant une autre constante. Nommons $K^{(n)}$, $k^{(n)}$ les quantités qui dépendent de la même manière de q^n que K , k de q : on tire de la formule

$$\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = \frac{H(x, q)}{\Theta(x, q)\sqrt{k}}$$

cette autre

$$\sin am\left(\frac{2K^{(n)}x}{\pi}, k^{(n)}\right) = \frac{H(x, q^n)}{\sqrt{k^{(n)}} \Theta(x, q^n)}.$$

Cela posé, les équations 20., 21. étant divisées l'une par l'autre, on en tire :

$$\sin am\left(\frac{2nK^{(n)}x}{\pi}, k^{(n)}\right) = \sqrt{\frac{k^n}{k^{(n)}}} \sin am \frac{2Kx}{\pi} \sin am \frac{2K}{\pi} \left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \sin am \frac{2K}{\pi} \left(x + \frac{4\pi}{n}\right) \dots \sin am \frac{2K}{\pi} \left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right),$$

formule générale pour la transformation des fonctions elliptiques, telle que je l'ai établie le premier. On trouve d'une manière analogue les autres transformations réelles ou imaginaires attachées au nombre n .

Puisque les fonctions elliptiques s'expriment aisément à l'aide de la fonction Θx , on peut essayer réciproquement à exprimer celle-ci par les fonctions elliptiques. On y parvient en intégrant l'équation 1. Cela donne

$$22) \log \frac{\Theta x}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}} = \int_0^x \partial \varphi \cdot \frac{F^1 E \varphi - E^1 F \varphi}{F^1 \Delta \varphi},$$

φ étant toujours l'amplitude de $\frac{2Kx}{\pi}$. On peut aussi exprimer la fonction

$\log \frac{\Theta x}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}}$ au moyen d'une intégrale définie. En effet la formule 2. donne

$$23) -\log \frac{\Theta 2A}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}} = \int_0^A \frac{2k^2 \sin A \cos A \Delta A \sin \varphi^2}{\Delta \varphi (1 - k^2 \sin A^2 \sin \varphi^2)} - 2 \frac{FA}{F^1} (F^1 EA - E^1 FA).$$

Passons à d'autres objets. Etant mis, comme ci-dessus,

$$\omega = -\log q = \frac{\pi K'}{K},$$

on a

$$\Theta x = 1 - 2e^{-\omega} \cos 2x + 2e^{-4\omega} \cos 4x - 2e^{-9\omega} \cos 6x + \dots$$

$$Hx = 2e^{-\frac{\omega}{4}} \sin x - 2e^{-\frac{9\omega}{4}} \sin 3x + 2e^{-\frac{25\omega}{4}} \sin 5x - 2e^{-\frac{49\omega}{4}} \sin 7x + \dots$$

De là on tire

$$24) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{4\partial^2 \Theta}{\partial \omega}; \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{4\partial H}{\partial \omega}.$$

Il existe entre les deux intégrales de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4\partial z}{\partial \omega}$, $z = \Theta$, $z = H$, la relation

$$Hx = +ie^{-(ix + \frac{\omega}{4})} \Theta\left(x - \frac{i\omega}{2}\right),$$

ou

$$\Theta x = +ie^{-(ix + \frac{\omega}{4})} H\left(x - \frac{i\omega}{2}\right).$$

Généralement $z = \mathfrak{S}(x)$ étant une intégrale de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4\partial z}{\partial \omega}$, une autre sera

$$z = e^{-(ix + \frac{\omega}{4})} \mathfrak{S}\left(x - \frac{i\omega}{2}\right),$$

théorème facile à vérifier.

Soit

$$u = \sqrt{\left(\frac{2K'K}{\pi}\right)} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \dots$$

$$v = \sqrt{\left(kk' \left(\frac{2K}{\pi}\right)^3\right)} = 2\sqrt[4]{q} - 6\sqrt[4]{q^9} + 10\sqrt[4]{q^{25}} - 14\sqrt[4]{q^{49}} + \dots$$

on tire des équations $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{4\partial \Theta}{\partial \omega}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{4\partial H}{\partial \omega}$ les développemens suivans de Θ et de H , savoir:

$$25) \quad \Theta = u + \frac{(2x)^2 \partial u}{2\partial \omega} + \frac{(2x)^4 \partial^2 u}{2.3.4 \partial \omega^2} + \frac{(2x)^6 \partial^3 u}{2.3.4.5.6 \partial \omega^3} + \dots$$

$$26) \quad 2H = 2xv + \frac{(2x)^3 \partial v}{2.3 \partial \omega} + \frac{(2x)^5 \partial^2 v}{2.3.4.5 \partial \omega^2} + \frac{(2x)^7 \partial^3 v}{2.3.4.5.6.7 \partial \omega^3} + \dots$$

Cela donne

$$27) \quad \sin am \frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{2xv + \frac{(2x)^3 \partial v}{2.3 \partial \omega} + \frac{(2x)^5 \partial^2 v}{2.3.4.5 \partial \omega^2} + \frac{(2x)^7 \partial^3 v}{2.3.4.5.6.7 \partial \omega^3} + \dots}{u + \frac{(2x)^2 \partial u}{1.2 \partial \omega} + \frac{(2x)^4 \partial^2 u}{1.2.3.4 \partial \omega^2} + \frac{(2x)^6 \partial^3 u}{1.2.3.4.5.6 \partial \omega^3} + \dots}$$

On trouve les valeurs de $\frac{\partial^n u}{\partial \omega^n}$, $\frac{\partial^n v}{\partial \omega^n}$ au moyen de la formule

$$28) \quad \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{-2}{k(1-k^2) \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2},$$

laquelle se déduit aisément des formules connues.

Mr. Poisson, dans ses savans recherches sur les intégrales définies a fait connoître plusieurs propriétés de la fonction Θx . Les méthodes délicates, propres à cet illustre géomètre, trouvent une belle vérification dans la théorie des fonctions elliptiques. Par exemple Mr. Poisson démontre dans le dix-neuvième cahier de l'école polytechnique la formule remarquable:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1 + 2e^{-\pi x} + 2e^{-4\pi x} + 2e^{-9\pi x} + 2e^{-16\pi x} + \dots}{1 + 2e^{-\frac{\pi}{x}} + 2e^{-\frac{4\pi}{x}} + 2e^{-\frac{9\pi}{x}} + 2e^{-\frac{16\pi}{x}} + \dots}$$

Soit $x = \frac{K'}{K}$, en mettant au lieu du module k son complément $k' = \sqrt{1-k^2}$, x deviendra $\frac{K}{K'}$. Or on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2K}{\pi}} &= 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \dots \\ &= 1 + 2e^{-\pi x} + 2e^{-4\pi x} + 2e^{-9\pi x} + 2e^{-16\pi x} + \dots\end{aligned}$$

et par suite, en changeant k en k' :

$$\sqrt{\frac{2K'}{\pi}} = 1 + 2e^{-\frac{\pi}{x}} + 2e^{-\frac{4\pi}{x}} + 2e^{-\frac{9\pi}{x}} + 2e^{-\frac{16\pi}{x}} + \dots$$

De là on tire sur le champ la formule de Mr. Poisson.

Nous ferons encore quelques remarques sur la théorie de la transformation. Le module x étant changé e λ par une transformation attachée au nombre n , on aura une équation algébrique entre x et λ dont le degré, relatif à l'une ou l'autre des deux variables, est égal à la somme des facteurs du nombre n . On trouve toutes les valeurs de $\sqrt{\lambda}$ en mettant dans l'équation

$$\sqrt{k} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^{16} + \dots},$$

$q^{\frac{\alpha'}{n}}$ au lieu de q , $\alpha\alpha'$ étant égal au nombre n . Soit

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)]}} = \frac{M \partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-k^2 x^2)]}}$$

l'équation différentielle à laquelle on satisfait par une expression rationnelle de y en x , dans laquelle x monte jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ puissance: on pourra exprimer M rationnellement en x et λ au moyen de la formule générale

$$MM = \frac{n(k-k^3) \partial \lambda}{(\lambda-\lambda^3) \partial x}.$$

Eliminant λ au moyen de l'équation modulaire, on aura une équation du même degré entre k et M . Ces équations entre k et M jouissent d'une propriété remarquable. Savoir, n étant un nombre premier quelconque, on peut exprimer linéairement la moitié des valeurs de $\sqrt{M}$ au moyen de l'autre moitié. En effet si l'on désigne par $M, M', M'', M''', \dots, M^{(n+1)}$ les racines de l'équation du $(n+1)^{\text{ième}}$ degré trouvée entre M et k : on aura

$$\begin{aligned}\sqrt{M} &= V\left((-1)^{\frac{n-1}{2}} n\right) A, \\ \sqrt{M'} &= A + A' + A'' + A''' + \dots + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \\ \sqrt{M''} &= A + \alpha A' + \alpha^2 A'' + \alpha^3 A''' + \dots + \alpha^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \\ \sqrt{M'''} &= A + \beta A' + \beta^2 A'' + \beta^3 A''' + \dots + \beta^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

α , β , etc. étant les racines imaginaires de l'équation $x^n = 1$. Donc on peut exprimer linéairement les racines quarrées des $n+1$ racines par d'autres quantités dont le nombre n'est que $\frac{n+1}{2}$. Cela donne le théorème énoncé, un des plus importants dans la théorie algébrique de la transformation et de la division des fonctions elliptiques. On aura le même théorème par rapport aux équations qui donnent λM , $\lambda' M$, etc. en k . Une équation semblable pour $n=5$, $x = \lambda M$ est

$$x^6 - 10kx^5 + 35k^2x^4 - 60k^3x^3 + 55k^4x^2 - x\{26k^5 + 256(k-k^3)\} + 5k^6 = 0.$$

Si l'on fait $x = y + k$, cette équation se change en cette autre plus simple:

$$y^6 - 4ky^5 - 256(k-k^3)(1+ky) = 0.$$

On pourra satisfaire par l'analyse des fonctions elliptiques à une demande d'Euler à l'égard du théorème de Fermat, que tout nombre entier est la somme de quatre nombres quarrés: savoir de démontrer que la quatrième puissance d'une série

$$A + A'q + A''q^2 + A'''q^3 + A^{IV}q^4 + \dots$$

puisse contenir toutes les puissances de q . En effet je trouve

$$\begin{aligned} \left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 &= \{1 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^{16} + \dots\} = \\ &= 1 + \frac{8q}{1-q} + \frac{16q^2}{1+q^2} + \frac{24q^3}{1-q^3} + \frac{32q^4}{1+q^4} + \dots = \\ &= 1 + \frac{8q}{(1-q)^2} + \frac{8q^2}{(1+q^2)^2} + \frac{8q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{8q^4}{(1+q^4)^2} + \dots = \\ &= 1 + 8 \sum \varphi(p) \{q^p + 3q^{2p} + 3q^{4p} + 3q^{8p} + 3q^{16p} + 3q^{32p} + \dots\}, \end{aligned}$$

p étant un nombre impair quelconque et $\varphi(p)$ la somme des facteurs du nombre p ; formule dont le théorème de Fermat est un corollaire. On tire encore de cette formule et d'autres semblables des théorèmes sur le nombre de toutes les décompositions possibles d'un nombre donné en quatre nombres quarrés. Un théorème semblable a été proposé dans le deuxième cahier p. 191. En examinant avec attention l'algorithme de l'analyse qui conduit à ces résultats remarquables, on parviendra à établir des nouvelles méthodes dans la théorie des nombres.

Les fonctions elliptiques diffèrent essentiellement des transcendentes ordinaires. Elles ont une manière d'être pour ainsi dire absolue. Leur caractère principal est d'embrasser tout ce qu'il y a de périodique dans l'analyse. En effet les fonctions trigonométriques ayant une période réelle,

les exponentielles une période imaginaire, les fonctions elliptiques embrassent les deux cas, puisqu'on a en même temps

$$\sin am(u + 4K) = \sin am(u)$$

$$\sin am(u + 2iK') = \sin am(u),$$

i étant $= \sqrt{-1}$. D'ailleurs on démontre aisément qu'une fonction analytique ne saura avoir plus que deux périodes, l'une réelle et l'autre imaginaire ou l'une et l'autre imaginaires. Ce dernier cas répond à un module k imaginaire. Le quotient $\frac{K'}{K}$ des deux périodes d'une fonction proposée détermine le module k des fonctions elliptiques par lesquelles elle doit être exprimée au moyen des formules 15., 17. Il conviendra peut être à introduire dans l'analyse des fonctions elliptiques ce quotient $\frac{K'}{K}$ comme module au lieu de k . A l'égard de ce quotient j'ai trouvé

„que k ne change pas de valeur, si l'on écrit au lieu de $\frac{K'}{K}$ l'expression

$$\frac{bK + ib'K'}{aK + ia'K'} = \frac{KK' - i(abKK' + a'b'K'K')}{aaKK' + a'a'K'K'},$$

„ a, a', b, b' étant des nombres entiers quelconques, a un nombre impair, b un nombre pair, tels que $ab' - a'b = 1$;”

théorème remarquable et qui doit être envisagé comme un des théorèmes fondamentaux de l'analyse des fonctions elliptiques.

Les méthodes qui m'ont conduit à la théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques s'appliquent également à une classe très étendue d'intégrales doubles, triples, et même d'intégrales multiples d'un ordre quelconque. Un premier essai sur cette matière épineuse a été donné dans un petit mémoire qui a pour titre:

„De singulari quadam duplicis integralis transformatione”
inséré au second volume de votre journal.

Vous voyez, Monsieur, que la théorie des fonctions elliptiques est un vaste objet de recherches qui dans le cours de ses développemens embrassent presque toute l'algèbre, la théorie des intégrales définies et la science des nombres. Quel titre de gloire pour l'illustre auteur du traité des fonctions elliptiques, que d'avoir créé cette belle théorie et d'avoir allumé ce flambeau à la postérité.

28.

Demonstratio duarum celeberrimi Gaussii propositionum.

(Disqu. arithm. p. 17.)

(Auct. *Th. Clausen.*)

Denotent (α) , (α, β) , (α, β, γ) , etc. quantitates, quae ita a se invicem pendent:

$$(\alpha) = \alpha,$$

$$(\alpha, \beta) = \beta(\alpha) + 1,$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \gamma(\alpha, \beta) + (\alpha),$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \delta(\alpha, \beta, \gamma) + (\alpha, \beta), \text{ etc.}$$

ubi lex progressionis obvia est. Nunc dico, si fuerit:

$$(1.) (\alpha, \beta \dots \lambda, \mu)(\beta, \gamma \dots \kappa, \lambda) - (\alpha, \beta \dots \kappa, \lambda)(\beta, \gamma \dots \lambda, \mu) = \pm 1,$$

fore etiam

$$(\alpha, \beta \dots \mu, \nu)(\beta, \gamma \dots \lambda, \mu) - (\alpha, \beta \dots \lambda, \mu)(\beta, \gamma \dots \mu, \nu) = \mp 1;$$

in qua serie numerus quantitatum $\alpha, \beta \dots$ unitate auctus est. Habemus enim:

$$(\alpha, \beta \dots \mu, \nu) = \nu(\alpha, \beta \dots \lambda, \mu) + (\alpha, \beta \dots \kappa, \lambda),$$

$$(\beta, \gamma \dots \mu, \nu) = \nu(\beta, \gamma \dots \lambda, \mu) + (\beta, \gamma \dots \iota, \kappa),$$

quibus valoribus in aequationem posteriorem substitutis, aequatio (1.) statim sequitur. Nunc vero, cum sit:

$$(\alpha, \beta, \gamma)\beta - (\alpha, \beta)(\beta, \gamma) = (\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma)\beta - (\alpha\beta + 1)(\beta\gamma + 1) = -1;$$

vel cum aequatio (1.) valeat pro numero quantitatum $\alpha, \beta \dots 3$; sequitur illam etiam pro numero 4, omnibusque ulterioribus valere, sumto signo superiore, quando ille est par, inferiore vero quando est impar.

$$\text{Cum sit: } (\alpha, \beta \dots \kappa, \lambda) = \lambda(\alpha, \beta \dots \iota, \kappa) + (\alpha, \beta \dots \theta, \iota),$$

$$(\tau, \sigma \dots \mu, \lambda) = \lambda(\tau, \sigma \dots \nu, \mu) + (\tau, \sigma \dots \xi, \nu),$$

$$\text{erit: } (\tau, \sigma \dots \nu, \mu)(\alpha, \beta \dots \kappa, \lambda) + (\tau, \sigma \dots \xi, \nu)(\alpha, \beta \dots \iota, \kappa)$$

$$= (\tau, \sigma \dots \mu, \lambda)(\alpha, \beta \dots \iota, \kappa) + (\tau, \sigma \dots \nu, \mu)(\alpha, \beta \dots \theta, \iota);$$

si enim aequatio prior in partem aequationis primam, posterior in secundam substituantur, aequatio fit identica. Eodem modo habetur: pars posterior aequationis

$$= (\tau, \sigma \dots \lambda, \kappa)(\alpha, \beta \dots \theta, \iota) + (\tau, \sigma \dots \mu, \lambda)(\alpha, \beta \dots \eta, \theta);$$

unde concludere licet:

$$(\tau, \sigma)(\alpha, \beta \dots \pi, \rho) + (\tau)(\alpha, \beta \dots \sigma, \pi) = (\tau, \sigma \dots \delta, \gamma)(\alpha, \beta) + (\tau, \sigma \dots \varepsilon, \delta)(\alpha), \text{ vel}$$

$$\tau\sigma(\alpha, \beta \dots \pi, \rho) + \tau(\alpha, \beta \dots \sigma, \pi) + \alpha, \beta \dots \pi, \rho = (\alpha\beta(\tau, \sigma \dots \delta, \gamma) + \alpha(\tau, \sigma \dots \varepsilon, \delta) + (\tau, \sigma \dots \delta, \gamma));$$

$$\tau(\alpha, \beta \dots \rho, \sigma) + (\alpha, \beta \dots \pi, \rho) = \alpha(\tau, \sigma \dots \gamma, \beta) + (\tau, \sigma \dots \delta, \gamma); \text{ vel denique}$$

$$(2.) (\alpha, \beta \dots \sigma, \tau) = (\tau, \sigma \dots \beta, \alpha).$$

29.

Lehrsatz. (Zu beweisen.)(Von Herrn Dr. *Hellerung* zu Wismar.)

Ein Kegelschnitt und eine Gerade liegen in Einer Ebene. In der Geraden nehme man eine ungerade Anzahl von Punkten, und bezeichne sie in willkürlicher Ordnung durch $1, 2, 3 \dots 2m + 1$. Sieht man nun diese Punkte als Durchschnittspunkte der gegenüber liegenden Seiten einer in den Kegelschnitt, übrigens willkürlich zu beschreibenden Figur an; so werden die $4m + 2$ Seiten derselben sich zwar meistens kreuzen, aber die Figur wird stets eine geschlossene sein.

Nemlich durch den Punct 1 zieht man willkürlich eine erste Gerade, welche den Kegelschnitt zweimal schneidet; durch einen dieser Durchschnitte und den Punct 2 zieht man die zweite Gerade; durch den noch freien Durchschnitt dieser zweiten und den Punct 3 die dritte; u. s. w. durch den noch freien Durchschnitt der $2m$ ten Geraden und den Punct $2m + 1$ die $2m + 1$ te Gerade. Alsdann durch den freien Durchschnitt dieser Geraden und den Punct 1 die $2m + 2$ te Gerade u. s. w. in derselben Ordnung der Punkte. Wenn man nun zuletzt durch den noch freien Durchschnitt der $4m + 1$ ten Geraden und den Punct $2m + 1$ die $4m + 2$ te Gerade zieht; so muß diese allemal durch den noch freien Durchschnitt der ersten Geraden gehn, und so die Figur schliessen.

Mehrere Lehrsätze und Aufgaben bleiben diesesmal wegen Mangel an Raum zurück.

30.

Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes.

(Par Mr. N. H. Abel de Christiania.)

1.

Si ψx désigne la fonction elliptique la plus générale, c'est-à-dire si

$$\psi x = \int \frac{r \cdot \partial x}{\sqrt{R}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x , et R une fonction entière de la même variable, qui ne passe pas le quatrième degré, cette fonction a comme on sait la propriété très remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de ces fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même forme, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique.

Il semble que dans la théorie des fonctions transcendantes les géomètres se sont bornés aux fonctions de cette forme. Cependant il existe encore pour une classe très étendue d'autres fonctions une propriété analogue à celle des fonctions elliptiques.

Je veux parler des fonctions qui peuvent être regardées comme intégrales de différentielles algébriques quelconques. Si l'on ne peut pas exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions données, par une seule fonction de la même espèce, comme dans le cas des fonctions elliptiques, au moins on pourra exprimer dans tous les cas une pareille somme par la somme d'un nombre déterminé d'autres fonctions de la même nature que les premières, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique *). Nous démontrerons cette propriété dans l'un des cahiers suivans de ce journal. Pour le moment je vais considérer un cas particulier, qui embrasse en même tems les fonctions elliptiques, savoir les fonctions contenues dans la formule

$$1. \quad \psi x = \int \frac{r \cdot \partial x}{\sqrt{R}},$$

*) J'ai présenté un mémoire sur ces fonctions à l'académie royale des sciences de Paris vers la fin de l'année 1826.

R étant une fonction rationnelle et entière quelconque, et r une fonction rationnelle.

2.

Nous allons d'abord établir le théorème suivant:

Théorème I. Soit φx une fonction entière de x , décomposée d'une manière quelconque en deux facteurs entiers $\varphi_1 x$ et $\varphi_2 x$, ensorte que $\varphi x = \varphi_1 x \cdot \varphi_2 x$. Soit $f x$ une autre fonction entière quelconque et

$$2. \psi x = \int \frac{f x \partial x}{(x-\alpha) \mathcal{V}(\varphi x)},$$

où α est une quantité constante quelconque. Désignons par $a_0, a_1, a_2, \dots; c_0, c_1, c_2, \dots$ des quantités quelconques dont l'une au moins soit variable. Cela posé, si l'on fait

$$3. \left\{ (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)^2 \cdot \varphi_1 x - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m)^2 \cdot \varphi_2 x \right. \\ \left. = A \cdot (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_\mu), \right.$$

où A ne dépend pas de x , je dis qu'on aura

$$4. \varepsilon_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 \psi x_3 + \dots + \varepsilon_\mu \psi x_\mu \\ = \frac{f \alpha}{\mathcal{V} \varphi \alpha} \cdot \log \left\{ \frac{(a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n) \mathcal{V}(\varphi_1 \alpha) + (c_0 + c_1 \alpha + \dots + c_m \alpha^m) \mathcal{V}(\varphi_2 \alpha)}{(a_0 + a_1 \alpha + \dots + a_n \alpha^n) \mathcal{V}(\varphi_1 \alpha) - (c_0 + c_1 \alpha + \dots + c_m \alpha^m) \mathcal{V}(\varphi_2 \alpha)} \right\} + r + C,$$

où C est une quantité constante et r le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{f x}{(x-\alpha) \mathcal{V} \varphi x} \cdot \log \left\{ \frac{(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \mathcal{V}(\varphi_1 x) + (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) \mathcal{V}(\varphi_2 x)}{(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \mathcal{V}(\varphi_1 x) - (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) \mathcal{V}(\varphi_2 x)} \right\},$$

suivant les puissances descendantes de x . Les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\mu$ sont égales à $+1$ ou à -1 , et leurs valeurs dépendent de celles des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$.

Désignons le premier membre de l'équation (3.) par $F x$ et faisons pour abréger:

$$5. \begin{cases} \theta x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \\ \theta_1 x = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m, \end{cases}$$

nous aurons

$$6. F x = (\theta x)^2 \cdot \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \cdot \varphi_2 x.$$

Cela posé, soit x une quelconque des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, on aura l'équation

$$7. F x = 0.$$

De là, en différentiant, on tire

$$8. F' x \cdot \partial x + \delta F x = 0,$$

en désignant par $F'x$ la dérivée de Fx par rapport à x , et par δFx la différentielle de la même fonction par rapport aux quantités $a_0, a_1, a_2, \dots; c_0, c_1, c_2, \dots$. Or en remarquant que φ_1x et φ_2x sont indépendants de ces dernières variables, l'équation donnera:

$$9. \delta Fx = 2\theta x \cdot \varphi_1x \cdot \delta\theta x - 2\theta_1x \cdot \varphi_2x \cdot \delta\theta_1x,$$

donc en vertu de (8.)

$$10. F'x \cdot \partial x = 2\theta_1x \cdot \varphi_2x \cdot \delta\theta_1x - 2\theta x \cdot \varphi_1x \cdot \delta\theta x.$$

Maintenant ayant $Fx = 0 = (\theta x)^2 \cdot \varphi_1x - (\theta_1x)^2 \cdot \varphi_2x$, on en tire:

$$11. \theta x \cdot \sqrt{\varphi_1x} = \varepsilon \theta_1x \cdot \sqrt{\varphi_2x},$$

où $\varepsilon = \pm 1$. De là vient

$$\theta x \cdot \varphi_1x = \varepsilon \theta_1x \cdot \sqrt{(\varphi_1x \cdot \varphi_2x)} = \varepsilon \theta_1x \cdot \sqrt{(\varphi x)},$$

$$\theta_1x \cdot \varphi_2x = \varepsilon \theta x \cdot \sqrt{(\varphi_2x \cdot \varphi_1x)} = \varepsilon \theta x \cdot \sqrt{(\varphi x)},$$

donc l'expression de $F'x \cdot \partial x$ pourra être mise sous la forme

$$12. F'x \cdot \partial x = 2\varepsilon \cdot \{\theta x \cdot \delta\theta_1x - \theta_1x \cdot \delta\theta x\} \cdot \sqrt{(\varphi x)}.$$

Cela donne, en multipliant par $\varepsilon \cdot \frac{fx}{\sqrt{(\varphi x)}} \cdot \frac{1}{F'x} \cdot \frac{1}{x-\alpha}$:

$$13. \varepsilon \cdot \frac{fx \cdot \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \frac{fx \cdot (2\theta x \cdot \delta\theta_1x - 2\theta_1x \cdot \delta\theta x)}{(x-\alpha)F'x}.$$

En faisant pour abrégier

$$14'. \lambda(x) = 2fx(\theta x \cdot \delta\theta_1x - \theta_1x \cdot \delta\theta x),$$

il viendra:

$$14. \varepsilon \cdot \frac{fy \cdot \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x},$$

où λx sera une fonction entière par rapport à x .

Désignons par $\Sigma \Gamma x$ la quantité

$$\Gamma x_1 + \Gamma x_2 + \Gamma x_3 + \dots + \Gamma x_\mu,$$

et remarquons que l'équation (14.) subsiste encore en mettant l'une quelconque des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ au lieu de x , cette équation donnera

$$15. \Sigma \varepsilon \cdot \frac{fx \cdot \partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = \Sigma \frac{\lambda x}{(x-\alpha)F'x} = \delta v.$$

Cela posé, on pourra chasser sans difficulté les quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ du second membre.

En effet, quelle que soit la fonction entière λx , on peut supposer

$$\lambda x = (x-\alpha) \cdot \lambda_1x + \lambda \alpha,$$

où λ_1x est une fonction entière de x , savoir $\frac{\lambda x - \lambda \alpha}{x - \alpha}$. En substituant cette valeur dans (15.), il viendra

$$16'. \delta v = \Sigma \frac{\lambda_1x}{F'x} + \lambda \alpha \cdot \Sigma \frac{1}{(x-\alpha)F'x}.$$

Maintenant d'après une formule connue on aura

$$17. \quad \sum \frac{1}{(x-\alpha)F'x} = -\frac{1}{F\alpha},$$

ayant égard que

$$F\alpha = A(\alpha-x_1)(\alpha-x_2)\dots(\alpha-x_\mu),$$

donc

$$18. \quad \delta v = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \sum \frac{\lambda_1 x}{F'x}.$$

Il reste à trouver $\sum \frac{\lambda_1 x}{F'x}$. Or cela peut se faire à l'aide de la formule (17.). En effet en développant $\frac{1}{\alpha-x}$ selon les puissances descendantes de α , il viendra

$$19. \quad \frac{1}{F\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \sum \frac{1}{F'x} + \frac{1}{\alpha^2} \cdot \sum \frac{1}{F'x} + \dots + \frac{1}{\alpha^{k+1}} \cdot \sum \frac{x^k}{F'x} + \dots$$

d'où l'on voit que $\sum \frac{x^k}{F'x}$ est égal au coefficient de $\frac{1}{\alpha^{k+1}}$ dans le développement de $\frac{1}{F\alpha}$, ou bien à celui de $\frac{1}{\alpha}$ dans le développement de $\frac{\alpha^k}{F\alpha}$. De là on voit aisément que $\sum \frac{\lambda_1 x}{F'x}$, où $\lambda_1 x$ est une fonction quelconque entière de x , sera égal au coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de la fonction $\frac{\lambda_1 x}{Fx}$ selon les puissances ascendantes de $\frac{1}{x}$. Si pour abréger on désigne ce coefficient compris dans une fonction quelconque r développable de cette manière par Πr , on aura:

$$20. \quad \sum \frac{\lambda_1 x}{F'x} = \Pi \frac{\lambda_1 x}{Fx}.$$

Or la formule (16.), en divisant par $Fx.(x-\alpha)$, donne

$$21. \quad \Pi \cdot \frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx} = \Pi \frac{\lambda_1 x}{Fx},$$

en remarquant que $\Pi \frac{\lambda\alpha}{(x-\alpha)Fx}$ est toujours égal à zéro. Donc l'expression (16.) de δv deviendra

$$22. \quad \delta v = -\frac{\lambda\alpha}{F\alpha} + \Pi \frac{\lambda x}{(x-\alpha)Fx}.$$

Maintenant on a (14'.)

$$\lambda x = 2fx \cdot \{\theta x \cdot \delta \theta_1 x - \theta_1 x \cdot \delta \theta x\},$$

donc en mettant λ au lieu de x ,

$$\lambda\alpha = 2f\alpha \{\theta\alpha \cdot \delta \theta_1 \alpha - \theta_1 \alpha \cdot \delta \theta \alpha\}.$$

En vertu de cette expression et en substituant pour Fx sa valeur $(\theta\alpha)^2 \cdot \varphi_1 \alpha - (\theta_1 \alpha)^2 \cdot \varphi_2 \alpha$, on obtiendra

$$\partial v = -\frac{2f\alpha.(\theta\alpha.\delta\theta_1\alpha - \theta_1\alpha.\delta\theta\alpha)}{(\theta\alpha)^2.\varphi_1\alpha - (\theta_1\alpha)^2.\varphi_2\alpha} + \Pi \frac{2fx}{x-\alpha} \cdot \frac{\theta x.\delta\theta_1x - \theta_1x.\delta\theta x}{(\theta x)^2.\varphi_1x - (\theta_1x)^2.\varphi_2x}.$$

On trouvera aisément l'intégrale de cette expression; car en remarquant que $f\alpha$, $\varphi_1\alpha$, $\varphi_2\alpha$, fx , $x-\alpha$, φ_1x , φ_2x sont des quantités constantes, on aura en vertu de la formule

$$\int \frac{p\partial q - q\partial p}{p^2m - q^2n} = \frac{1}{2\sqrt{(m.n)}} \log \left\{ \frac{p\sqrt{m} + q\sqrt{n}}{p\sqrt{m} - q\sqrt{n}} \right\};$$

$$23. \quad v = C - \frac{f\alpha}{\sqrt{(\varphi\alpha)}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)} + \theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)} - \theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}} \right\}$$

$$+ \Pi \frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta x.\sqrt{(\varphi_1x)} + \theta_1x.\sqrt{(\varphi_2x)}}{\theta x.\sqrt{(\varphi_1x)} - \theta_1x.\sqrt{(\varphi_2x)}} \right\}.$$

Or l'équation (15.) donne

$$\sum \varepsilon \int \frac{fx.\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} = v,$$

donc en faisant

$$24. \quad \psi(x) = \int \frac{fx.\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}}$$

et désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\mu$ des quantités de la forme ± 1 , on aura la formule

$$25. \quad \begin{cases} \varepsilon_1\psi x_1 + \varepsilon_2\psi x_2 + \varepsilon_3\psi x_3 + \dots + \varepsilon_\mu\psi x_\mu = \\ C - \frac{f\alpha}{\sqrt{\varphi\alpha}} \log \left\{ \frac{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)} + \theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}}{\theta\alpha.\sqrt{(\varphi_1\alpha)} - \theta_1\alpha.\sqrt{(\varphi_2\alpha)}} \right\} \\ + \Pi \frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} \log \left\{ \frac{\theta x.\sqrt{(\varphi_1x)} + \theta_1x.\sqrt{(\varphi_2x)}}{\theta x.\sqrt{(\varphi_1x)} - \theta_1x.\sqrt{(\varphi_2x)}} \right\}, \end{cases}$$

qui s'accorde parfaitement avec la formule (4.).

Les valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\mu$ ne sont pas arbitraires, elles dépendent de la grandeur de $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ et celle-ci est déterminée par l'équation

$$\theta x.\sqrt{(\varphi_1x)} = \varepsilon\theta_1x\sqrt{(\varphi_2x)},$$

équivalente aux équations

$$26. \quad \theta x_1.\sqrt{(\varphi_1x_1)} = \varepsilon_1.\theta_1x_1.\sqrt{(\varphi_2x_1)}; \quad \theta x_2.\sqrt{(\varphi_1x_2)} = \varepsilon_2.\theta_1x_2.\sqrt{(\varphi_2x_2)}; \dots$$

$$\theta x_\mu.\sqrt{(\varphi_1x_\mu)} = \varepsilon_\mu.\theta_1x_\mu.\sqrt{(\varphi_2x_\mu)}.$$

D'ailleurs les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\mu$ conserveront les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, comprises dans certaines limites. Il en sera de même de la constante C .

3.

La démonstration précédente suppose toutes les quantités $x_1, x^2, \dots, x_\mu$, différentes entre-elles, car dans le cas contraire $F'x$ seroit égal à zéro pour un certain nombre de valeurs de x , et alors le second mem-

bre de la formule (14.) se présenteroit sous la forme $\frac{0}{0}$. Néanmoins il est évident, que la formule (25.) subsistera encors dans le cas même, ou plusieurs des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ sont égales entre-elles.

En faisant $x_2 = x_1$, on aura (26.)

$$\theta x_1 \cdot \sqrt{(\varphi_1 x_1)} = \varepsilon_1 \theta_1 x_1 \sqrt{(\varphi_2 x_1)} = \varepsilon_2 \theta_1 x_1 \sqrt{(\varphi_2 x_1)},$$

et cela donne, en supposant que $\theta_1 x \varphi_2 x$ et $\theta x \cdot \varphi_1 x$ n'aient pas de diviseur commun :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1.$$

En vertu de cette remarque on aura le théorème suivant :

Théorème II. Si l'on fait

27. $(\theta x)^2 \cdot \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \cdot \varphi_2 x = A \cdot (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_\mu)^{m_\mu}$,
où les fonctions entières $\theta x \cdot \varphi_1 x$ et $\theta_1 x \cdot \varphi_2 x$ n'ont pas de diviseur commun, on aura :

$$28. \begin{cases} \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \varepsilon_3 m_3 \psi x_3 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = \\ C - \frac{f\alpha}{\sqrt{(\varphi\alpha)}} \log \left\{ \frac{\theta\alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1\alpha)} + \theta_1\alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2\alpha)}}{\theta\alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1\alpha)} - \theta_1\alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2\alpha)}} \right\} \\ + \Pi \frac{fx}{(x-\alpha)\sqrt{(\varphi x)}} \log \left\{ \frac{\theta x \cdot \sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x \cdot \sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x \cdot \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x \cdot \sqrt{(\varphi_2 x)}} \right\}. \end{cases}$$

4.

Si l'on suppose fx divisible par $x - \alpha$, on aura $f\alpha = 0$, donc en mettant $fx \cdot (x - \alpha)$ au lieu de fx , il viendra :

Théorème III. Les choses étant supposées les mêmes que dans le 2. Théorème, si l'on fait

$$\psi x = \int \frac{fx \cdot \partial x}{\sqrt{(\varphi x)}},$$

où fx est une fonction entière quelconque, on aura

$$29. \begin{aligned} & \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &= C + \Pi \frac{fx}{\sqrt{(\varphi x)}} \log \cdot \left\{ \frac{\theta x \cdot \sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x \sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x \cdot \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x \sqrt{(\varphi_2 x)}} \right\}. \end{aligned}$$

5.

Si dans la formule ci-dessus on suppose le degré de la fonction entière $f(x)$ moindre que la moitié de celui de φx , il est clair que la partie du second membre affecté du signe Π , s'évanouira. Donc on aura ce théorème :

Théorème IV. Si le degré de la fonction entière $(fx)^2$ est moindre que celui de φx , et qu'on fait

$$\psi x = \int \frac{fx \cdot \partial x}{(x-\alpha) \sqrt{(\varphi x)}};$$

on aura

$$\begin{aligned} 30. \quad & \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &= C - \frac{f\alpha}{\sqrt{(\varphi \alpha)}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} + \theta_1 \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}}{\theta \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} - \theta_1 \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}} \right\}. \end{aligned}$$

6.

En faisant $f\alpha = 1$ dans le théorème précédent et différentiant $k-1$ fois de suite, on aura le théorème suivant

Théorème V. Si l'on fait

$$\psi x = \int \frac{\partial x}{(x-\alpha)^k \sqrt{(\varphi x)}},$$

on aura

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu \\ &= C - \frac{1}{1.2 \dots (k-1)} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial \alpha^{k-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\varphi \alpha)}} \cdot \log \left\{ \frac{\theta \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} + \theta_1 \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}}{\theta \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_1 \alpha)} - \theta_1 \alpha \cdot \sqrt{(\varphi_2 \alpha)}} \right\}. \end{aligned}$$

7.

Si dans le théorème III. on suppose le degré de $(fx)^2$ moindre que celui de φx , le second membre se réduit à une constante. Cela donne aisément le théorème qui suit:

Théorème VI. Si l'on désigne par ψx la fonction

$$\int \frac{(\delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \dots + \delta_{v'} x^{v'}) \partial x}{\sqrt{(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_v x^v)}},$$

où $v' = \frac{v-1}{2} - 1$, si v est impair, et $v' = \frac{v}{2} - 2$ si v est pair, on aura toujours:

31. $\varepsilon_1 m_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 m_2 \psi(x_2) + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi(x_\mu) =$ à une constante. On voit que v' a la même valeur pour $v = 2m - 1$ et pour $v = 2m$, savoir $v' = m - 2$.

8.

Soit maintenant

$$\psi x = \int \frac{r \partial x}{\sqrt{(\varphi x)}},$$

où r est une fonction rationnelle quelconque de x . Quelle que soit la forme de r , on pourra toujours faire

$$32. \quad r = fx + \frac{f_1 x}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{f_2 x}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \dots + \frac{f_\omega x_\omega}{(x-\alpha_\omega)^{k_\omega}},$$

où $fx, f_1 x, f_2 x, \dots, f_\omega x$ sont des fonctions entières. Cela posé, il est clair qu'en vertu des théorèmes III. et V. on aura le suivant:

Théorème VII. Quelle que soit la fonction rationnelle r , exprimée par la formule (32.), en faisant

$$33. \psi x = \frac{\int r \frac{\partial x}{\sqrt{(\varphi x)}}}{\sqrt{(\varphi x)}} \text{ et } \frac{\theta x \cdot \sqrt{(\varphi_1 x)} + \theta_1 x \cdot \sqrt{(\varphi_2 x)}}{\theta x \cdot \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x \cdot \sqrt{(\varphi_2 x)}} = \chi x:$$

on aura toujours:

$$34. \begin{cases} \varepsilon_1 m_1 \psi x_1 + \varepsilon_2 m_2 \psi x_2 + \dots + \varepsilon_\mu m_\mu \psi x_\mu = C + \Pi \frac{r}{\sqrt{(\varphi x)}} \log \chi(x) \\ -\frac{1}{\Gamma k_1} \cdot \frac{\partial^{k_1-1}}{\partial \alpha_1^{k_1-1}} \cdot \frac{f_1 \alpha_1}{\sqrt{(\varphi \alpha_1)}} \log \chi \alpha_1 - \frac{1}{\Gamma k_2} \cdot \frac{\partial^{k_2-1}}{\partial \alpha_2^{k_2-1}} \cdot \frac{f_2 \alpha_2}{\sqrt{(\varphi \alpha_2)}} \log \chi \alpha_2 - \dots \\ -\frac{1}{\Gamma k_\omega} \cdot \frac{\partial^{k_\omega-1}}{\partial \alpha_\omega^{k_\omega-1}} \cdot \frac{f_\omega \alpha_\omega}{\sqrt{(\varphi \alpha_\omega)}} \log \chi \alpha_\omega, \end{cases}$$

en représentant par $\Gamma(k)$ le produit $1.2.3.\dots(k-1)$.

9.

Précédemment nous avons considéré les quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ comme des fonctions de $a_0, a_1, a_2, \dots, c_0, c_1, c_2, \dots$. Supposons maintenant qu'un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ soient données et regardées comme des variables indépendantes; et soient $x_1, x_2, \dots, x_{\mu'}$ ces quantités. Alors il faut déterminer $a_0, a_1, \dots, c_0, c_1, \dots$ de manière que le premier membre de l'équation (3.) soit divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_\mu).$$

Cela se fera à l'aide des équations (26.). Les μ' premières équations

$$\theta x_1 \cdot \sqrt{(\varphi_1 x_1)} = \varepsilon_1 \cdot \theta_1 x_1 \cdot \sqrt{(\varphi_2 x_1)},$$

$$\theta x_2 \cdot \sqrt{(\varphi_1 x_2)} = \varepsilon_2 \cdot \theta_1 x_2 \cdot \sqrt{(\varphi_2 x_2)},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\theta x_{\mu'} \cdot \sqrt{(\varphi_1 x_{\mu'})} = \varepsilon_{\mu'} \cdot \theta_1 x_{\mu'} \cdot \sqrt{(\varphi_2 x_{\mu'})}$$

donneront un nombre μ' des quantités $a_0, a_1, \dots, c_0, c_1, \dots$ exprimées en fonctions rationnelles des autres et de $x_1, x_2, \dots, x_{\mu'}$; $\sqrt{(\varphi x_1)}, \sqrt{(\varphi x_2)}, \dots, \sqrt{(\varphi x_{\mu'})}$.

Le nombre des indéterminées $a_0, a_1, \dots, a_n, c_0, c_1, \dots, c_m$ est égal à $m+n+1$; donc, comme il est aisé de voir par la forme des équations (35.), on pourra faire $\mu' = m+n+1$. Cela posé, en substituant les valeurs de $a_0, a_1, \dots, c_0, c_1, \dots$ dans les fonctions $\theta x, \theta_1 x, \dots$, la fonction entière $(\theta x)^2 \cdot \varphi_1 x - (\theta_1 x)^2 \cdot \varphi_2 x$ deviendra divisible par

$$(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_\mu).$$

Désignant le quotient par R , on aura

$$36. R = A(x-x_{\mu'+1})(x-x_{\mu'+2}) \dots (x-x_\mu).$$

Donc les $\mu - \mu'$ quantités $x_{\mu'+1}, x_{\mu'+2}, \dots, x_\mu$, seront les racines d'une

équation $R=0$ de degré $\mu-\mu'$, dont tous les coefficients sont exprimés rationnellement par les quantités $x_1, x_2, x_3, \dots x_{\mu'}$; $\sqrt{(\varphi x_1)}, \sqrt{(\varphi x_2)}, \dots \sqrt{(\varphi x_{\mu'})}$.

Faisons

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = \varepsilon_{\mu} = 1, \\ \varepsilon_{\mu_1+1} &= \varepsilon_{\mu_1+2} = \dots = \varepsilon_{\mu'} = -1, \\ x_{\mu_1+1} &= x'_1, \quad x_{\mu_1+2} = x'_1, \quad \dots \quad x_{\mu'} = x'_{\mu_2}, \\ x_{\mu'+1} &= y_1, \quad x_{\mu'+2} = y_2, \quad \dots \quad x_{\mu} = y_{\nu'},\end{aligned}$$

on aura, en désignant par $\psi(x)$ la fonction $\int \frac{x \partial x}{V(\varphi x)}$,

$$37. \quad \begin{cases} \psi x_2 + \psi x_2 + \dots + \psi x_{\mu_1} - \psi x'_1 - \psi x'_2 - \dots - \psi x'_{\mu_2} \\ = v - \psi y_1 - \psi y_2 - \psi y_3 - \dots - \psi y_{\nu'}, \end{cases}$$

où v est une expression algébrique et logarithmique. Les quantités $x_1, x_2, \dots x_{\mu_1}$; $x'_1, x'_2, \dots x'_{\mu_2}$ sont des quantités variables quelconques, et $y_1, y_2, \dots y_{\nu'}$ seront déterminables à l'aide d'une équation du degré ν' .

Maintenant nous verrons qu'on pourra toujours rendre ν' indépendant du nombre $\mu_1 + \mu_2$ des fonctions données. En effet cherchons la plus petite valeur de ν' .

En supposant indéterminées toutes les quantités $a_0, a_1, \dots c_0, c_1, \dots$, il est clair que μ sera égal à l'un des deux nombres $2n + \nu_1$ et $2m + \nu_2$, où ν_1 et ν_2 représentent les degrés des fonctions $\varphi_1 x, \varphi_2 x$. Soit p. ex.

$$\mu = 2n + \nu_1,$$

on doit avoir en même tems:

$$\mu \geq 2m + \nu_2,$$

d'où, en ajoutant, on tire

$$\mu \geq m + n + \frac{\nu_1 + \nu_2}{2},$$

ou

$$\nu' = \mu - \mu' = \mu - m - n - 1,$$

donc

$$\nu' \geq \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - 1,$$

ou bien, désignans le degré de φx par ν ,

$$38. \quad \nu' \geq \frac{\nu}{2} - 1.$$

De là on voit, que la plus petite valeur de ν' est $\frac{\nu-1}{2}$ ou $\frac{\nu}{2} - 1$, selon que ν est impair ou pair.

Donc cette valeur est indépendante du nombre $\mu_1 + \mu_2$ des fonctions données; elle est précisément la même que le nombre total des

11.

La formule (39.) a lieu si plusieurs des quantités $x_1, x_2, \dots, x'_1, x'_2, \dots$ sont égales entre elles, mais dans ce cas les équations (40.) ne suffisent plus pour déterminer les quantités $a_0, a_1, \dots, c_0, c_1, \dots$; car si p. ex. $x_1 = x_2 = \dots = x_k$, les k premières des équations (40.) deviendront identiques. Pour avoir les équations nécessaires dans ce cas, soit pour abréger

$$\theta x. \sqrt{(\varphi_1 x)} - \theta_1 x. \sqrt{(\varphi_2 x)} = \lambda x.$$

L'expression $\frac{\lambda x}{(x - x_1)^{k+1}}$ doit avoir une valeur finie en faisant $x = x_1$. De

là on tire d'après les principes du calcul différentiel, les k équations

$$42. \quad \lambda x_1 = 0; \quad \lambda' x_1 = 0; \quad \lambda'' x_1 = 0; \quad \dots \quad \lambda^{(k-1)} x_1 = 0,$$

et ce sont elles, qu'il faut substituer à la place des équations

$$\lambda x = 0, \quad \lambda x_2 = 0, \quad \dots \quad \lambda x_k = 0,$$

dans le cas où $x_1 = x_2 = \dots = x_k$.

31.

Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche
in einem gegebenen Punkte.

(Von Herrn Dr. Plücker zu Bonn.)

1. In die Reihe der zierlichsten Resultate, zu welchen die allgemeinen Untersuchungen über krumme Oberflächen geführt haben, gehört unstreitig auch der von Euler zuerst bemerkte Satz, daß jede Fläche in jedem ihrer Punkte nur zwei Krümmungen hat, und die Richtungen dieser beiden Krümmungen auf einander senkrecht stehen. Daß dieser Satz allen möglichen continuirlichen, d. h. durch eine Gleichung darstellbaren Flächen zukommt, beruht offenbar darauf, daß ein Element einer solchen Fläche im Allgemeinen als ein Element einer Fläche zweiter Ordnung in allen denjenigen Beziehungen anzusehen ist, wo in der analytischen Entwicklung nicht höhere Differential-Coefficienten, als die der zweiten Ordnung, in Betracht kommen, oder mit andern Worten, wo wir auf der Fläche nach jeder Richtung hin nur drei auf einander folgende Punkte, oder, was dasselbe heißt, nur zwei geradlinige Elemente berücksichtigen. Zugleich erblickt man aber auch auf diese Weise, daß der Eulersche Satz für gewisse Punkte seine Anwendung verliert, nemlich für solche Punkte, in welchen die Berührungs-Ebene mit der Fläche einen Contact höherer Ordnung hat, wobei zugleich mit den ersten Differential-Coefficienten (bei gehöriger Coordinaten-Bestimmung) auch die zweiten verschwinden. Alsdann kann man aber noch immer nach den Krümmungsrichtungen der Fläche, d. h. nach denjenigen Richtungen fragen, nach welchen man zu Punkten der Fläche kommt, in denen die Normalen der Normale im Berührungs-Punkte begegnen. Die Absicht dieses Aufsatzes geht nun eines Theils dahin, den Eulerschen Satz in sofern zu vervollständigen, daß jene Krümmungsrichtungen bestimmt und geometrische Beziehungen derselben nachgewiesen werden sollen.

Ferner hat Euler ebenfalls zuerst gezeigt, daß, wenn man durch einen gegebenen Punkt irgend einer Fläche nach allen beliebigen Richtungen Normalebenen legt, von allen, auf diese Weise auf der Fläche be-

stimmten Durchschnittscurven, diejenigen in dem gegebenen Puncte ein Maximum oder Minimum der Krümmung haben, welche in den beiden, die Krümmungsrichtungen der Fläche enthaltenen Normalebenen sich befinden; und daß, wenn die Krümmungen nach diesen zwei Richtungen bekannt sind, sogleich sich die Krümmung nach jeder beliebigen dritten Richtung bestimmen läßt. Für die in dem Obigen schon bezeichneten Puncte ist, nach dem gewöhnlichen Ausdrucke, die Krümmung nach allen Richtungen hin Null, d. h. der Osculations-Kreis und überhaupt jede Osculations-Linie zweiter Ordnung geht in eine gerade Linie über. Aber nichts desto weniger lassen sich die nach verschiedenen Richtungen genommenen Krümmungen in solchen Puncten unter einander vergleichen, und für das Maass solcher Krümmungen können wir allgemein den reciproken Werth des Parameters p einer Parabel der n Ordnung

$$(1.2....n)p y = x^n$$

nehmen, wenn der Contact von der $(n-1)$ Ordnung ist. Wir können also auch nach einem Maximum oder Minimum der Krümmung fragen und uns die Aufgabe stellen, die Krümmung nach einer beliebigen Richtung zu bestimmen, wenn dieselbe nach gewissen Richtungen schon bekannt ist.

2. Es sei, in der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten,

$$(1.) u = \varphi(f, y, z) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche. Zugleich sei der auf der Fläche gegebene Punct zum Anfangspuncte der Coordinaten und die Tangentialebene in diesem Puncte zur Ebene der x, y genommen, wonach also die Normale, Axe der z wird. Die Normale in irgend einem andern Puncte der Fläche, dessen Coordinaten x, y und z sind, hat, auf die Tangentialebene projicirt, folgende Gleichung:

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x),$$

indem wir Y und X als die eigentlichen veränderlichen Grössen (*coordonnées courantes*) betrachten und $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ aus (1.) in der Voraussetzung herleiten, daß z constant sei. Soll die Normale der Axe z begegnen, so muß offenbar ihre Projection durch den Anfangspunct gehen. Hiernach erhalten wir folgende Bedingungsleichung:

$$(2.) y + \frac{dx}{dy}x = 0.$$

Diese Gleichung stellt, indem wir x , y und z als veränderliche Größen betrachten, eine Fläche dar, deren Durchschnitt mit der gegebenen Fläche diejenigen Punkte bestimmt, denen Normalen entsprechen, die der Normale im Anfangspunkte begegnen. Diese Punkte liegen im Allgemeinen auf einer Curve doppelter Krümmung. Wenn $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ unabhängig ist von z , d. h. wenn die Gleichung der gegebenen Fläche unter folgender Form sich darstellt:

$$z = \psi(x, y),$$

so ist (2.) auch die Gleichung der Projection dieser Curve. Im entgegengesetzten Falle müssen wir, um diese Gleichung zu erhalten, z zwischen (1.) und (2.) eliminiren. Unsere Aufgabe, diejenigen Richtungen zu bestimmen, nach welchen wir, von dem auf der Fläche gegebenen Punkte aus, gehen müssen, um zu solchen consecutiven Punkten zu kommen, denen Normalen entsprechen, die der Normale in jenem Punkte begegnen, — reducirt sich hiernach offenbar darauf: an die eben bezeichnete Linie doppelter Krümmung, im Anfangspunkte der Coordinaten (der ein vielfacher Punkt ist) Tangenten zu legen. Da diese Tangenten auch die gegebene Fläche berühren müssen, so liegen sie in der Ebene der x , y , und die Construction derselben läuft darauf hinaus, an die Durchschnittscurve dieser Ebene und der Fläche (2.) [Curve, deren Gleichung man erhält, indem man in (2.) $z=0$ setzt] im Anfangspunkte der Coordinaten Tangenten zu ziehen.

3. Nachdem wir diese Bemerkungen vorausgeschickt haben, wollen wir nun die einzelnen Fälle discutiren und zu diesem Ende annehmen, die Entwicklung von (1.) gebe:

(3.) $z = Ay^2 + Byx + Cx^2 + Dy^3 + Ey^2x + Fyx^2 + Gx^3 + \dots$
 $+ My^n + Ny^{n-1}x + Oy^{n-2}x^2 + \dots + Qy^2x^{n-2} + Ryx^{n-1} + Sx^n + \dots$
 (Nach der oben gemachten Coordinatenbestimmung fehlen nothwendig das constante Glied und die mit x und y behafteten Glieder.) Alsdann erhalten wir, wenn wir entwickeln, statt (2.) folgende Gleichung:

$$(4.) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = By^2 + 2(C-A)yx - Bx^2 \\ \quad + Ey^3 + (2F-3D)y^2x + (3G-2E)yx^2 - Fx^3 \\ \quad + \dots \\ \quad + Ny^n + (2Q-nM)y^{n-1}x + \dots + (nS-2O)yx^{n-1} - Rx^n \\ \quad + \dots \end{array} \right.$$

Die drei ersten Glieder dieser Gleichung für sich allein gleich Null gesetzt:

$$By^2 + 2(C-A)yx - Bx^2 = 0$$

stellen das System der beiden Tangenten im Anfangspuncte dar, und die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche diese beiden Tangenten mit der Axe der x bilden, sind durch die Wurzeln folgender Gleichung gegeben:

$$(5.) \quad Bt^2 + 2(C-A)t - B = 0,$$

die wir erhalten, indem wir alle Glieder der vorhergehenden Gleichung durch x^2 dividiren und $\frac{y}{x} = t$ setzen *). Diese Gleichung hat immer reelle Wurzeln; bezeichnen wir dieselbe durch t' und t'' , so kommt:

$$t't'' + 1 = 0$$

d. h. die durch (5.) bestimmten Richtungen, die Krümmungsrichtungen der gegebenen Fläche in dem gegebenen Puncte, sind auf einander senkrecht.

4. Wenn wir die Axe der y in der Ebene der x, y drehen, bis sie mit der Axe der x irgend einen Winkel ω bildet, so erhalten wir nach den bekannten Coordinatenformeln

$$x + y \cos \omega \text{ für } x, \quad y \sin \omega \text{ für } y.$$

Um ferner zu der Gleichung der Durchschnittscurve der gegebenen Fläche und der neuen Ebene der z, y zu kommen, brauchen wir nur in der Gleichung (1.) oder (3.) die der obigen Coordinatenverwandlung entsprechenden Substitutionen zu machen und alsdann $x = 0$ zu setzen; oder, was dasselbe ist, sogleich in diesen Gleichungen $y \cos \omega$ für x und $y \sin \omega$ für y zu schreiben. Auf diese Weise ergibt sich aus (3.):

$$(6.) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = y^2(A \sin^2 \omega + B \sin \omega \cos \omega + C \cos^2 \omega) \\ \quad + y^3(D \sin^3 \omega + E \sin^2 \omega \cos \omega + F \sin \omega \cos^2 \omega + G \cos^3 \omega) \\ \quad + \dots \\ \quad + y^n(M \sin^n \omega + N \sin^{n-1} \omega \cos \omega + \dots + R \sin \omega \cos^{n-1} \omega + S \cos^n \omega) \\ \quad + \dots \end{array} \right.$$

Der Krümmungshalbmesser dieser Curve im Anfangspuncte der Coordinaten ist, da $\frac{dz}{dy}$ verschwindet, gleich dem reciproken Werthe von

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = 2(A \sin^2 \omega + A \sin \omega \cos \omega + \cos^2 \omega).$$

*) Vergl. Euler *Introductio in Analysin infinitorum* II.

Um das Maximum oder Minimum dieses Krümmungshalbmessers, wenn wir den Winkel ω als veränderlich betrachten, zu erhalten, brauchen wir nur den vorstehenden Werth für $\frac{d^2 z}{dy^2}$ in Beziehung auf ω zu differentii-

ren und alsdann $\frac{d \cdot \left(\frac{d^2 z}{dy^2} \right)}{d\omega}$ gleich Null zu setzen. Auf diese Weise kommt, wenn wir zugleich durch $\cos^2 \omega$ dividiren und t für $\tan \omega$ schreiben:

$$Bt^2 + (C - A)t - B = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit (5.). Die beiden Krümmungsrichtungen der gegebenen Fläche in dem auf derselben gegebenen Puncte sind also zugleich diejenigen Richtungen, nach welchen Ebenen, die auf der Tangentialebene senkrecht stehen, die Fläche in Curven schneiden, deren Krümmungshalbmesser in dem gegebenen Puncte größte oder kleinste Werthe erhalten.

Wenn wir endlich den Werth des zweiten Differentialcoefficienten gleich Null setzen, so erhalten wir diejenigen Richtungen, nach welchen wir Schnitte führen müssen, damit die Krümmungshalbmesser der Durchschnitcurven unendlich werden. Auf diese Weise kommt, wenn wir hier $\tan \omega = u$ setzen:

$$Au^2 + Bu + C = 0.$$

Diese Gleichung hat reelle, imaginäre oder gleiche Wurzeln, je nachdem der Ausdruck $(B^2 - 4AC)$ positiv, negativ oder Null ist. Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gleichung durch u' und u'' , so ist

$$u' + u'' = -B.$$

Wenn wir also voraussetzen, daß die Coordinaten-Axen ursprünglich so angenommen worden sind, daß $u' + u'' = 0$, so verschwindet auch B , und die Gleichung (5.) giebt $t = 0$ oder $t = \infty$. Wir sehen hieraus, daß die Krümmungsrichtungen der Fläche die Scheitelwinkel halbiren, welche von denjenigen Richtungen, nach welchen die Krümmungshalbmesser der Schnitte unendlich sind (von den Richtungen höhern Contacts), gebildet werden.

Die Bestimmung der Richtungen höhern Contacts, wenn die beiden Krümmungsrichtungen gegeben sind, ist eine unbestimmte Aufgabe.

5. Wir gehen nun weiter und wollen voraussetzen, daß in der Gleichung (3.) der gegebenen Fläche A , B und C Null seien. Alsdann erhalten wir folgende Gleichung:

$$(7.) \quad E y^3 + (2F - 3D) y^2 x + (3G - 2E) y x^2 - F x^3 = 0;$$

welche das System dreier Tangenten der durch (4.) dargestellten Curve in dem Anfangspuncte der Coordinaten, welcher ein dreifacher Punct (*point triple*) derselben ist, darstellt. Durch diese Tangenten sind die Krümmungsrichtungen der gegebenen Fläche bestimmt, d. h. wenn wir nach der Richtung dieser Tangenten, vom gegebenen Punct aus, auf der Fläche fortgehen, so begegnen wir solchen consecutiven Normalen, welche die Normale in jenem Puncte schneiden. Diese Richtungen bilden mit der ersten Axe Winkel, deren trigonometrische Tangenten durch nachstehende Gleichung, die wir aus (7.) erhalten, indem wir durch x^3 dividiren und t für $\frac{y}{x}$ schreiben, gegeben sind:

$$(8.) \quad E t^3 + (2F - 3D) t^2 + (3G - 2E) t - F = 0.$$

Wir erhalten die Gleichung der Durchschnittscurve der Fläche und einer durch die Axe der z gehenden Ebene, die mit der Ebene der zx irgend einen Winkel ω bildet, wenn wir in (6.) A , B und C gleich Null setzen. Da für diese Gleichung alsdann die beiden Differentialcoefficienten $\frac{dz}{dy}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ verschwinden, wenn wir z und y gleich Null setzen, so wird der Radius des Krümmungskreises für den Anfangspunct unendlich und das Maass der Krümmung der Durchschnittscurve in diesem Puncte ist der dritte Differentialcoefficient:

$$\frac{d^3z}{dy^3} = 2.3(D \sin^3 \omega + E \sin^2 \omega \cos \omega + F \sin \omega \cos^2 \omega + G \cos^3 \omega).$$

Wenn wir ω als veränderlich betrachten, so erhalten wir für das Maximum oder Minimum dieses Ausdrucks, indem wir wie oben $\tan \omega = t$ setzen, folgende Bedingungsgleichung zu erfüllen:

$$E t^3 + (2F - 3D) t^2 + (3G - 2E) t - F = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit (8) und somit ist dargethan, dass die Krümmungsrichtungen der Fläche zugleich diejenigen Richtungen sind, nach welchen die Schnitte der Fläche ein Maximum oder Minimum der Krümmung haben.

Der dritte Differentialcoefficient verschwindet, wenn wir den Winkel ω vermittelt folgender Gleichung, in der wir u für $\tan \omega$ schreiben, bestimmen:

$$(9.) \quad D u^3 + E u^2 + F u + G = 0.$$

Da diese Gleichung vom dritten Grade ist, so giebt es im Allgemeinen

drei Richtungen, nach welchen hin die Fläche mit der Tangentialebene einen Contact noch höherer Ordnung (der dritten) hat. Diese Richtungen höhern Contacts stehen mit den Krümmungsrichtungen in gegenseitigen Beziehungen, worüber wir in einige Entwicklungen eingehen wollen.

6. Wenn $F=0$, so wird eine Wurzel der Gleichung (8) gleich Null, d. h. die Axe der x fällt mit einer der drei Krümmungsrichtungen zusammen. Aber alsdann ist zugleich, wenn wir die drei Wurzeln der Gleichung (9.) u' , u'' und u''' nennen:

$$u'u'' + u'u''' + u''u''' = 0;$$

mithin auch, wenn wir durch $u'u''u'''$ dividiren:

$$(10.) \quad \frac{1}{u'''} + \frac{1}{u''} + \frac{1}{u'} = 0.$$

Es ist also die Summe der Cotangenten derjenigen drei Winkel, welche die drei Richtungen höhern Contacts mit einer beliebigen der drei Krümmungsrichtungen bilden, gleich Null. Wenn wir also, bei einer beliebigen Annahme der ersten Axe, die Winkel, welche die erstgenannten drei Richtungen mit dieser Axe bilden, α' , α'' und α''' nennen, und ω denjenigen Winkel, welchen eine der drei Krümmungsrichtungen mit derselben Axe bildet, so ist

$$(11.) \quad \cot(\alpha' - \omega) + \cot(\alpha'' - \omega) + \cot(\alpha''' - \omega) = 0,$$

mithin:

$$\frac{1 + \tan \alpha' \tan \omega}{\tan \alpha' - \tan \omega} + \frac{1 + \tan \alpha'' \tan \omega}{\tan \alpha'' - \tan \omega} + \frac{1 + \tan \alpha''' \tan \omega}{\tan \alpha''' - \tan \omega} = 0.$$

Diese Gleichung ist, wenn wir entwickeln, in Beziehung auf $\tan \omega$ vom dritten Grade, und durch ihre drei Wurzeln sind die Krümmungsrichtungen alle drei bestimmt.

7. Wenn wir $G=0$ setzen, so ergibt sich aus dem Anblick der Gleichung (9.), daß ein Werth von u Null wird, d. h. daß die Axe der x mit einer der drei Richtungen höhern Contacts zusammenfällt. Alsdann folgt aus (8.), wenn wir die Wurzeln dieser Gleichung t' , t'' und t''' nennen:

$$t't'' + t't''' + t''t''' = -2,$$

oder

$$(12.) \quad \frac{1}{t'''} + \frac{1}{t''} + \frac{1}{t'} = -2 \left(\frac{1}{t'} \cdot \frac{1}{t''} \cdot \frac{1}{t'''} \right).$$

Es ist also die Summe der Producte je zweier der trigonometrischen Tangenten derjenigen drei Winkel, welche die Krümmungsrichtungen der

Fläche mit einer beliebigen der drei Richtungen höhern Contacts bilden gleich (-2), oder, was dasselbe heisst, die Summe der Cotangenten dieser drei Winkel, negativ genommen, ist gleich dem doppelten Product derselben Cotangenten. Wenn wir, bei einer beliebigen Annahme der ersten Axe, diejenigen Winkel, welche die drei Krümmungsrichtungen mit dieser Axe bilden, ω' , ω'' und ω''' nennen und α denjenigen Winkel, welchen mit derselben Axe eine beliebige der drei Richtungen höhern Contacts bildet, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$(13.) \quad \begin{aligned} &\tan(\omega' - \alpha) \tan(\omega'' - \alpha) + \tan(\omega' - \alpha) \tan(\omega''' - \alpha) \\ &+ \tan(\omega'' - \alpha) \tan(\omega''' - \alpha) + 2 = 0, \end{aligned}$$

die zur Bestimmung von α durch ω' , ω'' und ω''' zu einer Gleichung des dritten Grades führt.

8. Wir wollen noch einige einzelne Fälle besonders bemerklich machen. Wenn zwei der drei Richtungen höhern Contacts zusammenfallen, so fällt mit denselben auch eine der drei Krümmungsrichtungen zusammen. Dies folgt sogleich daraus, dass, wenn man die Coefficienten F und G der Gleichung (9.) gleich Null setzt, auch in der Gleichung (8.) das von t unabhängige Glied ausfällt. Wenn alle drei Richtungen höhern Contacts zusammenfallen, so fallen mit ihnen auch zwei der drei Krümmungsrichtungen zusammen und die dritte steht auf ihnen senkrecht. Der letztere Theil dieser Behauptung ergibt sich aus dem Anblick von (13.), in der, wenn $\omega' - \alpha = \omega'' - \alpha = 0$, nothwendig $\omega''' - \alpha$ gleich sein muss $\frac{\pi}{2}$. Die Fläche hat also im engern Sinne nur eine einzige Krümmung, und die Richtung derselben ist senkrecht auf den Richtungen höhern Contacts.

Wenn eine der Richtungen höhern Contacts und eine der Krümmungsrichtungen auf einander senkrecht stehen, so halbiren dieselben sowohl diejenigen Scheitelwinkel, welche von den beiden übrigen Linien höhern Contacts, als auch diejenigen, welche von den beiden übrigen Krümmungsrichtungen gebildet werden. Dies erhellet daraus, dass wenn man in (12.) $\frac{1}{t'''} = 0$ und in (10.) $\frac{1}{u'''} = 0$ setzt, man aus diesen beiden Gleichungen folgende zieht:

$$t' + t'' = 0, \quad u' + u'' = 0.$$

Wenn die drei Richtungen höhern Contacts lauter gleiche Winkel bilden, so werden dieselben von den drei Krümmungsrichtungen halbirt, so

dass diese unter einander ebenfalls gleiche Winkel bilden und auf jenen senkrecht stehen.

Es können zwei der drei Krümmungsrichtungen zusammenfallen. Soll dieß in der ersten Axe geschehen, so erhalten wir folgende beide Bedingungsgleichungen:

$$F = 0, \quad 3G = 2E,$$

und hiernach zur Bestimmung der Richtungen höhern Contacts, aus (9.):

$$\frac{1}{u^3} + \frac{3}{2} \frac{1}{u} + \frac{3}{2} \frac{D}{E} = 0.$$

Zwei Wurzeln dieser Gleichung sind nothwendig imaginär, weil der Coefficient von $\frac{1}{u}$ positiv ist. Wenn alle drei Krümmungsrichtungen zusammenfallen, so ist zugleich $D = 0$. Die letzte Gleichung zeigt, dass alsdann die einzige reelle Richtung höhern Contacts auf jenen Krümmungsrichtungen senkrecht ist.

9. Die vorstehenden Entwicklungen können wir ohne Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall ausdehnen, wo die Fläche in dem gegebenen Puncte mit einer Ebene einen Contact der $(n-1)$ ten Ordnung hat, und also der zweite Theil der Gleichung (3.) mit denjenigen Gliedern anfängt, die y und x in der n ten Potenz enthalten. Statt der Gleichungen (8.) und (9.) finden wir alsdann folgende:

$$(14.) \quad Nt^n + (2O - nM)t^{n-1} + \dots + (nS - 2Q)t - R = 0,$$

$$(15.) \quad Mu^n + Nu^{n-1} + Ou^{n-2} + \dots + Qu^2 + Ru + S = 0.$$

Diese Gleichungen haben beide, wenn n eine ungerade Zahl ist, wenigstens eine reelle Wurzel; es giebt also, wenn eine Fläche in einem ihrer Puncte mit einer Ebene einen Contact von gerader Ordnung hat, in diesem Puncte wenigstens eine Krümmungsrichtung und eine Richtung eines Contacts der n ten Ordnung. In demjenigen Falle, wo die Ordnung des Contacts eine ungerade ist, braucht die Fläche in dem gegebenen Puncte nach keiner Richtung hin mit der Tangentialebene einen Contact höherer Ordnung zu haben; sie hat aber immer wenigstens zwei Krümmungen. Um diese letztere Behauptung zu beweisen, wird es hinreichend sein, beispielsweise denjenigen Fall zu betrachten, wo $n = 6$. Die Gleichungen (15.) und (14.) werden in diesem Falle:

$$(16.) \quad Mu^6 + Nu^5 + Ou^4 + Pu^3 + Qu^2 + Ru + S = 0,$$

$$(17.) \quad Nt^6 + (2O - 6M)t^5 + (3P - 5N)t^4 + 4(Q - O)t^3 + (5R - 3P)t^2 + (6S - 4Q)t - R = 0.$$

Wir können, ohne der Allgemeinheit dieser Gleichungen irgend Abbruch zu thun, annehmen, N sei positiv. Wenn alle Wurzeln der Gleichung (17.) imaginär sein sollen, so muß nach der allgemeinen Theorie der Gleichungen, bei obiger Voraussetzung, R negativ sein; es muß ferner der Coefficient von t^2 positiv sein, und folglich ist, da $R < 0$, auch P nothwendig negativ; endlich muß auch der Coefficient von t^4 positiv sein, und folglich ist, da $P < 0$, auch N nothwendig negativ: was im Widerspruche mit dem Vorstehenden ist. Wir können also als vollständig bewiesen ansehen, daß jede Fläche in jedem ihrer Punkte wenigstens eine oder zwei Krümmungen hat, je nachdem sie in jenem Punkte mit einer Ebene einen Contact von grader oder von ungerader Ordnung hat.

10. Wenn wir die erste Axe so bestimmen, daß sie mit einer Krümmungsrichtung zusammenfällt, so wird eine Wurzel der Gleichung (17.) Null, und mithin kommt $R = 0$; und hiernach folgt aus der Gleichung (16.), daß die Summe der reciproken Werthe der Wurzel dieser Gleichung Null ist. Also:

Wenn irgend eine Fläche in irgend einem ihrer Punkte mit einer Ebene einen Contact der $(n-1)$ ten Ordnung hat, so ist die Summe der Cotangenten derjenigen Winkel, welche die n Richtungen, nach denen die Fläche (im Allgemeinen) mit der Tangentialebene in jenem Punkte einen Contact der n ten Ordnung hat, mit einer beliebigen der n Krümmungsrichtungen bilden, gleich Null.

Wenn wir $n = 2$ nehmen, so erhalten wir aus dem vorstehenden Satze, als besondern Fall, den Eulerschen Satz, daß in den gewöhnlichen Fällen die beiden Krümmungen in beliebigen Punkten einer Fläche auf einander senkrecht stehen.

11. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Krümmung der Fläche in dem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Richtung zu bestimmen, wenn dieselbe nach gewissen Richtungen bekannt ist. Nehmen wir sogleich den allgemeinen Fall, daß die Fläche mit der Tangentialebene in dem gegebenen Punkte einen Contact der $(n-1)$ ten Ordnung habe, so erhalten wir (nach No. 4.) für die Gleichung der Curve des Durchschnittes der Fläche und einer Normalebene, die mit der Ebene der zx irgend einen Winkel ω bildet:

$$z = y^n (M \sin^n \omega + N \sin^{n-1} \omega \cos \omega + \dots + R \sin \omega \cos^{n-1} \omega + S \cos^n \omega) + \dots$$
 Bezeichnen wir ferner (nach No. 1.) den Krümmungsparameter dieser

Curve im Anfangspuncte der Coordinaten durch p (bei einem Contacte der ersten Ordnung ist p gleich dem Krümmungshalbmesser) so ergibt sich:

$$(17. a.) \quad \frac{1}{p} \left(= \frac{d^n z}{dy^n} \right)$$

$$= 2.3 \dots n (M \sin^n \omega + N \sin^{n-1} \omega \cos \omega + \dots + R \sin \omega \cos^{n-1} \omega + S \cos^n \omega).$$

Wir können diese Gleichung als einer Curve angehörig betrachten, indem wir p und ω als Polarcoordinaten construiren. Um zu rechtwinkligen Coordinaten überzugehen, brauchen wir nur $\frac{x}{p}$ für $\cos \omega$, $\frac{y}{p}$ für $\sin \omega$ und $\pm \sqrt{(x^2 + y^2)}$ für p zu substituiren. Auf diese Weise kommt:

(18.) $(x^2 + y^2)^{\frac{n-1}{2}} \pm 2.3 \dots n (M y^n + N y^{n-1} x + \dots + R y x^{n-1} + S x^n) = 0$, die Gleichung einer Curve, die im Anfangspuncte der Coordinaten einen conjugirten Punct hat. Wenn wir also diese Curve in der Tangentialebene construiren und von dem Berührungspuncte, dem conjugirten Puncte der Curve, nach einem beliebigen Puncte derselben eine gerade Linie ziehen, so bestimmt die Länge dieser Linie den Parameter p einer Parabel der n ten Ordnung (nach No. 1.), die mit derjenigen Durchschnittscurve, welche in der durch jene gerade Linie gelegten Normalebene sich befindet, im Anfangspuncte der Coordinaten dieselbe Krümmung hat. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so können wir zum Behuf der eben angezeigten Construction in der Gleichung (18.) beliebig das Zeichen $+$ oder $-$ nehmen. Wenn aber n eine gerade Zahl ist, so steigt diese Gleichung durch Fortschaffung der Wurzelgröße bis zum $2n$ ten Grade; alsdann ist der conjugirte Punct zugleich der Mittelpunkt der Curve.

Die Asymptoten der Curve (18.) sind parallel den Richtungen höhern Contacts; die von dem conjugirten Puncte nach der Curve gezogenen Normalen bestimmen die Krümmungsrichtungen der Fläche, die im Allgemeinen zugleich das Maximum oder Minimum der Krümmung der verschiedenen Durchschnittscurven anzeigen.

Da die Gleichung (18.) $n+1$ Constanten hat und die bezügliche Curve also durch eben so viele Puncte vollständig bestimmt ist, so braucht man auch nur irgend $n+1$ Krümmungen der Fläche nach gegebenen Richtungen zu kennen, um die Krümmung derselben nach jeder beliebigen Richtung zu bestimmen. Zu dieser Bestimmung ist ebenfalls hinreichend, die n Richtungen höhern Contacts und außerdem noch die Krümmung nach einer beliebigen Richtung zu kennen.

12. Wir wollen das Vorstehende an zwei Beispielen anschaulich machen. Es seien:

$$(19.) \quad \begin{cases} z = \frac{1}{6}(3y^2x - 2yx^2) + U, \\ z = \frac{1}{6}(y^3 + 3y^2x + 2x^3) + U, \end{cases}$$

(indem wir in U alle diejenigen Glieder zusammenfassen, in denen y und x in höherem als dem dritten Grade vorkommen), die Gleichungen zweier gegebenen Flächen. Diese Flächen haben mit der Ebene der xy einen Contact der zweiten Ordnung. Für dieselben verwandelt sich die Gleichung (18.) der vorigen Nummer, wenn wir in derselben das Zeichen $+$ nehmen, in folgende beiden:

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 + 3y^2x - 2yx^2 &= 0, \\ y^2 + x^2 + y^3 + 3y^2x + 2x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind (für eine beliebig angenommene Einheit) in (Fig. 1. und Fig. 2. Taf. V.) construirt, was sehr leicht ist, weil, wenn man in denselben $y = mx$ setzt, für jede beliebige Annahme von m , für x drei Werthe sich ergeben, von denen zwei Null sind. Denken wir uns nun die Ebene der Zeichnung als die Tangentialebene der beiden Flächen, OY und OX als die beiden ursprünglichen Axen der y und x , so stellt die von O nach einem beliebigen Puncte M einer der beiden Curven gezogene gerade Linie OM den Krümmungsparameter derjenigen Curve dar, die aus der bezüglichen Fläche durch eine Normalebene geschnitten werden kann, welche die Tangentialebene in eben dieser geraden Linie OM schneidet.

Im ersten Falle sind (Fig. 1.) DD , EE und FF die drei Richtungen des Contacts der dritten Ordnung zwischen Fläche und Tangentialebene. Im zweiten Falle (Fig. 1.) giebt es nur eine solche Richtung, nemlich DD . Wenn in den Gleichungen (19.) U fehlt, so bestimmen die eben genannten Richtungen gerade Linien, in welchen die Tangentialebene von der bezüglichen Fläche geschnitten wird.

Im ersten Falle sind die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche die Krümmungsrichtungen mit der ersten Axe bilden (nach No. 5.) durch folgende Gleichung gegeben:

$$3t^3 - 4t^2 - 6t + 2 = 0.$$

Die Richtungen dieser Krümmungen sind (Fig. 1.) durch die drei geraden Linien OA , OB und OC gegeben und die Parameter derselben durch die Länge dieser Linien. Diese drei Parameter sind Minima. Im

zweiten Falle erhalten wir statt der letzten Gleichung folgende:

$$t^3 - t^2 = 0,$$

und mithin fallen zwei dieser Krümmungsrichtungen in die erste Axe, (Fig. 2.) in OA zusammen, während die dritte in OB fällt. Nach OA ist der Krümmungsparameter der Fläche ein Maximum, nach OB weder ein Maximum noch ein Minimum.

13. Wir können auch, indem wir in der Gleichung (17. a.) $p = r^m$ setzen, in dieser Gleichung:

$$\frac{1}{r^m} = 2.3\dots n (M \sin^n \omega + N \sin^{n-1} \omega \cos \omega + \dots + R \sin \omega \cos^{n-1} \omega + S \cos^n \omega)$$

r und ω als Polarcoordinaten betrachten. Wenn wir alsdann, wie in der 11. Nummer, zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen, so kommt:

$$(20.) (x^2 + y^2)^{\frac{n-m}{2}} \pm 2.3\dots n (M y^n + N y^{n-1} x + \dots + R y x^{n-1} + S x^n).$$

Wenn wir diese Gleichung, wie oben die Gleichung (18.), in der Tangentialebene construiren, so ist allgemein durch die m te Potenz der, vom Anfangspuncte der Coordinaten nach irgend einem Punkte der Curve gezogenen geraden Linie der Krümmungsparameter der Fläche nach der bezüglichen Richtung gegeben. Wenn m positiv ist und kleiner als n , so hat die durch (20.) dargestellte Curve im Anfangspuncte einen conjugirten Punct. Wenn $m = n$, so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$1 = 2.3\dots n (M y^n + N y^{n-1} x + \dots + R y x^{n-1} + S x^n).$$

Die Construction, welche dieser Gleichung entspricht, hat Herr Dupin für den gewöhnlichen Fall $n = 2$ vor längerer Zeit schon gegeben. Wenn m negativ ist, so hat die durch (20.) dargestellte Curve im Allgemeinen mehrere Zweige, die sich im Anfangspuncte der Coordinaten schneiden; und die Tangenten der Curve in diesem Puncte bestimmen die Richtungen eines Contacts der n ten Ordnung.

32. Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendarographie.

(Von Hrn. W. Matzka, Ober-Feuerwerker im K. K. Bombardier-Corps zu Wien.)

Der julianische und gregorianische Calendar bieten dem Analytiker einige interessante Aufgaben dar, von denen ich folgende drei allgemein aufzulösen versuchte, da bisher, so viel mir bekannt ist, nur von einzelnen Fällen derselben durch Herrn Ritter von Ciccolini in dem 10. und 11. Bande der „*Correspondance astronomique, géographique, hydrographique et statistique du Baron de Zach, à Gènes 1824 et 1825.*“ Auflösungen gegeben worden. Zur größern Einfachheit in der Darstellung bediene ich mich hier nebst den gewöhnlichen in den algebraischen Formen vorkommenden Zeichen noch folgender:

$\left(\frac{A}{n}\right)_e$ bezeichnet die ganze Zahl des Quotienten, welche man bei der Division der GröÙe A durch n erhält,

$\left(\frac{A}{n}\right)_r$ stellt den bei dieser Division sich ergebenden Rest vor.

So ist z. B.

$$\left(\frac{76}{9}\right)_e = 8, \left(\frac{76}{9}\right)_r = 4; \quad \left(\frac{35}{5}\right)_e = 7, \left(\frac{35}{5}\right)_r = 0.$$

Verlangt man jedoch in einer algebraischen Form, daß für den besonderen Fall, wo A durch n vollkommen getheilt werden kann, die ganze Zahl des Quotienten um Eine Einheit vermindert und der Rest dem Divisor gleich gesetzt werde, so sollen die Buchstaben e und r mit E und R vertauscht werden; die Ausdrücke $\left(\frac{A}{n}\right)_E$ und $\left(\frac{A}{n}\right)_R$ fordern demnach, daß

$$\left(\frac{an}{n}\right)_E \text{ nicht } = a \text{ sondern } = a - 1,$$

$$\left(\frac{an}{n}\right)_R \text{ nicht } = 0 \text{ sondern } = n$$

genommen werde.

Es ist also

$$\left(\frac{84}{7}\right)_e = 12, \left(\frac{84}{7}\right)_E = 11; \quad \left(\frac{84}{7}\right)_r = 0, \left(\frac{84}{7}\right)_R = 7.$$

1. Aufgabe. Es sollen die zu demselben Jahrhunderte gehörigen Jahre der christlichen Aera bestimmt werden, welche einerlei Sonntagszeiger (d. i. den nemlichen zweiten Sonntagsbuchstaben) haben.

Es sei

N ein gegebenes Jahr unserer Aera,

S die Zahl der in N enthaltenen vollen Hunderte, oder $S = \left(\frac{N}{100}\right)_c$,

n die von den zwei rechts stehenden Ziffern des Jahres N gebildete

Zahl oder $n = \left(\frac{N}{100}\right)_r$,

folglich

$$N = 100S + n;$$

ferner sei

$h = \left(\frac{S+3}{7}\right)_r$ im julianischen und

$h = \left(2\left(\frac{S}{4}\right)_r + 1\right)_r$ im gregorianischen Kalender,

so findet man den Sonntagszeiger

$$(1.) \quad L = \left(\frac{h + 2\left(\frac{n}{4}\right)_r + 4\left(\frac{n}{7}\right)_r}{7}\right)_R$$

und den ersten Sonntagsbuchstaben

$$L' = \left(\frac{L+\delta}{7}\right)_R,$$

wenn δ in Schaltjahren 1, in gemeinen aber 0 ist.

Aus (1.) erhält man

$$(2.) \quad 2\left(\frac{n}{4}\right)_r + 4\left(\frac{n}{7}\right)_r + h = 7\alpha + L;$$

es ist jedoch

$$(3.) \quad \left(\frac{n}{4}\right)_r = n - 4\left(\frac{n}{4}\right)_c \quad \text{und} \quad \left(\frac{n}{7}\right)_r = n - 7\left(\frac{n}{7}\right)_c,$$

daher verwandelt sich die Gleichung (2.), wenn man um abzukürzen

$$\beta = n - \left(\frac{n}{4}\right)_c - 4\left(\frac{n}{7}\right)_c - \alpha$$

setzt, in

$$n + \left(\frac{n}{4}\right)_c = h - L + 7\beta.$$

Soll nun in demselben Jahrhunderte, nemlich bei gleichem Werthe von S und h auch das Jahr $100S + n'$ diesen Sonntagszeiger L haben, so

mufs auch

$$n' + \left(\frac{n'}{4}\right)_e = h - L + 7\beta'$$

sein. Diese beiden letzten Gleichungen geben, falls n' gröfser als n vorausgesetzt wird,

$$n' - n + \left(\frac{n'}{4}\right)_e - \left(\frac{n}{4}\right)_e = 7(\beta' - \beta) = 7\gamma,$$

welcher Ausdruck, wegen der Gleichungen (3.), in

$$(4.) \quad 5(n' - n) = 28\gamma + \left(\frac{n'}{4}\right)_r - \left(\frac{n}{4}\right)_r$$

übergeht. Weil $n' - n$, wie alle in dieser Gleichung enthaltenen allgemeinen Gröfsen, ganz und positiv sein mufs, so findet man mittelst des bekannten Verfahrens der unbestimmten Analysis

$$n' - n = 28\lambda + 17\left(\frac{n'}{4}\right)_r + 11\left(\frac{n}{4}\right)_r$$

oder, wenn man

$$\omega = \lambda + \left(\frac{17\left(\frac{n'}{4}\right)_r + 11\left(\frac{n}{4}\right)_r}{28}\right)_e$$

setzt,

$$(I.) \quad n' = n + \left(\frac{17\left(\frac{n'}{4}\right)_r + 11\left(\frac{n}{4}\right)_r}{28}\right)_r + 28\omega.$$

Nimmt man nun für n die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 9, für $\left(\frac{n'}{4}\right)_r$ und ω aber 0, 1, 2 und 3, so erhält man nachstehendes Täfelchen der zugehörigen Werthe von n' .

n	0	1	2	3	4	5	9
n'	6	7	13	8	10	11	15
	17	12	19	14	21	16	20
	23	18	24	25	27	22	26
	28	29	30	31	32	33	37
	34	35	41	36	38	39	43
	45	40	47	42	49	44	48
	51	46	52	53	55	50	54
	56	57	58	59	60	61	65
	62	63	69	64	66	67	71
	73	68	75	70	77	72	76
	79	74	80	81	83	78	82
	84	85	86	87	88	89	93
	90	91	97	92	94	95	99
		96		98			

Alle in einer verticalen Reihe stehenden Jahre haben daher in jedem Jahrhunderte denselben Sonntagszeiger. Ist es demnach bekannt, daß ein Jahr (z. B. 12) einen gewissen Sonntagszeiger (z. B. 7) hat, so kennt man sogleich mittelst dieses Täfelchens auch alle übrigen Jahre (1, 7, 12, 18, 29, 35 u. s. w.) dieses Saeculums, welche gleichfalls diesen Sonntagszeiger (7 oder den Sonntagsbuchstaben G) haben.

2. Aufgabe. Diejenigen Jahre eines gewissen Jahrhunderts zu suchen, denen ein gegebener Sonntagszeiger angehört.

Aus der Gleichung

$$n + \left(\frac{n}{4}\right)_e = h - L + 7\beta$$

erhält man, wenn darin

$$n = 4\left(\frac{n}{4}\right)_e + \left(\frac{n}{4}\right)_r$$

substituiert wird,

$$5\left(\frac{n}{4}\right)_e = h - L - \left(\frac{n}{4}\right)_r + 7\beta,$$

folglich auch mittelst der Methode der unbestimmten Analysis:

$$\left(\frac{n}{4}\right)_e = 7\varepsilon + 3\left(h - L - \left(\frac{n}{4}\right)_r\right)$$

oder

$$\left(\frac{n}{4}\right)_e = 7\vartheta + \left(\frac{3h + 4L + 4\left(\frac{n}{4}\right)_r}{7}\right)_r,$$

daher

$$(5.) \quad n = 28\vartheta + 4\left(\frac{3h + 4L + 4\left(\frac{n}{4}\right)_r}{7}\right)_r + \left(\frac{n}{4}\right)_r,$$

und wenn man

$$b = \left(\frac{n}{4}\right)_r = \left(\frac{N}{4}\right)_r$$

setzt:

$$(II.) \quad N = 100S + 28\vartheta + 4\left(\frac{3h + 4L + 4b}{7}\right)_r + b.$$

Bestimmt man demnach zu dem gegebenen Werthe von S , nach dem in der ersten Aufgabe aufgestellten Ausdrücke, jenen des h , und setzt sowohl ihn als auch den gegebenen Werth von L in diese Gleichung: nimmt man endlich für b und ϑ die Zahlen 0, 1, 2 und 3; so erhält man aus ihr alle jene Jahre N dieses Jahrhunderts, deren Sonntagszeiger L ist.

Vereinfacht wird die Auflösung dieser Aufgabe, wenn man das erste Schaltjahr dieses Jahrhunderts bestimmt, welchem der gegebene

Sonntagszeiger zugehört und welches aus Gleichung (5.) durch die Annahme $S = b = 0$ leicht gefunden wird; man erhält nemlich

$$(6.) \quad n = 4 \left(\frac{3h+4L}{7} \right)_r = 4 \left(\frac{3(h-L)}{7} \right)_r = 4 \left(\frac{4(L-h)}{7} \right)_r.$$

Sucht man nun dieses gefundene Jahr in dem eben aufgestellten Täfelchen, so haben sofort auch alle anderen mit ihm in derselben Vertical-Reihe stehenden Jahre den nemlichen Sonntagszeiger.

Beispiele. a) In welchen Jahren des laufenden Jahrhunderts hat der Februar des gregorianischen Calenders 5 Sonntage?

Wenn irgend ein Jahr in diesem Monate 5 Sonntage haben soll, so muß es ein Schaltjahr oder $b = 0$ und $L = 3$ sein. Dann ist (nach II.)

$$N = 100S + 4 \left(\frac{3h+5}{7} \right)_r + 28S.$$

Nimmt man nun $S = 18$, so ist für den gregorianischen Calender $h = 5$, daher auch

$$N = 1824 + 28S,$$

und die Jahre

$$1824, 1852, 1880$$

haben die verlangte Eigenschaft.

Anmerk. Von dieser Aufgabe giebt Herr Ritter von Ciccolini in der *Correspondance astronomique* vol. 10. pag. 380. eine andere Auflösung. Hierher gehören auch die *ibid.* vol. 10. p. 448. und vol. 11. p. 150. vorgelegten und hiernach leicht zu lösenden Probleme.

b) Die katholische Kirche feiert das Schutzengelfest stets an demjenigen Sonntage, welcher der nächste an dem 1. September ist; man fragt nun: in welchen Jahren unseres Jahrhunderts fällt dieses Fest auf den 1. September selbst?

Der erwähnten Anordnung gemäß feiert man dieses Fest allgemein

$$\text{den } 28 + \left(\frac{L+5}{7} \right)_R \text{ ten August} = \left(\frac{L+5}{7} \right)_R - 3 \text{ten September:}$$

es kann folglich nur für $L = 6$ auf den 1. September treffen.

Setzt man sonach in der Gleichung (II.) $L = 6$, $S = 18$ und $h = 5$, so sind alle Jahre welche diese Eigenschaft haben und zu dem gegenwärtigen Jahrhunderte gehören in dem Ausdrücke

$$N = 1800 + 28S + 4 \left(\frac{4+4b}{7} \right)_r + b$$

enthalten, und man findet sowohl nach dieser Gleichung, als auch (weil,

nach Gleich. (6.), $n = 16$ ist) mittelst obiger Tafel die Jahre

1805, 1811, 1816, 1822; 1833, 1839, 1844, 1850;

1861, 1867, 1872, 1878; 1889, 1895;

in welchen das Schutzengelfest mit dem 1. September zusammentrifft.

3. Aufgabe. Wenn man unter Festzahl die Anzahl von Tagen begreift, welche von dem 21. März bis zu dem Ostersonntage verfließt; so sollen diejenigen Jahre eines gegebenen Jahrhunderts gesucht werden, welche eine bestimmte Festzahl haben.

Erste Auflösungsart. Ist f diese bekannte Festzahl, so bestimme man, indem

für e die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6

gesetzt werden, die GröÙe d aus

$$d = (f - 1) - e,$$

behalte aber von diesen Werthen des d nur jene, welche positiv und unter 30 sind.

Setzt man nun für das gegebene, nemlich $(S + 1)$ te Jahrhundert, $m = 15$ im julianischen und

$$m = \left(\frac{15 + \left(\frac{3S + 3}{4} \right)_e - \left(\frac{8S + 13}{25} \right)_e}{30} \right)_r \text{ im gregorianischen Calender,}$$

so berechne man a aus

$$a = \left(\frac{11m + 19d}{30} \right)_r,$$

tilge jedoch alle jene Werthe, welche die Zahl 18 überschreiten. Mit den annehmbaren Werthen von a erhält man

$$\bar{n} = 19a + \left(\frac{14S + a}{19} \right)_r,$$

wo $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ist und $\bar{n}$ stets kleiner als 100 sein muß.

Ferner berechne man h aus

$$h = \left(\frac{S + 3}{7} \right)_r \text{ im julianischen und}$$

$$h = \left(\frac{2 \left(\frac{S}{4} \right)_r + 1}{7} \right)_r \text{ im gregorianischen Calender.}$$

Alsdann ist

$$(n) = 28\phi + 4 \left(\frac{3h + 5 + 4f + 4b}{7} \right)_r + b,$$

indem man ϕ und b gleich 0, 1, 2 und 3 setzt, und (n) die Zahl 99 nicht überschreiten läßt.

Die Zahlen n welche in der Reihe der (n) und $\bar{n}$ erscheinen, geben sodann die gesuchten Jahre aus

$$N = 100S + n.$$

Hierbei beachte man jedoch folgende zwei Ausnahmen:

1) Wenn $f = 29$ und m eine der Zahlen 0, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29 ist, so setze man bei $e = 6$ nebst $d = 22$ auch noch $d = 29$.

2) Falls $f = 28$ ist und m einer der Zahlen 2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29 gleicht, so nehme man $d = 28$ und $= 21$, bei $e = 6$. Bei denselben Werthen von m und e ist jedoch für $f = 35$ jener von d unmöglich.

Anwendung. a) Herr Baron von Zach erzählt in seiner *Correspondance astron. vol. 10. pag. 439.*, dafs die Kirche des heil. Johann des Täufers zu Lyon bereits seit dem 15ten Jahrhunderte das Privilegium besitze, ein besonderes Jubiläum zu feiern, wenn das Frohnleichnamfest auf den Tag dieses Heiligen, nemlich auf den 24. Juni fällt. In welchen Jahren unseres Jahrhunderts wird dieses Jubiläum Statt finden?

Das Frohnleichnamfest fällt jederzeit auf den

$$f + 20\text{sten Mai} = f - 11\text{ten Juni},$$

demnach muß im vorliegenden Falle $f = 35$ werden; dann erhält man zu

$$e = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$d = 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28,$$

wovon nur.

$$d = 29 \text{ und } 28$$

angenommen werden kann.

Da ferner $S = 18$, folglich auch $m = 23$ ist, so findet man

$$a = 24, 5,$$

von welchen nur das zweite anwendbar ist; dieses giebt

$$\bar{n} = 19a + 10, \text{ nemlich}$$

$$\bar{n} = 10, 29, 48, 67, \underline{86}.$$

Ferner ist $h = 5$, daher auch

$$(n) = 28\phi + 4\left(\frac{6+4b}{7}\right) + b, \text{ oder}$$

$$(n) = 2, 13, 19, 24; 30, 41, 47, 52; 58, 69, 75, 80; \underline{86}, 97;$$

demnach $n = 86$, und bloß das Jahr 1886 des neunzehnten Jahrhunderts hat ein solches Jubiläum.

Setzt man diese Rechnung fort, so findet man, daß in den Jahren 1886, 1943, 2038, 2190, 2258, 2326, 2410 u. s. w. dieses Fest zu Lyon Statt haben könne, oder dann die Festzahl ihren größten Werth erhalten werde.

Diese, nebst zwei verwandten Aufgaben, löset Herr von Ciccolini in der *Correspondance astron.* vol. 10. pag. 549., dann vol. 11. pag. 48. und 144. nach einer andern Methode.

b) Man suche diejenigen Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts, in welchen der Fastnachtssonntag (Esto mihi) auf den 1. März fällt.

Dieser Sonntag trifft auf den $f - 28$ sten März, daher muß für die vorgelegte Frage $f = 29$ sein; ferner ist $S = 19$, daher $m = 24$ und $h = 0$; sonach hat man

$$\begin{aligned} e &= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, \\ d &= 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 29, \text{ (Ausnahme 1.)} \\ a &= 16, \cancel{27}, 8, \cancel{19}, 0, 11, \cancel{22}, 5, \\ \bar{n} &= 16, \quad 8, \quad 19, 30, \quad 5, \\ &\quad 35, \quad 27, \quad 38, 49, \quad 24, \\ &\quad 54, \quad 46, \quad 57, 68, \quad 43, \\ &\quad 73, \quad 65, \quad 76, \underline{87}, \quad 62, \\ &\quad 92, \quad 84, \quad 95, \quad \underline{81}. \end{aligned}$$

$(n) = 3, \underline{8}, \underline{14}, 25, 31, 36, 42, 53, 59, 64, 70, \underline{81}, \underline{87}, \underline{92}, 98,$
daher auch

$$n = 8, 81, 87, 92 \quad \text{und} \quad N = 1908, 1981, 1987, 1992.$$

Zweite Auflösungsart. Einfacher jedoch und interessanter ist folgende Auflösung dieses Problems.

Aus der gegebenen Festzahl f berechne man, indem man $e = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und 6 annimmt, die Werthe von d aus

$$d = (f - 1) - e,$$

indem man zugleich jene dieser Werthe tilgt, welche negativ oder über 29 sind, und obige zwei Ausnahmen berücksichtigt.

Berechnet man nun gleichfalls a aus

$$a = \left(\frac{11m + 19d}{30} \right),$$

und vernachlässiget diejenigen Werthe von a , welche die Zahl 18 übersteigen, bestimmt ferner g und T aus

$$g = \left(\frac{14S + a}{19} \right)_r \text{ und } T = 4 \left(\frac{3h + 5 + 4f + 4b}{7} \right)_r + b,$$

indem man

$$b = 0, 1, 2, 3$$

setzt, wobei

$$\left. \begin{array}{l} m = 15 \\ h = \left(\frac{S+3}{7} \right)_r \end{array} \right\} \text{ im julianischen und}$$

$$\left. \begin{array}{l} m = \left(\frac{15 + \left(\frac{3S+3}{4} \right)_e - \left(\frac{8S+13}{25} \right)_e}{30} \right)_r \\ h = \left(\frac{2 \left(\frac{S}{4} \right)_r + 1}{6} \right)_r \end{array} \right\} \text{ im gregorianischen Calender}$$

angenommen wird; so hat man sofort

$$t = \left(\frac{2(T-g)}{19} \right)_r$$

und das gesuchte Jahr

$$N = 100S + (28t + T).$$

Da jedoch t die Zahl 3 nicht überschreiten darf, so kann $T-g$ nur einen der folgenden Werthe annehmen, zu denen der darunter stehende von $28t+T$ gehört, welcher stets kleiner als 100 sein muß. Es verbindet sich nemlich

nur $T-g = -18, -9, -8, 0, 1, 10, 11, 19, 20$
mit $28t+T = g+38, g+19, g+76, g, g+57, g+38, g+95, g+19, g+76$.

Z. B. In welchen Jahren unsers Jahrhunderts fällt Ostern auf den 1. April?

Hier ist

$$S = 18, m = 23, h = 5,$$

ferner muß $f = 11$ sein, wenn der Ostersonntag mit dem 1. April zusammentreffen soll.

Man hat sonach

$$\begin{array}{l} e = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ d = 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, \\ a = 23, 4, 15, 26, 7, 18, 29, \\ g = \dots, 9, 1, \dots, 12, 4, \dots, \end{array}$$

$$T = 4, 10, 21, 27$$

$$T - g = . -5, 3, . (-8), (0), .$$

$$. (1), 9, . -2, 6, .$$

$$. 12, (20), . 9, 17, .$$

$$. 18, 26, . 15, 23, .$$

Nun giebt nach dem Obigen

$$T - g = 1, 20, -8, 0,$$

$$28t + T = g + 57, g + 76, g + 76, g,$$

folglich, wegen

$$g = 9, 1, 12, 4,$$

$$28t + T = 66, 77, 88, 4,$$

und die Jahre

$$N = 1804, 1866, 1877, 1888$$

haben die geforderte Eigenheit.

Die Gründe, auf welche sich dieses Verfahren, so wie mehreres hier blofs Berührte stützt, werde ich dem mathematischen Publico eigens im Zusammenhange vorzulegen die Ehre haben, sobald alles hiezu Nöthige vorbereitet sein wird.

33.

Auflösungen der Aufgabe No. 19. S. 99. im ersten Hefte des zweiten Bandes dieses Journals.

Aufgabe. Aus dem Cardanischen Ausdrucke der Wurzeln der Gleichungen vom dritten Grade, oder demjenigen durch trigonometrische Linien, die Wurzeln der Gleichung $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ für den Fall herzuleiten, wenn $a_0 = 0$ ist.

I. Solution par Mr. Victor Bouniakowsky de St. Petersbourg, docteur ès sciences mathématiques de l'académie royale de Paris.

On sait que l'équation

$$1. \quad a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

peut être mise sous la forme

$$y^3 + py + q = 0$$

en faisant $x = y - \frac{1}{3} \cdot \frac{a_1}{a_0}$, les valeurs de p et de q étant fonctions des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 savoir

$$p = \frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a_1^2}{a_0^2}; \quad q = \frac{2}{27} \cdot \frac{a_1^3}{a_0^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2}{a_0^2} + \frac{a_3}{a_0},$$

et les trois valeurs de y , que l'on obtient suivant la règle de Cardan, seront

$$y = -\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} - \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}\right)}\right]},$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}\right)}\right]},$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}\right)}\right]}.$$

Actuellement il est facile de voir que les trois valeurs de x de l'équation (1.) seront les suivantes:

$$2. \quad \begin{cases} x = \frac{-\frac{1}{3}a_1 - \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} - \sqrt[3]{(A - \sqrt{B})}}{a_0}, \\ x = \frac{-\frac{1}{3}a_1 + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{(A - \sqrt{B})}}{a_0}, \\ x = \frac{-\frac{1}{3}a_1 + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{(A - \sqrt{B})}}{a_0}, \end{cases}$$

après avoir posé, pour abrégé

$$A = \frac{1}{27} a_1^3 - \frac{1}{6} a_1 a_2 a_0 + \frac{1}{2} a_3 a_0^2$$

et

$$B = \left(\frac{1}{27} a_1^3 - \frac{1}{6} a_1 a_2 a_0 + \frac{1}{2} a_3 a_0^2 \right)^2 + \left(\frac{a_2 a_0}{3} - \frac{1}{9} a_1^2 \right)^3.$$

Si à présent l'on fait $a_0 = 0$, on obtiendra l'équation

$$3. \quad a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

et il s'agit de trouver au moyen des expressions (2.) les racines de cette dernière équation. Donc il faudra dans les expression (2.) supposer $a_0 = 0$.

Cette supposition réduit premièrement A et B aux valeurs suivantes

$$A = \frac{1}{27} a_1^3; \text{ et } B = 0,$$

et par suite, les trois valeurs de x , en vertu des formules (2.) seront:

$$4. \quad \begin{cases} x = \frac{-\frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{3} a_1}{0} = -\frac{a_1}{0}, \\ x = \frac{-\frac{1}{3} a_1 + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{1}{3} a_1 + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{1}{3} a_1}{0} = \frac{0}{0}, \\ x = \frac{-\frac{1}{3} a_1 + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{1}{3} a_1 + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{1}{3} a_1}{0} = \frac{0}{0}. \end{cases}$$

La première de ces valeurs est indifférente relativement à l'équation du second degré (3.). Elle se rapporte évidemment à l'équation (1.) mise sous la forme

$$x^3 + \frac{a_1}{a_0} x^2 + \frac{a_2}{a_0} x + \frac{a_3}{a_0} = 0.$$

En effet, substituant à la place de x cette première valeur, et faisant dans cette équation $a_0 = 0$, on obtient

$$-\frac{a_1^3}{0^3} + \frac{a_1^3}{0^3} + \frac{a_2 a_1}{0^2} + \frac{a_3}{0} = 0.$$

Or les deux derniers termes étant des quantités infiniment grandes d'un ordre inférieur aux deux premiers termes, ils doivent être rejetés, et il ne restera que

$$-\frac{a_1^3}{0^3} + \frac{a_1^3}{0^3} = 0.$$

Cela est exact en effet.

Pour ce qui est relatif aux deux dernières valeurs de x des expressions (4.), nous allons voir comment on peut en déduire les expressions des deux racines de l'équation (3.).

En effet, puisque les deux dernières valeurs de x des équations (2.) se réduisent à la valeur indéterminée $\frac{0}{0}$; il est clair que pour trouver la véritable valeur de ces expressions, on pourra appliquer la règle que

prescrit le calcul différentiel; c'est-à-dire, diviser la différentielle du numérateur par la différentielle du dénominateur, prenant a_0 pour variable. D'après cela les deux valeurs de x seront représentées par

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \cdot (A+\sqrt{B})^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\partial A}{\partial a_0} + \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \cdot (A-\sqrt{B})^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\partial A}{\partial a_0} - \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \right), \\ x &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \cdot (A+\sqrt{B})^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\partial A}{\partial a_0} + \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \cdot (A-\sqrt{B})^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{\partial A}{\partial a_0} - \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \right). \end{aligned}$$

Or l'on a

$$\frac{\partial A}{\partial a_0} = -\frac{1}{6} \cdot a_1 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_0;$$

$$5. \quad \frac{\partial B}{\partial a_0} = 2\left(\frac{1}{27} \cdot a_1^3 - \frac{1}{6} \cdot a_1 a_2 a_0 + \frac{1}{2} a_3 a_0^2\right) \left(-\frac{1}{6} \cdot a_1 a_2 + a_3 a_0\right) + a_2 \left(\frac{a_2 a_0}{3} - \frac{a_1^2}{9}\right)^2;$$

et en supposant $a_0 = 0$, les valeurs de A , de B et de $\frac{\partial A}{\partial a_0}$, $\frac{\partial B}{\partial a_0}$ se réduiront à

$$A = \frac{1}{27} \cdot a_1^3; \quad B = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial a_0} = -\frac{1}{6} \cdot a_1 a_2; \quad \frac{\partial B}{\partial a_0} = 0.$$

Donc, en conservant pour un moment $\frac{\partial A}{\partial a_0}$, on aura

$$6. \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{9}{a_1^2} \left(\frac{\partial A}{\partial a_0} + \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{9}{a_1^2} \left(\frac{\partial A}{\partial a_0} - \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \right) \\ &= \frac{3}{a_1^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial a_0} + \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \cdot \sqrt{-3} \right\}, \\ x &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{9}{a_1^2} \left(\frac{\partial A}{\partial a_0} + \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \frac{9}{a_1^2} \left(\frac{\partial A}{\partial a_0} - \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \right) \\ &= \frac{3}{a_1^2} \left\{ \frac{\partial A}{\partial a_0} - \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} \cdot \sqrt{-3} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Remarquons qu'une partie de ces valeurs de x est encore indéterminée,

puisque la valeur de la fraction $\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $a_0 = 0$, car l'on a $\frac{\partial B}{\partial a_0} = 0$ et $B = 0$. Donc il faudra employer de nouveau la règle prescrite

par le calcul différentiel pour chercher sa valeur. Cela donne

$$\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\partial\sqrt{B}} = \frac{\left(\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2}\right)}{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

Or cette seconde valeur de la fraction est indéterminée, comme celle de la première, puisque pour $a_0 = 0$, l'on a $B = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial a_0} = 0$. Il en serait de même si l'on continuait la différentiation. Donc il paroît au premier abord, que l'on ne puisse rien conclure sur la véritable valeur de la fraction que nous examinons; mais un artifice fort simple nous donnera cette valeur immédiatement. Pour cela il n'y a qu'à résoudre la dernière

équation par rapport à $\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)$. Cette équation donne immédiatement

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{\sqrt{B}} \right\}^2 = \frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2}\right)}.$$

Telle est la valeur finale de la fraction qu'il s'agissait de déterminer. Pour ce qui regarde la valeur de $\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2}$, il est facile de la trouver: il n'y a qu'à différentier encore une fois l'équation (5.) savoir:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2} = 2a_3\left(\frac{1}{27}a_1^3 - \frac{1}{6}a_1a_2 + \frac{1}{3}a_3a_0^2\right) + 2(a_3a_0 - \frac{1}{6}a_1a_2)^2 + \frac{2}{3}a_2^2\left(\frac{1}{3}a_2a_0 - \frac{a_1^2}{9}\right)$$

et faire $a_0 = 0$; ce qui réduira la valeur de $\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2}$ à

$$\frac{\partial^2 B}{\partial a_0^2} = \frac{2}{27} \cdot a_3a_1^3 + \frac{1}{18}a_1^2a_2^2 - \frac{2}{27}a_2^2a_1^2 = \frac{2}{27} \cdot a_3a_1^3 - \frac{1}{27} \cdot a_2^2a_1^2,$$

et par suite

$$\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}} = \sqrt{\left(\frac{a_3a_1^3}{27} - \frac{1}{4 \cdot 27} \cdot a_2^2a_1^2\right)}.$$

Substituant cette valeur de $\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial a_0}\right)}{2\sqrt{B}}$, et celle de $\frac{\partial A}{\partial a_0}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{6} \cdot a_1a_2$ dans les expressions (6.) des deux racines de l'équation

$$a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

on trouvera

$$x = \frac{3}{a_1^2} \left\{ -\frac{1}{6} a_1 a_2 + \sqrt{\left(\frac{a_3 a_1^3}{27} - \frac{1}{4 \cdot 27} a_2^2 a_1^2 \right) \cdot \sqrt{-3}} - 3 \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a_2}{a_1} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1} \right)},$$

$$x = \frac{3}{a_1^2} \left\{ -\frac{1}{6} a_1 a_2 - \sqrt{\left(\frac{a_3 a_1^3}{27} - \frac{1}{4 \cdot 27} a_2^2 a_1^2 \right) \cdot \sqrt{-3}} - 3 \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a_2}{a_1} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2} - \frac{a_3}{a_1} \right)},$$

valeurs, qui, comme l'on sait, sont en effet les racines de l'équation du second degré:

$$a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

II. Auflösung von einem Ungenannten, mitgetheilt von Herrn Professor Dr. Lehmann zu Berlin.

Aus der Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

folgt, wenn man $z - \frac{b}{3a}$ für x schreibt:

$$z^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2} \cdot z + \frac{2b^3 - 9abc + 27a^3d}{27a^3} = 0;$$

oder, $\frac{3ac - b^2}{3a^2} = p$ und $\frac{2b^3 - 9abc + 27a^3d}{27a^3} = q$ gesetzt:

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Wird nun z durch $u - \frac{\frac{1}{3}p}{u}$ ausgedrückt, so erhält man

$$u^3 = -\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 \right)};$$

folglich

$$z = \frac{3u^2 - p}{3u}$$

und

$$x = z - \frac{b}{3a} = \frac{3au^2 - pa - bu}{3au},$$

und es ist die Frage, welchen Werth $x = F(a) = \frac{3au^2 - pa - bu}{3au}$ für $a = 0$ annimmt, d. h. wie groß $F(0)$ ist.

Um sie zu beantworten, setze man die Werthe für p und q in den Ausdruck für u^3 , so erhält man

$$u^3 = \frac{-b^3 + \frac{9}{2}bca - \frac{27}{2}da^2 \pm 3a\sqrt{[3b^2(bd - \frac{1}{4}c^2) + 3c(c^2 - \frac{9}{2}bd)a + \frac{81}{4}d^2a^2]}}{27a^3},$$

oder, $\frac{9}{2}bc$ durch A ; $\frac{27}{2}d$ durch B ; $3b^2(bd - \frac{1}{4}c^2)$ durch P ; $3c(c^2 - \frac{9}{2}bd)$ durch Q und $\frac{81}{4}d^2$ durch R bezeichnet:

$$u^3 = \frac{-b^3 + A \cdot a - Ba^2 \pm 3a\sqrt{(P + Qa + Ra^2)}}{27a^3};$$

also, wenn der Zähler dieses Ausdrucks $= v^3$ gesetzt wird:

$$u = \frac{v}{3a};$$

worinnen

$$v^3 = -b^3 + Aa - Ba^2 \pm 3a\sqrt{(P + Qa + Ra^2)} \text{ ist.}$$

Substituirt man nun $\frac{v}{3a}$ für u und $\frac{3ac - b^2}{3a^2}$ für p in

$$x = Fa = \frac{3au^2 - pa - bu}{3au},$$

so entsteht

$$x = \frac{v^2 - bv - 3ac + b^2}{3av}.$$

Für $a=0$ wird aber $v^3 = -b^3$; und hieraus entspringen 3 Werthe für v :

1. $v = -1.b,$
2. $v = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}.b,$
3. $v = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}.b.$

ad 1. Für den ersten Werth von v wird der Zähler

$$v^2 - bv - 3ac + b^2$$

des Werths von x gleich

$$b^2 + b^2 - 3.0.c + b^2 = 3b^2,$$

der Nenner aber $= 0$; folglich

$$x = \frac{3b^2}{0} = \infty.$$

Dieses Resultat erklärt sich leicht folgendergestalt:

Aus der Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

entspringt

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0,$$

und es ist also $-\frac{d}{a}$ das Product der 3 Wurzeln derselben. Für $a=0$ wird aber dieses Product unendlich groß, also muß nothwendig wenigstens eine dieser 3 Wurzeln unendlich groß sein, wenn $a=0$ ist.

ad 2. Für den zweiten Werth von v , nemlich für $v = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, wird der Zähler

$$v^2 - bv - 3ac + b^2$$

des Werths von x gleich

$$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.b^2 - \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}b^2 - 3.0.c + b^2 = 0;$$

der Nenner auch $= 0$, also $x = \frac{0}{0} =$ unbestimmt. Um den wahren Werth zu finden, entspringt auf dem gewöhnlichen Wege:

$$x = \frac{2v \cdot \frac{\partial v}{\partial a} - b \frac{\partial v}{\partial a} - 3c}{3a \cdot \frac{\partial v}{\partial a} + 3v} \quad \text{für } a = 0.$$

Es ist aber aus $v^3 = -b^3 + Aa - Ba^2 \pm 3a\sqrt{P + Qa + Ra^2}$:

$$3v^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial a} = A - 2Ba \pm 3a \cdot \frac{Q + 2Ra}{2\sqrt{P + Qa + Ra^2}} \pm 3\sqrt{P + Qa + Ra^2},$$

also, für $a = 0$,

$$3 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^2 b^2 \cdot \frac{\partial v}{\partial a} = A \pm 3\sqrt{P} = \frac{3}{2}bc \pm 3\sqrt{3b^2(bd - \frac{1}{4}c^2)};$$

folglich, für $a = 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{3c \pm \sqrt{12bd - 3c^2}}{b(-1 + \sqrt{-3})},$$

und demnach, für $a = 0$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(2v - b) \cdot \frac{3c \pm \sqrt{12bd - 3c^2}}{b(-1 + \sqrt{-3})} - 3c}{3 \cdot v} \\ &= \frac{b\sqrt{-3} \cdot \frac{3c \pm \sqrt{12bd - 3c^2}}{b(-1 + \sqrt{-3})} - 3c}{3 \cdot \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} \cdot b} \\ &= \frac{3c \pm \sqrt{9c^2 - 36bd}}{-6b} = -\frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4b^2} - \frac{d}{b}\right)}. \end{aligned}$$

ad 3. Für den 3ten Werth von v erhält man eben so

$$x = -\frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4b^2} - \frac{d}{b}\right)};$$

welches wirklich die beiden Wurzeln der Gleichung $bx^2 + cx + d = 0$

oder $x^2 + \frac{c}{b}x + \frac{d}{b} = 0$ sind.

34.

Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré.

(Par Mr. *Lejeune Dirichlet*, professeur en mathématiques.)

Lu à l'académie royale des sciences (institut de France), le 11. Juillet 1825, par l'auteur.

(D'après le rapport de MM. *Lacroix* et *Legendre*, ce mémoire a été approuvé, et doit être imprimé dans le recueil des mémoires de savans étrangers *).)

On sait que la théorie des équations indéterminées des degrés supérieurs au second, est encore très peu avancée; il est vrai qu'il y a une infinité d'équations de tous les degrés dont on peut démontrer l'impossibilité en faisant voir que quelles que soient les valeurs que l'on attribue aux indéterminées, les deux membres de l'équation proposée ne peuvent jamais donner le même reste lorsqu'on les divise par un certain nombre ou module; mais lorsqu'une équation ne peut pas être traitée par ce moyen, il devient difficile de prouver qu'elle est impossible, et on n'y est parvenu, jusqu'à présent, que pour un très petit nombre d'équations. Toutes ces équations sont très particulières, et d'une forme telle, que lorsqu'on cherche à les résoudre, on est naturellement conduit à une ou plusieurs formules quadratiques qu'il s'agit d'égaliser à des puissances parfaites. On satisfait ensuite de la manière la plus générale à cette condition, en exprimant les indéterminées par d'autres indéterminées, dont les premières deviennent des fonctions entières, et il se trouve, du moins dans tous les cas où la méthode dont il est question réussit, que les nouvelles indéterminées ou d'autres quantités qui en dépendent d'une manière très simple, satisfont également à une équation semblable à l'équation proposée. Comme les nouvelles indéterminées sont en même temps plus petites que les indéterminées primitives, l'impossibilité de l'équation proposée se trouve établie; car il est évident que si elle était possible, on aurait le moyen d'obtenir une suite décroissante et indéfinie de nombres entiers, ce qui implique contradiction. C'est de cette manière que *Fermat* et *Euler* ont prouvé l'impossibilité de plusieurs équations du troisième et du quatrième degré.

*) Ce mémoire n'a pas encore été publié jusqu'ici.

(Note d. red.)

En essayant d'appliquer des considérations semblables à quelques équations du cinquième degré et d'une forme analogue à celles des équations traitées par Fermat et Euler, on est arrêté tout aussitôt. La formule quadratique à laquelle on arrive, et qu'il faut égaler à une cinquième puissance, admet plusieurs solutions différentes, et parmi ces solutions, il n'y en a qu'une seule qui conduise à une équation semblable à l'équation proposée. En réfléchissant à cette difficulté, j'ai reconnu qu'elle pouvait être levée très simplement en assujettissant à quelques conditions le nombre déterminé qui entre dans l'équation. Il résulte d'un théorème exposé dans les préliminaires, que lorsque ces conditions se trouvent remplies, les différentes solutions dont la formule quadratique est susceptible, en général, doivent être rejetées, à l'exception d'une seule, qui est précisément celle de laquelle on déduit des nombres qui satisfont à une équation semblable à l'équation proposée. On parvient ainsi à établir l'impossibilité d'une classe assez étendue d'équations indéterminées du cinquième degré. Le premier membre de ces équations est la somme ou la différence de deux cinquièmes puissances, et le second membre est le produit d'une cinquième puissance et d'un nombre déterminé assujetti à différentes conditions. En attribuant à ce nombre des valeurs particulières compatibles avec ces conditions, on peut obtenir autant de théorèmes particuliers que l'on veut. Cette généralité de nos théorèmes est d'autant plus singulière, que les équations analogues du troisième et du quatrième degré, dont l'impossibilité a été démontrée jusqu'à présent, ne sont qu'en nombre fini et même très petit.

Théorème I.

„Soit l un nombre premier impair non-diviseur du nombre a et supposons que l'on ait $\delta^2 - a\varepsilon^2 = l$ (1.); on satisfera, comme on sait, à l'équation $d^2 - ae^2 = l^n$ (2.) par les nombres d et e que donne la formule $(\delta + \varepsilon\sqrt{a})^n = d + e\sqrt{a}$ (3.), lorsqu'on y égale les parties rationnelles et les coefficients de $\sqrt{a}$; je dis de plus que les nombres d et e ainsi obtenus seront premiers entre eux*.)”

*) Si le nombre l , au lieu d'être premier, était un nombre impair quelconque et que les nombres δ et $a\varepsilon$ fussent premiers entre eux, les nombres d et ae seraient également premiers entre eux, comme il est facile de s'en assurer par un raisonnement parfaitement semblable à celui dont nous faisons usage dans le texte.

Il est évident, par l'équation (2.), que si les nombres d et e avaient un diviseur commun, ce ne pourrait être que le nombre l ou une puissance de ce nombre. Il suffira donc de faire voir que d n'est pas divisible par l . La formule (3.) donne cette valeur de d :

$$d = \delta^n + \frac{n(n-1)}{1.2} a \delta^{n-2} \varepsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} a^2 \delta^{n-4} \varepsilon^4 + \text{etc.}$$

D'un autre côté on conclut de l'équation (1.), en se servant du signe employé par M. Gauss

$$\delta^2 \equiv a \varepsilon^2, \quad \delta^4 \equiv a^2 \varepsilon^4, \quad \delta^6 \equiv a^3 \varepsilon^6, \quad \dots \pmod{l},$$

et en multipliant respectivement par δ^{n-2} , δ^{n-4} , $\dots$

$$\delta^n \equiv a \delta^{n-2} \varepsilon^2, \quad \delta^n \equiv a^2 \delta^{n-4} \varepsilon^4, \quad \dots \pmod{l}.$$

En combinant ces congruences avec l'équation qui donne d , on aura

$$d \equiv \delta^n \left(1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \text{etc.} \right),$$

ou ce qui est la même chose, la quantité entre les crochets étant le développement de $\frac{1}{2}[(1+1)^n + (1-1)^n]$ et par conséquent égale à 2^{n-1} ,

$$d \equiv 2^{n-1} \delta^n \pmod{l}.$$

Il est maintenant facile de voir que d n'est pas divisible par l , car il faudrait pour cela que δ fut divisible par l ; mais la seule inspection de l'équation (1.) montre que cela est impossible, δ et ε étant évidemment premiers entre eux et a non divisible par l .

Théorème II.

„La lettre l désignant un nombre premier impair non-diviseur de a , si l'on suppose que l'on ait $d^2 - a e^2 = l^n$ (4.), $d'^2 - a e'^2 = l^n$ (5.), les nombres d et e ; d' et e' étant premiers entre eux, je dis que l'on pourra trouver deux nombres t et u satisfaisant à l'équation $t^2 - a u^2 = 1$ (6.) et en outre tels que l'on ait $(d' \pm e' \sqrt{a})(t \pm u \sqrt{a}) = d \pm e \sqrt{a}$ (7.), les signes étant convenablement choisis et les parties rationnelles et les coefficients de $\sqrt{a}$ égaux séparément.”

Les équations (4.) et (5.) donnent immédiatement

$$d^2 \equiv a e^2, \quad d'^2 \equiv a e'^2, \pmod{l^n},$$

on conclut de là en multipliant membre par membre:

$$d^2 d'^2 \equiv a^2 e^2 e'^2 \pmod{l^n},$$

et en transposant

$$d^2 d'^2 - a^2 e^2 e'^2 \equiv (d d' + a e e')(d d' - a e e') \equiv 0 \pmod{l^n}.$$

On voit par cette congruence qu'un des nombres $dd' + aee'$, $dd' - aee'$ est divisible par l^n ou qu'ils sont l'un et l'autre divisibles par l^*).

Mais il est facile de voir que ce dernier cas est impossible; en effet, si ces nombres étoient tous les deux divisibles par l , leur somme $2dd'$ le serait également; il faudrait donc, dans ce cas, qu'un des nombres d , d' fut divisible par l ; mais on s'assurera facilement que cela ne saurait être, en ayant égard aux suppositions faites dans l'énoncé du théorème. L'expression $\frac{dd' \pm aee'}{l^n}$ avec le signe convenable sera donc un entier. Nous ferons, pour plus de simplicité, $i = \pm 1$, i étant choisi de manière à rendre entière l'expression précédente.

Si l'on multiplie membre par membre les équations (4.) et (5.), on aura celle-ci

$$(dd' \pm aee')^2 - a(d'e \pm de')^2 = e^{2n},$$

dans laquelle on peut prendre à volonté les signes supérieurs ou les signes inférieurs. On a donc aussi

$$(dd' + iaee')^2 - a(d'e + ide')^2 = l^{2n}.$$

Le nombre $dd' + iaee'$ étant divisible par l^n , et a n'étant pas divisible par l , on voit, par l'équation précédente, que $d'e + ide'$ est également divisible par l^n . Cela posé, je dis qu'on aura

$$t = \frac{dd' + iaee'}{l^n}, \quad u = \frac{i'(d'e + ide')}{l^n},$$

i' étant 1, ou -1 selon que la quantité entre les paranthèses est positive ou négative. En effet, on aura en divisant les deux nombres de l'équation donnée plus haut par l^{2n} ,

$$\left(\frac{dd' + iaee'}{l^n}\right)^2 - a\left(\frac{d'e + ide'}{l^n}\right)^2 = 1,$$

ou ce qui est la même chose, $t^2 - au^2 = 1$, et on s'assurera facilement par la substitution que les valeurs précédentes de t et u satisfont aussi à l'équation (7.), en y déterminant les signes de cette manière

$$(d' - ie'\sqrt{a})(t + i'u\sqrt{a}) = d + e\sqrt{a}.$$

Remarque. Comme il est évident qu'on peut changer simultanément les signes de e' , u , e dans l'équation

$$(d' \pm e'\sqrt{a})(t \pm u\sqrt{a}) = d + e\sqrt{a},$$

*) Dans le cas de $n = 1$, la première hypothèse est comprise dans la seconde et a par conséquent nécessairement lieu; mais le même raisonnement prouverait toujours l'impossibilité de la seconde.

on voit que l'on peut poser

$$(d' \pm e' \sqrt{a})(t \pm u \sqrt{a}) = (d \pm e \sqrt{a}),$$

le signe de e étant à volonté et les signes de e' et u étant convenablement choisis.

Théorème III.

„La lettre l désignant un nombre premier impair non-diviseur de a et k un nombre impair qui n'a pas de diviseur commun avec a et qui n'est pas divisible par l , si nous supposons que l'on ait ces deux équations $D^2 - aE^2 = l^n k$, $d^2 - ae^2 = l^n$, et que les nombres D et E ; d et e soient premiers entre eux, je dis que l'on pourra trouver deux nombres D' et E' , premiers entre eux, satisfaisant à l'équation $D'^2 - 5E'^2 = k$, et en outre tels que l'on ait

$$(D' \pm E' \sqrt{a})(d \pm e \sqrt{a}) = D \pm E \sqrt{a},$$

les signes étant convenablement choisis et les parties rationnelles et les coefficients de $\sqrt{a}$ étant égalés séparément.”

La démonstration de ce théorème est tellement semblable à celle du théorème II. que nous nous dispenserons de la développer ici.

Il y a ici une remarque semblable à faire et l'on voit très facilement que l'on peut poser

$$(D' \pm E' \sqrt{a})(d \pm e \sqrt{a}) = D \pm E \sqrt{a},$$

le signe de E étant à volonté et les signes de E' et e étant convenablement choisis.

Les théorèmes que nous venons d'établir et qui peuvent être utiles dans plusieurs occasions, vont nous servir maintenant à établir une proposition relative à la manière de rendre le binome $P^2 - 5Q^2$, dans lequel P et Q sont des nombres indéterminés soumis à la restriction d'être premiers entre eux, égal à une cinquième puissance. Cette proposition consiste en ce que, pour égaliser le binome $P^2 - 5Q^2$ de la manière la plus générale à une cinquième puissance impaire et non-divisible par 5, on n'a qu'à poser

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5(t \pm u\sqrt{5}),$$

M et N étant de nouvelles indéterminées soumises à la seule restriction d'être premières entre elles, l'une paire, l'autre impaire et la première de plus non-divisible par 5; et les lettres t et u désignant la solution générale de l'équation $t^2 - 5u^2 = 1$; ce qui veut dire que toutes les fois que P et Q étant premiers entre eux, le binome $P^2 - 5Q^2$ est une cin-

quième puissance impaire non-divisible par 5, il existe des nombres M et N premiers entre eux et tels qu'on ait

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (t \pm u\sqrt{5}),$$

t et u satisfaisant à l'équation $t^2 - 5u^2 = 1$.

Pour nous assurer de la vérité de cette proposition, posons $P^2 - 5Q^2 = L$, L désignant une cinquième puissance impaire, non-divisible par 5 et voyons ce qui en résulte sur la nature des nombres P et Q . Désignons par l l'un quelconque des diviseurs premiers de L et soit l^{5n} la puissance la plus élevée de l , qui divise L , de sorte qu'en faisant $L = l^{5n} L'$, L' soit premier à l . Il résulte d'un théorème connu, que le nombre l qui divise $P^2 - 5Q^2$ sera lui même de la forme $\delta^2 - 5\varepsilon^2$. Si nous posons maintenant

$$(\delta + \varepsilon\sqrt{5})^n = d + e\sqrt{5}, \quad (\delta + \varepsilon\sqrt{5})^{5n} = D + E\sqrt{5},$$

d et e , D et E seront premiers entre eux en vertu du théorème I., et l'on aura l'équation

$$(d + e\sqrt{5})^5 = D + E\sqrt{5}.$$

Si l'on applique ensuite le théorème III. aux équations

$$D^2 - 5E^2 = l^{5n}, \quad P^2 - 5Q^2 = l^{5n} L',$$

qui se déduisent immédiatement de ce qui précède, on verra qu'il existe des nombres P' et Q' , premiers entre eux et tels qu'on ait

$$P'^2 - 5Q'^2 = L', \quad P + Q\sqrt{5} = (D \pm E\sqrt{5})(P' \pm Q'\sqrt{5}),$$

ou ce qui revient au même en remplaçant $D + E\sqrt{5}$ par $(d + e\sqrt{5})^5$,

$$P + Q\sqrt{5} = (d \pm e\sqrt{5})^5 (P' \pm Q'\sqrt{5}).$$

L'équation $P'^2 - 5Q'^2 = L'$ à laquelle nous venons de parvenir, est entièrement analogue à l'équation $P^2 - 5Q^2 = L$, car le nombre L' que l'on obtient en divisant L par l^{5n} est une cinquième puissance, comme L . Supposons pour un instant que la proposition que nous cherchons à démontrer soit vraie pour l'équation $P'^2 - 5Q'^2 = L'$, et voyons comment on pourrait en conclure qu'elle a également lieu pour le binôme $P^2 - 5Q^2$. Dans la supposition que nous venons de faire, il existe des nombres M' et N' tels qu'on ait

$$P + Q\sqrt{5} = (M' \pm N'\sqrt{5})^5 (t \pm u\sqrt{5}).$$

En mettant cette valeur de $P' + Q'\sqrt{5}$ dans l'équation obtenue plus haut et dont le premier membre renferme $P + Q\sqrt{5}$, il viendra celle-ci:

$$P + Q\sqrt{5} = (M' \pm N'\sqrt{5})^5 (d \pm e\sqrt{5})^5 (t \pm u\sqrt{5}),$$

dans laquelle les signes dépendent de ceux qui se trouvent dans les deux

équations dont la combinaison l'a produite. Si nous posons maintenant

$$(M' \pm N' \sqrt{5})(d \pm e \sqrt{5}) = M \pm N \sqrt{5},$$

le signe de N étant $+$ ou $-$, selon que le coefficient de $\sqrt{5}$, dans la valeur développée du premier nombre est positif ou négatif, l'équation précédente se changera en celle-ci :

$$P + Q \sqrt{5} = (M \pm N \sqrt{5})^5 (t \pm u \sqrt{5}),$$

qui est conforme à l'énoncé de la proposition dont nous nous occupons.

Ayant ainsi fait voir que la proposition en question est vraie pour le binôme $P^2 - 5Q^2$ égal à la cinquième puissance L , si elle est supposée avoir lieu pour le binôme $P'^2 - 5Q'^2$, égal à la cinquième puissance L' , qui a un diviseur premier de moins que L , il ne reste, pour rendre la démonstration complète, qu'à prouver la vérité de notre proposition pour le cas où le binôme $P^2 - 5Q^2$ est une cinquième puissance qui n'a qu'un seul diviseur premier l . Or, c'est ce qu'il est très facile de faire en s'appuyant sur le théorème II. En effet, dans le cas que nous venons d'énoncer, on a $P^2 - 5Q^2 = l^{5n}$; d'un autre côté, le nombre l pouvant être mis sous la forme $\delta^2 - 5\varepsilon^2$, si l'on fait

$$(\delta + \varepsilon \sqrt{5})^n = M + N \sqrt{5}, \quad (\delta + \varepsilon \sqrt{5})^{5n} = D + E \sqrt{5},$$

l'on aura aussi

$$D + E \sqrt{5} = (M + N \sqrt{5})^5, \quad D^2 - 5E^2 = l^{5n},$$

D et E étant premiers entre eux en vertu du théorème I. Cela posé, il résulte immédiatement de l'application du théorème II. aux équations

$$P^2 - 5Q^2 = l^{5n}, \quad D^2 - 5E^2 = l^{5n},$$

qu'on a la relation

$$P + Q \sqrt{5} = (D \pm E \sqrt{5})(t \pm u \sqrt{5}),$$

t et u satisfaisant à l'équation $t^2 - 5u^2 = 1$ et les signes étant convenablement choisis; ou, ce qui revient au même, en mettant $(M \pm N \sqrt{5})^5$ à la place de $D \pm E \sqrt{5}$,

$$P + Q \sqrt{5} = (M \pm N \sqrt{5})^5 (t \pm u \sqrt{5})$$

résultat conforme à l'énoncé de notre proposition. Il est ainsi prouvé que toutes les fois que $P^2 - 5Q^2$ est une cinquième puissance impaire, il existe des nombres M et N qui satisfont à la formule précédente. Quant à l'inverse de cette proposition, savoir qu'en attribuant dans la formule précédente à M et N des valeurs soumises aux seules restrictions déjà plusieurs fois énoncées, on obtiendra des nombres P et Q premiers entre eux et tels que $P^2 - 5Q^2$ soit une cinquième puissance; la démonstra-

tion en est tellement simple qu'il est inutile de nous y arrêter. — Au moyen de ce qui précède il sera facile d'établir le théorème que nous allons énoncer et qui servira de base aux propositions qui font l'objet principal de ce mémoire.

Théorème IV.

„Les nombres P et Q devant être premiers entre eux, l'un pair, l'autre impair, et le dernier devant être de plus divisible par 5, je dis que pour égaler le binôme $P^2 - 5Q^2$ de la manière la plus générale à une cinquième puissance, il suffira de poser

$$P + Q\sqrt{5} = (\varphi + \psi\sqrt{5})^5.$$

Les indéterminées φ et ψ étant premières entre elles, l'une paire, l'autre impaire, et la première de plus non-divisible par 5*).

Pour égaler $P^2 - 5Q^2$ à une cinquième puissance, nous poserons, d'après ce qui vient d'être dit,

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (t \pm u\sqrt{5}).$$

M n'étant pas divisible par 5, si nous faisons pour un instant

$$(M \pm N\sqrt{5})^5 = M' \pm N'\sqrt{5},$$

il sera facile de voir que N' est divisible par 5, et que M' ne l'est pas. En substituant l'expression précédente dans la valeur de $P + Q\sqrt{5}$, on aura

$$P + Q\sqrt{5} = (M' \pm N'\sqrt{5})(t \pm u\sqrt{5}),$$

d'où l'on tire

$$Q = \pm M'u \pm N't.$$

N' étant divisible par 5, et M' ne l'étant pas, il est évident que Q ne pourra être divisible par 5, qu'autant que u le sera. Les valeurs les plus petites qui satisfassent à l'équation

$$t^2 - 5u^2 = 1,$$

sont celles-ci,

$$t = 9, \quad u = 4.$$

Les valeurs générales seront par conséquent données par cette formule,

$$t + u\sqrt{5} = (9 + 4\sqrt{5})^p,$$

dans laquelle p est un nombre entier, positif quelconque**); on tire de là

$$u = \frac{p}{1} 9^{p-1} \cdot 4 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 9^{p-3} \cdot 4^3 \cdot 5 + \text{etc.}$$

*) Il n'est peut-être pas inutile de faire remarquer qu'il y a des théorèmes analogues pour beaucoup d'autres nombres premiers, et que pour les établir, on peut faire usage des mêmes considérations dont nous nous servons ici.

**) Voyez les Additions à l'Algèbre d'Euler (art. 75.).

Tous les termes de cette valeur, à partir du second, étant divisibles par 5, quel que soit p , on voit que pour que u puisse être divisible par 5, il faut que le premier terme, et par conséquent aussi p , soit divisible par 5. Si nous faisons donc $p = 5p'$, p' étant un entier, et que nous substituions la valeur de $t + u\sqrt{5}$ dans celle de $P + Q\sqrt{5}$, nous aurons

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (9 \pm 4\sqrt{5})^{5p'},$$

résultat qui, par l'introduction des nouvelles indéterminées, ϕ et ψ qui sont telles que

$$(M \pm N\sqrt{5})(9 \pm 4\sqrt{5})^{p'} = \phi + \psi\sqrt{5},$$

se change en celui-ci,

$$P + Q\sqrt{5} = (\phi + \psi\sqrt{5})^5.$$

La forme de la solution donnée par l'énoncé du théorème se trouvant ainsi justifiée, il ne reste plus qu'à déterminer la nature des indéterminées.

Comme on a

$$P^2 - 5Q^2 = (\phi^2 - 5\psi^2)^5,$$

et que les nombres P et Q sont respect. divisibles par ϕ et ψ , on voit facilement que les indéterminées ϕ et ψ , doivent être supposées premières entre elles, l'une paire, l'autre impaire, et la première de plus non-divisible par 5. On peut même ajouter que ϕ ou ψ sera impaire selon que P et Q l'est. Réciproquement, si les indéterminées ϕ et ψ satisfont aux conditions précédentes, les nombres P et Q déterminés par la formule

$$P + Q\sqrt{5} = (\phi + \psi\sqrt{5})^5,$$

seront premiers entre eux, comme il est facile de s'en assurer. Ces préliminaires établis, nous pourrions nous occuper des théorèmes qui font l'objet principal de ce Mémoire. Le premier de ces théorèmes peut s'énoncer de la manière suivante.

Théorème V.

„Les nombres m et n étant positifs, plus grands que zéro, et le second de plus différent de 2, et le nombre B n'étant divisible ni par 2 ni par 5, ni par aucun nombre premier de la forme $10k + 1$, il sera impossible de trouver deux nombres x et y premiers entre eux, tels que $x^5 \pm y^5 = 2^m 5^n A z^5 (\alpha)$.”

Supposons, contre l'énoncé du théorème, que l'équation soit possible. Comme le second membre est pair (m ayant été supposé > 0), il faut

que les nombres x et y , qui sont premiers entre eux, soient impairs l'un et l'autre. Si nous faisons $x \pm y = 2p$, $x \pm y = 2q$, et par suite

$$x = p + q, \quad \pm y = p - q,$$

les nombres p et q seront entiers, premiers entre eux, et de plus l'un pair, l'autre impair. En substituant les valeurs précédentes de x et $\pm y$ dans l'équation (α), on la changera en celle-ci:

$$2p(p^4 + 10p^2q^2 + 5q^4) = 2^m 5^n Az^5.$$

Le premier membre ne peut être égal au second membre, qui est divisible par 5, qu'autant qu'on suppose p divisible par 5. Faisant donc $p = 5r$, nous aurons

$$2.5^2r(q^2 + 2.5^2q^2r^2 + 5^3r^4) = 2^m 5^n Az^5.$$

Le nombre n est par hypothèse égal à l'unité ou plus grand que 2. Si n est égal à l'unité, il faudra, dans l'équation précédente, supposer z divisible par 5. On pourra, dans ce cas, mettre $5z$ à la place de z , ou, ce qui est la même chose, donner à 5 l'exposant 6, d'où l'on voit que l'on peut supposer dans tous les cas, $n > 2$. Si l'on met maintenant l'équation précédente sous cette forme,

$$r(q^2 + 2.5^2q^2r^2 + 5^3r^4) = 2^{m-1}5^{n-2}Az^5,$$

et qu'on se rappelle que les nombres q et $p = 5r$, sont premiers entre eux, et de plus, l'un pair, l'autre impair, il sera facile de voir que le facteur trinome est impair, non-divisible par 5, et premier à r ; il faut donc que r soit divisible par 5, n étant > 2 . Choisissons actuellement deux nombres positifs, μ et ν , tels que *) $m + \mu - 1$, $n + \nu - 2$, soient divisibles par 5, et un nombre B qui n'ait d'autres diviseurs premiers que le nombre A , et tel que le produit AB soit une cinquième puissance. Si nous multiplions l'équation précédente par $2^\mu 5^\nu B$, nous aurons celle-ci:

$$2^\mu 5^\nu Br(q^2 + 2.5^2q^2r^2 + 5^3r^4) = 2^{m+\mu-1}5^{n+\nu-2}ABz^5.$$

Le second membre de cette équation étant une cinquième puissance, le premier membre en sera pareillement une. Or, je dis que les deux facteurs dans lesquels ce premier membre peut se décomposer, le facteur $2^\mu 5^\nu Br$ et le facteur trinome, sont premiers entre eux. En effet, nous avons déjà vu plus haut que le facteur trinome est premier à $2^\mu 5^\nu r$, et il résulte d'un autre côté des théorèmes connus d'Euler sur la forme linéaire des diviseurs premiers de la formule $x^n \pm y^n$ (*Théorie des nom-*

*) Si $m - 1$ était divisible par 5, on choisirait pour μ une autre valeur que zéro pour éviter les exposants négatifs dans ce qui va suivre.

bres, no. 156.) que le facteur trinome, dans lequel q et r n'ont pas de diviseur commun, n'est divisible que par des nombres premiers de la forme $10k+1$, qui d'après les suppositions faites dans l'énoncé du théorème ne convient à aucun des diviseurs de A , et par conséquent aussi de B , B n'ayant pas d'autres diviseurs premiers que A . Il faut donc que le nombre $2^\mu 5^\nu Br$ et le facteur trinome soient de cinquièmes puissances l'un et l'autre.

Le facteur trinome pouvant s'écrire de cette manière,

$$(q^2 + 5^2 r^2)^2 - 5(10r^2)^2,$$

et les nombres $q^2 + 5^2 r^2$, $10r^2$ étant premiers entre eux, le premier impair et le second pair et divisible par 5, il suffira, en vertu du théorème I., pour égaler le facteur trinome avec toute la généralité convenable à une cinquième puissance, de poser ces deux équations,

$$\begin{aligned} q^2 + 5^2 r^2 &= t(t^2 + 2 \cdot 5^2 t^2 s^2 + 5^3 s^4), \\ 10r^2 &= 5s(t^2 + 10t^2 s^2 + 5s^4). \end{aligned}$$

Les nombres s et t doivent être supposés premiers entre eux, et de plus le premier pair et le second impair et non-divisible par 5. Il suit de là que s doit être divisible par 5; en effet t n'étant pas divisible par 5, le second nombre de la seconde équation ne peut être divisible par 5^2 qu'autant que s est divisible par 5; mais le premier nombre qui a r^2 pour facteur, est divisible par 5^2 ; donc s est divisible par 5.

Nous avons vu plus haut que $2^\mu 5^\nu Br$ devait être une cinquième puissance. Le nombre $2^{2\mu} 5^{2\nu} B^2 r^2$, carré du nombre précédent, devra donc être une puissance du même degré, et même du dixième degré. Or, en multipliant par $2^{2\mu-1} 5^{2\nu-1} B^2$ les deux membres de la dernière équation, on aura celle-ci:

$$2^{2\mu} 5^{2\nu} B^2 r^2 = 2^{2\mu-1} 5^{2\nu} B^2 s(t^2 + 10t^2 s^2 + 5s^4).$$

Si donc nous faisons pour abrégé, $2\mu-1=g$, $2\nu=h$, $B^2=C$, tout se réduira à faire voir qu'il est impossible de trouver deux nombres s et t premiers entre eux, et dont le premier soit de plus pair et divisible par 5, tels que le produit

$$2^g 5^h C s(t^2 + 10t^2 s^2 + 5s^4) \quad (\beta)$$

soit une cinquième puissance.

En ayant égard à la nature des diviseurs premiers de C , on s'assurera facilement que le facteur $2^g 5^h C s$ et le facteur trinome sont premiers entre eux. Il faudrait donc, pour que le produit (β) pût être une

cinquième puissance, que chacun de ces facteurs en fût pareillement une. Le facteur trinome peut s'écrire de cette manière:

$$(t^2 + 5s^2)^2 - 5(2s^2).$$

Comme les nombres $t^2 + 5s^2$, $2s^2$ sont évidemment premiers entre eux, et de plus le premier impair et le second pair et divisible par 5, le théorème I. est applicable ici, et l'on pourra poser

$$t^2 + 5s^2 = t'(t'^4 + 2 \cdot 5^2 t'^2 s'^2 + 5^3 s'^4),$$

$$2s^2 = 5s'(t'^4 + 10t'^2 s'^2 + 5s'^4).$$

Les nombres s' et t' doivent être supposés premiers entre eux, et de plus le premier pair et le second impair et non-divisible par 5. Comme t' n'est pas divisible par 5, il est évident par la seconde équation, dont le premier membre renferme le facteur s^2 , et est par conséquent divisible par 5^2 , que s' doit être divisible par 5. Ainsi, les nombres s' et t' sont premiers entre eux, de même que les nombres s et t , et le premier s' est en outre pair et divisible par 5 comme s .

Il est facile encore de voir que s' est plus petit que s ; car on conclut immédiatement la dernière équation $5^2 s'^4 < 2s^2$ et par suite

$$s' < \sqrt[5]{\left(\frac{2s^2}{25}\right)}.$$

On a vu plus haut que $2^g 5^h C s$ devait être une cinquième puissance. Le nombre $2^{2g} 5^{2h} C^2 s^2$, carré du précédent, devra donc être une puissance du même degré. Or, en multipliant les deux membres de la dernière équation par $2^{2g-1} 5^{2h} C^2$, on aura

$$2^{2g} 5^{2h} C^2 s^2 = 2^{2g-1} 5^{2h+1} C^2 s' (t'^4 + 10t'^2 s'^2 + 5s'^4),$$

ou ce qui est la même chose en faisant $2g-1 = g'$, $2h+1 = h'$, $C^2 = C'$, dans le second membre,

$$2^{2g} 5^{2h} C^2 s^2 = 2^{g'} 5^{h'} C' s' (t'^4 + 10t'^2 s'^2 + 5s'^4) \quad (\beta')$$

équation dont les deux membres doivent être des puissances du cinquième degré.

Nous voilà donc arrivés à un produit (β') semblable au produit (β) , mais dans lequel le nombre s' est plus petit que le nombre s du produit (β) , et ce produit (β') serait une cinquième puissance, si le produit (β) en était une. En traitant le produit (β') comme nous avons traité le produit (β) , on arriverait à un troisième produit (β'') , dans lequel le nombre s'' serait plus petit que s' , et l'on pourrait continuer ce procédé aussi loin que l'on voudrait. Il est facile de voir en outre que quelque

loin que l'on prolonge les séries $s, s', s'', \dots$; $t, t', t'', \dots$, on ne pourra jamais rencontrer un terme égal à zéro; car il est évident que si l'on supposait nul un de ces termes, on conclurait en remontant que $s = 0$, cas évident, et qui d'ailleurs est exclu, puisque les nombres s et t ont été supposés premiers entre eux.

Si donc le produit (β) pouvait être une cinquième puissance, on pourrait obtenir, par l'analyse précédente, une suite indéfinie de nombres entiers positifs, dans laquelle chaque terme serait plus petit que le terme précédent, sans qu'aucun des termes ne fût nul; ce qui implique contradiction. On doit conclure de là que le produit (β) ne saurait être une puissance du cinquième degré.

Le théorème V. se trouvant ainsi établi, nous allons donner le moyen d'en déduire un autre plus général. Considérons l'équation

$$x^5 \pm y^5 = 2^m A z^5,$$

dans laquelle nous supposons x et y premiers entre eux, $m > 0$, et A soumis aux mêmes restrictions que dans l'énoncé du théorème V. Soient α, β, γ des nombres positifs moindres que 5, et tels que $x \equiv \alpha, \pm y \equiv \beta, z \equiv \gamma \pmod{5}$ et soit encore H un nombre positif < 25 et tel que $2^m A \equiv H \pmod{25}$. Comme 5 est un nombre premier, on aura

$$x^5 \equiv x, y^5 \equiv y, z^5 \equiv z, \pmod{5}.$$

On conclut de là, en ayant égard à l'équation posée plus haut,

$$x \pm y \equiv 2^m A z \pmod{5},$$

et partant

$$\alpha + \beta \equiv H \gamma \pmod{5}.$$

Comme α est le reste de x , on pourra poser $x = \alpha + 5k$, k étant un entier; on tire de là, en élevant les deux membres à la cinquième puissance,

$$x^5 = \alpha^5 + 5.\alpha^4(5k) + \frac{5.4}{1.2}\alpha^3(5k)^2 + \text{etc.},$$

on aura donc

$$x^5 \equiv \alpha^5 \pmod{25}.$$

On trouvera de la même manière $\pm y^5 \equiv \beta^5, z^5 \equiv \gamma^5 \pmod{25}$, et comme on a aussi $2^m A \equiv H \pmod{25}$, on trouvera, en ayant égard à l'équation citée,

$$\alpha^5 + \beta^5 \equiv H \gamma^5 \pmod{25}.$$

Si maintenant, en substituant dans cette congruence, successivement pour α, β , toutes les combinaisons que l'on peut former avec les

nombres positifs moindres que 5, et pour γ les valeurs correspondantes également moindres que 5, données par la formule

$$\alpha + \beta \equiv H\gamma \pmod{5},$$

on trouve que la congruence $\alpha^5 + \beta^5 \equiv H\gamma^5 \pmod{25}$ ne peut subsister que lorsque γ est nul, on sera assuré que l'équation

$$x^5 \pm y^5 = 2^m Az^5$$

ne peut avoir lieu, à moins qu'on ne suppose z divisible par 5. On pourra donc, dans ce cas, mettre $5z$ à la place de z , ce qui change notre équation en celle-ci:

$$x^5 \pm y^5 = 2^m 5^5 Az^5,$$

qui rentre évidemment dans le théorème II., et par conséquent est impossible. Or, ce cas a lieu toutes les fois que le nombre H est un des huit nombres suivans 3, 4, 9, 12, 13, 16, 21, 22, comme on peut s'en assurer par un calcul très simple. Nous avons donc ainsi ce nouveau théorème:

Théorème VI.

„Le nombres m et A étant soumis aux mêmes restrictions que dans l'énoncé du théorème II., si le nombre $2^m A$, étant divisé par 25, donne un des huit restes suivans, 3, 4, 9, 12, 13, 16, 21, 22, il sera impossible de trouver deux nombres x et y premiers entre eux, tels que l'on ait $x^5 \pm y^5 = 2^m Az^5$.”

Pour donner un exemple bien simple, considérons les deux équations: $x^5 \pm y^5 = 4z^5$, $x^5 \pm y^5 = 16z^5$.

Comme dans ces équations on peut, sans nuire à la généralité, supposer les nombres x et y premiers entre eux, il sera facile de voir qu'elles rentrent dans le théorème II. En effet, si l'on fait $A=1$, et successivement $m=2$, $m=4$, on aura respectivement

$$2^m A = 4, \quad 2^m A = 16.$$

Il est donc prouvé que les deux équations précédentes sont impossibles.

Considérons encore l'équation

$$x^5 \pm y^5 = z^5,$$

qui est une de celles que Fermat a assuré être impossibles. Par des considérations semblables à celles qui nous ont servi pour établir le théorème précédent, on peut s'assurer que cette équation ne saurait subsister, à moins qu'une des indéterminées x , y , z , ne soit divisible par 5. Soit z l'indéterminée divisible par 5, car il est évident qu'on peut faire

en sorte qu'une quelconque des indéterminées se trouve toute seule dans un membre. D'un autre côté, si l'on suppose ces indéterminées premières entre elles, l'une d'elles sera paire et les deux autres seront impaires. Si z était paire, on pourrait remplacer cette indéterminée par $2 \cdot 5 \cdot z$, ce qui changerait l'équation précédente en celle-ci :

$$x^5 \pm y^5 = 2^5 5^5 z^5,$$

qui est impossible, puisqu'elle rentre évidemment dans le théorème II. Il ne resterait donc qu'à traiter le cas où l'indéterminée divisible par 5, serait impaire; mais la méthode exposée dans ce Mémoire paraît insuffisante pour ce cas, et je ne vois pas comment on pourrait compléter la démonstration du cas particulier du théorème de Fermat, dont il vient d'être question.

Addition au Mémoire précédent.

Depuis que le Mémoire précédent a été présenté à l'Académie, M. Legendre a publié un second supplément à sa Théorie des Nombres, dans lequel il démontre l'impossibilité de l'équation

$$x^5 \pm y^5 = z^5.$$

Le cas de l'indéterminée divisible en même temps par 2 et par 5, est traité dans cet ouvrage comme dans le Mémoire précédent, et l'auteur prouve ensuite l'impossibilité de l'autre cas au moyen d'une analyse nouvelle. L'objet de cette addition est d'établir deux théorèmes nouveaux sur les équations indéterminées du cinquième degré et qui comprennent, comme cas particulier, le théorème de Fermat pour les cinquièmes puissances. J'y parviens en partant des résultats obtenus dans ce qui précède et en faisant usage d'une analyse qui diffère à plusieurs égards de celle de M. Legendre et entièrement analogue à la méthode qui est exposée dans le Mémoire précédent. On a vu que le succès de l'analyse que nous y avons employée, est fondé sur ce que, pour égaler à une cinquième puissance impaire le binome $P^2 - 5Q^2$, dans lequel doit être divisible par 5, il suffit de poser

$$P + Q\sqrt{5} = (\varphi + \psi\sqrt{5})^5,$$

parceque cette circonstance donne lieu à la reproduction continuelle de l'expression que nous avons appelée facteur trinome. En traitant les nouvelles équations qui font l'objet de cette addition on est également

conduit au binome $P^2 - 5Q^2$, Q étant toujours divisible par 5; mais il y a cette différence que les nombres P et Q , qui précédemment étaient l'un pair, l'autre impair, sont ici impairs tous les deux et que le binome $P^2 - 5Q^2$, qui dans l'autre cas devait être une cinquième puissance impaire, doit être égalé ici au quadruple d'une pareille puissance. Or, la formule qui satisfait de la manière la plus générale à cette dernière condition, est susceptible d'être rendue parfaitement semblable à celle qui sert à remplir la première; car j'ai remarqué qu'on peut la présenter de cette manière

$$P + Q\sqrt{5} = \frac{(\varphi + \psi\sqrt{5})^5}{16},$$

expression qui ne se distingue du résultat qu'on vient de rappeler qu'en ce que les indéterminées φ et ψ , au lieu d'être l'une paire, l'autre impaire, doivent être impaires toutes les deux. Dès qu'on a fait cette remarque et qu'en traitant les nouvelles équations qui vont nous occuper, on est arrivé au binome qu'il s'agit d'égaliser au quadruple d'une cinquième puissance, on voit d'un seul coup d'oeil qu'on doit réussir à prouver l'impossibilité de ces équations, en faisant usage d'un procédé tout à fait analogue à la marche que nous avons suivie dans la démonstration du théorème V. — Nous allons maintenant entrer en matière, en commençant par établir la proposition que nous avons déjà énoncée.

Les nombres P et Q , dont le premier est supposé n'être pas divisible par 5, étant impairs tous les deux, et n'ayant pas de diviseur commun, le nombre $P^2 - 5Q^2$ sera de la forme $8k + 4$, et l'on pourra faire

$$P^2 - 5Q^2 = 4L,$$

L étant un nombre impair et non-divisible par 5. Si nous multiplions membre par membre l'équation précédente et celle-ci:

$$3^2 - 5 \cdot 1^2 = 4,$$

nous aurons

$$(3P \pm 5Q)^2 - 5(P \pm 3Q)^2 = 16L.$$

Comme les nombres P et Q sont impairs tous les deux, il est évident qu'en déterminant convenablement le signe, les expressions

$$\frac{3P \pm 5Q}{4}, \quad \frac{P \pm 3Q}{4},$$

seront entières l'une et l'autre; faisant en conséquence

$$\frac{3P \pm 5Q}{4} = P', \quad \frac{P \pm 3Q}{4} = Q',$$

le signe en dehors de la parenthèse étant choisi de manière à donner une valeur positive pour Q' , l'équation obtenue plus haut se changera en celle-ci: $P'^2 - 5Q'^2 = L$, et l'on s'assurera facilement que l'on a

$$P + Q\sqrt{5} = (P' \pm Q'\sqrt{5})(3 \pm \sqrt{5}),$$

les signes étant convenablement choisis, et que les nombres P' et Q' sont premiers entre eux, et de plus l'un pair, l'autre impair.

Supposons maintenant que le nombre L doive être une cinquième puissance. On satisfera à cette condition de la manière la plus générale en posant

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (9 \pm 4\sqrt{5})^p.$$

En substituant cette valeur dans la dernière équation, on aura celle-ci:

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (9 \pm 4\sqrt{5})^p (3 \pm \sqrt{5}),$$

dans laquelle les signes sont indépendants, comme dans les deux équations précédentes. On peut faire $p = 5k \pm r$, k étant entier et positif, et r ayant une de ces trois valeurs, 0, 1, 2; la quantité $(9 \pm 4\sqrt{5})^p$ se décomposera ainsi en ces deux facteurs $(9 \pm 4\sqrt{5})^{5k}$ et $(9 \pm 4\sqrt{5})^{\pm r}$ dont le premier peut être omis parcequ'il rentre dans $(M \pm N\sqrt{5})^5$. Si nous observons de plus qu'en vertu de l'équation

$$9 \pm 4\sqrt{5} = (9 \mp 4\sqrt{5})^{-1},$$

on peut changer dans $(9 \pm 4\sqrt{5})^{\pm r}$ simultanément les signes de r et du radical, nous pouvons supposer le signe de r positif, et l'équation donnée plus haut deviendra

$$P + Q\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})^5 (9 \pm 4\sqrt{5})^r (3 \pm \sqrt{5}).$$

L devant toujours être la cinquième puissance d'un nombre impair et non-divisible par 5, déterminons les conditions nécessaires pour que Q soit divisible par 5. Comme le coefficient de $\sqrt{5}$ dans le développement de $(M \pm N\sqrt{5})^5$ est divisible par 5, et que la partie rationnelle de ce développement ne l'est pas, M n'étant pas divisible par 5, on conclut, comme dans la démonstration du théorème IV., que pour que Q puisse être divisible par 5, il faut que le coefficient de $\sqrt{5}$, dans la valeur développée de $(9 \pm 4\sqrt{5})^r (3 \pm \sqrt{5})$ le soit.

Or, en substituant pour r successivement les trois valeurs 0, 1, 2, on trouve que cela n'a lieu que dans le cas de $r = 2$, les signes des radicaux dans les deux facteurs $(9 \pm 4\sqrt{5})^r$ et $(3 \pm \sqrt{5})$ étant en même temps opposés. Si l'on fait attention que l'on a

$$\frac{(3 \pm \sqrt{5})^3}{2^3} = 9 \pm 4\sqrt{5} \quad \text{et} \quad 3 \mp \sqrt{5} = \frac{4}{3 \pm \sqrt{5}},$$

l'on trouvera que le produit précédent sera, dans le cas dont il s'agit, équivalent à

$$\frac{(3 \pm \sqrt{5})^5}{2^4},$$

valeur dont la substitution dans l'équation obtenue plus haut, la change en celle-ci :

$$P + Q\sqrt{5} = \frac{(M \pm N\sqrt{5})^5 (3 \pm \sqrt{5})^5}{2^4}.$$

Les nombres M et N étant l'un pair, l'autre impair, les nombres φ et ψ déterminés par l'équation

$$\varphi + \psi\sqrt{5} = (M \pm N\sqrt{5})(3 \pm \sqrt{5})$$

seront impairs l'un et l'autre, et l'on aura

$$P + Q\sqrt{5} = \frac{(\varphi + \psi\sqrt{5})^5}{2^4}$$

et par conséquent

$$P = \varphi \frac{(\varphi^4 + 2 \cdot 5^2 \varphi^2 \psi^2 + 5^3 \psi^4)}{2^4},$$

$$Q = 5\psi \frac{(\varphi^4 + 10 \varphi^2 \psi^2 + 5 \psi^4)}{2^4}.$$

Pour que P et Q soient premiers entre eux, il faut que φ et ψ n'aient pas de diviseur commun, et que le premier de ces nombres ne soit pas divisible par 5, et réciproquement, si les nombres φ et ψ , dont le premier est supposé ne pas être divisible par 5, n'ont pas de diviseur commun, et sont impairs l'un et l'autre, les nombres P et Q seront entiers et premiers entre eux. En effet, le quart de la quantité $\varphi^4 + 10\varphi^2\psi^2 + 5\psi^4$ pouvant se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\varphi^2 + 5\psi^2}{2}\right)^2 - 5(\psi^2)^2,$$

et cette dernière expression étant évidemment le quadruple d'un nombre impair, on voit que la valeur de Q est entière et impaire; la même chose se prouvera pour la valeur de P , et l'on s'assurera facilement que les nombres P et Q , qui sont impairs tous les deux, n'ont pas de diviseur commun. Nous avons donc ainsi ce théorème :

Théorème VII.

„Les nombres P et Q devant être premiers entre eux, et impairs l'un et l'autre, et le dernier devant être divisible par 5, je dis que pour égaler le binôme $P^2 - 5Q^2$ au quadruple d'une cinquième puissance avec toute la généralité convenable, il suffira de poser

$$P + Q\sqrt{5} = \frac{(\varphi + \psi\sqrt{5})^5}{2^4},$$

les nombres indéterminés ϕ et ψ étant premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le premier de plus non-divisible par 5 *).

Voici maintenant le premier des théorèmes nouveaux que nous avons annoncés au commencement de cette addition.

Théorème VIII.

„La lettre n désignant un nombre positif autre que 0 et 2, et le nombre A n'étant divisible ni par 2 ni par 5, ni par aucun nombre premier de la forme $10k + 1$, il sera impossible de trouver deux nombres x et y premiers entre eux, et tels que

$$x^5 \pm y^5 = 5^n A z^5 (\gamma)."$$

Les nombres x et y peuvent être impairs tous les deux, ou l'un pair et l'autre impair. Dans le premier cas, z sera divisible par 2, et l'on pourra mettre $2z$ à la place de z , ce qui changera l'équation (γ) en celle-ci:

$$x^5 \pm y^5 = 2^5 5^n A z^5,$$

qui est impossible puisqu'elle rentre évidemment dans le théorème V. Reste donc à prouver l'impossibilité du second cas où l'on suppose les nombres x , y , l'un pair, l'autre impair. Si nous faisons

$$x \pm y = p, \quad x \mp y = q,$$

nous aurons

$$2x = p + q, \quad \pm 2y = p - q,$$

et les nombres p et q seront premiers entre eux, et de plus impairs l'un et l'autre. En substituant les valeurs précédentes de $2x$ et $\pm 2y$ dans l'équation (γ) , après en avoir multiplié les deux membres par 2^5 , on aura

$$p(p^4 + 10p^2q^2 + 5q^4) = 2^4 5^n A z^5.$$

Comme p doit évidemment être divisible par 5, nous ferons $p = 5r$, ce qui donnera

$$5^2 r(q^4 + 2 \cdot 5^2 q^2 r^2 + 5^3 r^4) = 2^4 5^n A z^5.$$

Le nombre n est par hypothèse égal à l'unité ou plus grand que 2. Si n est égal à l'unité, il faudra, dans l'équation précédente, supposer z divisible par 5. On pourra donc, dans ce cas, mettre $5z$ à la place de z , ou, ce qui est la même chose, donner à 5 l'exposant 6, d'où l'on voit que l'on peut supposer dans tous les cas que $n > 2$.

Si l'on met l'équation précédente sous cette forme

$$r(q^4 + 2 \cdot 5^2 q^2 r^2 + 5^3 r^4) = 2^4 5^{n-2} A z^5,$$

*) Ce théorème, comme le théorème IV., a ses analogues pour beaucoup d'autres nombres premiers.

et qu'on fasse attention que $n > 2$, et que q est premier à $p = 5r$, on voit que r doit être supposé divisible par 5.

Choisissons maintenant un nombre positif ν tel que $n + \nu - 2$ soit divisible par 5 et un nombre B qui n'ait d'autre diviseur premier que le nombre A et tel que le produit AB soit une cinquième puissance. Multipliant la dernière équation par $5^\nu B$, nous aurons

$$5^\nu Br(q^4 + 2 \cdot 5^2 q^2 r^2 + 5^3 r^4) = 2^4 5^{n+\nu-2} AB z^5.$$

Tous les diviseurs du facteur trinome dans lequel q et r sont premiers entre eux, étant de la forme $10k + 1$, il est évident qu'il n'a aucun diviseur commun avec B ; il n'est pas moins évident qu'il est aussi premier à $5^\nu r$, et par conséquent à $5^\nu Br$.

Comme le facteur $5^\nu Br$ et le facteur trinome sont premiers entre eux, et que le premier de ces facteurs est impair, il faut en vertu de la dernière équation, dont le second nombre est le produit de 2^4 et de la cinquième puissance d'un nombre impair, que $5^\nu Br$ soit une cinquième puissance, et le facteur trinome une cinquième puissance multipliée par 2^4 .

Le quart du facteur trinome devant être le quadruple d'une cinquième puissance, et ce quart pouvant se mettre sous la forme

$$\left(\frac{q^2 + 5^2 r^2}{2}\right)^2 - 5(5r^2)^2,$$

où les nombres $\frac{q^2 + 5^2 r^2}{2}$, $5r^2$, sont évidemment premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le dernier de plus divisible par 5, il suffira en vertu du théorème établi au commencement de cette addition, pour égaler le quart du facteur trinome au quadruple d'une cinquième puissance, de poser ces deux équations

$$\frac{q^2 + 5^2 r^2}{2} = t \frac{(t^4 + 2 \cdot 5^2 t^2 s^2 + 5^3 s^4)}{2^4},$$

$$5r^2 = 5s \frac{(t^4 + 10 t^2 s^2 + 5 s^4)}{2^4},$$

les nombres indéterminés t et s devant être supposés premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le premier de plus non-divisible par 5. Comme t n'est pas divisible par 5, et que r l'est comme nous l'avons vu ci-dessus, il faut, en vertu de la dernière des équations précédentes, que s soit divisible par 5.

Nous avons vu plus haut que $5^\nu Br$ devait être une cinquième puissance. Le nombre $5^{2\nu} B^2 r^2$, carré du précédent, devra donc être une puissance du même degré, et même du dixième degré.

Or, en multipliant par $2^4 \cdot 5^{2\nu-1} B^2$ les deux membres de la dernière équation, on aura celle-ci :

$$2^4 5^{2\nu} B^2 r^2 = 5^{2\nu} B^2 s (t^4 + 10 t^2 s^2 + 5 s^4).$$

Si donc nous faisons pour abrégér $2\nu = h$, $B^2 = C$, tout se réduit à faire voir qu'il est impossible de trouver deux nombres t et s premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et dont le dernier s soit de plus divisible par 5, tels que le produit

$$5^h C s (t^4 + 10 t^2 s^2 + 5 s^4) \quad (\delta)$$

soit une cinquième puissance multipliée par 2^4 .

Il est facile de voir que l'expression (δ) ne saurait être le produit de 2^4 et d'une cinquième puissance, à moins que $5^h C s$ ne soit une cinquième puissance, et le facteur trinome une cinquième puissance multipliée par 2^4 .

Le quart du facteur trinome devant être le quadruple d'une cinquième puissance, et ce quart pouvant se mettre sous la forme

$$\left(\frac{t^2 + 5s^2}{2}\right)^2 - 5(s^2)^2,$$

où les nombres $\frac{t^2 + 5s^2}{2}$, s^2 , sont évidemment premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le dernier de plus divisible par 5, il suffira, pour éga-
ler le facteur trinome divisé par 4 au quadruple d'une cinquième puissance, de poser ces équations

$$\frac{t^2 + 5s^2}{2} = t' \frac{(t'^4 + 2 \cdot 5^2 t'^2 s'^2 + 5^3 s'^4)}{2^4},$$

$$s^2 = 5 s' \frac{(t'^4 + 10 t'^2 s'^2 + 5 s'^4)}{2^4},$$

les nombres t' et s' étant supposés premiers entre eux, impairs l'un et l'autre, et le premier t' de plus non-divisible par 5. Comme s est divisible par 5, et que t' ne l'est plus, il faut, d'après la dernière équation, que s' soit aussi divisible par 5. On conclut encore de la dernière équation, que $\frac{2 \cdot 5}{16} s'^5 < s^2$ et par suite que s' est beaucoup plus petit que s .

Le nombre $5^h C s$ devant être une cinquième puissance, $5^{2h} C^2 s^2$ carré du nombre précédent, devra être une puissance du même degré, et même du dixième degré. Or, en multipliant par $2^4 5^{2h} C^2$ les deux membres de la dernière équation, on aura celle-ci :

$$2^4 5^{2h} C^2 s^2 = 5^{2h+1} C^2 s' (t'^4 + 10 t'^2 s'^2 + 5 s'^4)$$

ou ce qui est la même chose, en faisant $2h+1 = h'$, $C^2 = C'$, dans le second membre,

$$2^4 5^{2h} C^2 s^2 = 5^{h'} C' s' (t'^4 + 10 t'^2 s'^2 + 5 s'^4), \quad (\delta')$$

équation dont les deux membres devront être des cinquièmes puissances multipliées par 2^4 .

Le produit (δ') étant parfaitement semblable au produit (δ) , et le nombre s' étant beaucoup plus petit que le nombre s , on conclura, comme dans la démonstration du théorème V. du mémoire précédent, que le produit (δ) ne saurait être égal à une cinquième puissance, multipliée par 2^4 , et que par conséquent l'équation (γ) ne saurait avoir lieu.

Le théorème de Fermat, pour le cas des cinquièmes puissances, est compris comme cas particulier dans le théorème que nous venons d'établir. En effet, l'équation $x^5 \pm y^5 = z^5$ ne pouvant avoir lieu, à moins qu'une des indéterminées, z par exemple, ne soit divisible par 5, nous pouvons mettre $5z$ à la place de z ; ce qui donnera $x^5 \pm y^5 = 5^5 z^5$, équation impossible, puisqu'elle rentre dans le dernier théorème.

Un raisonnement tout-à-fait semblable à celui au moyen duquel nous avons établi le théorème VI., en partant du théorème V., peut servir à déduire du théorème que nous venons de démontrer un nouveau théorème qui peut s'énoncer comme il suit:

Théorème IX.

„Le nombre A étant soumis aux mêmes restrictions que dans l'énoncé du théorème VIII., et ce nombre donnant un des huit restes suivans, 3, 4, 9, 12, 13, 16, 21, 22, lorsqu'il est divisé par 25, il sera impossible de trouver deux nombres x et y premiers entre eux, et tels que l'on ait $x^5 \pm y^5 = Az^5$.”

35.

Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie:

„Die Relation zwischen der Distanz der Mittelpunkte und den Radien zweier Kreise zu finden, von denen der eine einem unregelmässigen Polygon eingeschrieben, der andere demselben umgeschrieben ist.“

(Von Herrn Prof. Dr. C. G. J. Jacobi zu Königsberg in Preussen.)

1.

Bei einem jeden Dreieck findet bekanntlich eine Gleichung zwischen den Radien des eingeschriebnen und umgeschriebnen Kreises und der Distanz ihrer Mittelpunkte Statt, welche Euler zuerst aufgestellt hat. Weniger bekannt scheint die ähnliche Relation bei einem Viereck zu sein, das zu gleicher Zeit einem Kreise eingeschrieben und einem anderen umgeschrieben werden kann; doch kann sie hier noch leicht auf mannichfachen Wegen gefunden werden; wie denn die Theorie dieser Vierecke häufiger untersucht worden ist. Schwieriger ist das Problem beim Fünfeck und bei den höheren Polygonen, so daß Herr Steiner, der es gewohnt ist, die bekannten Gränzen hinter sich zu lassen, diese Theorie wesentlich erweitert zu haben schien, indem er im 2ten Bande dieses Journals S. 289., nachdem er zuvor S. 96. desselben Bandes das Problem wieder in Anregung gebracht hatte, noch für das Fünfeck, Sechseck und Achteck die entsprechenden Gleichungen aufstellte. Leider aber hat dieser große Geometer nicht die Analysis dieser interessanten Resultate mitgetheilt.

Ehe wir nun aber selbst unsre Weise dieses Problem zu behandeln den Geometern vorlegen, sehen wir uns genöthigt, im Namen des vor Kurzem verstorbenen Russischen Staatsraths Nicolaus Fufs, die von Herrn Steiner gegebenen Resultate in Anspruch zu nehmen; welcher, ohne es zu wollen und ohne es zu wissen, dieselben und noch überdies die Gleichung für das Siebeneck, bei weitem die schwierigste, gefunden hat. Dieser ausgezeichnete Analyst war nämlich in dem leider nicht

häufigen Irrthum, das Problem, das er sich stellte, nur in einem particulären Falle aufgelöst zu haben, während er in der That die allgemeine Lösung gab.

Man liest nemlich in dem 13ten Bande der Petersburger *Nova Acta* eine Abhandlung von diesem Verfasser vom Jahre 1798, welche den Titel führt:

De Polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis.

S. 166 — 189. Schon im 10ten Bande der *Nova Acta* für das Jahr 1792 hatte Derselbe verschiedene und zum Theil neue Probleme über die Vierecke gelöst, welche zugleich einem Kreise eingeschrieben und umgeschrieben sind, und auch die Relation gegeben, welche zwischen den Radien beider Kreise und der Distanz ihrer Mittelpunkte Statt hat. Er habe seitdem, erzählt er, diese Untersuchungen auf Polygone von mehr als 4 Seiten auszudehnen gesucht; es sei ihm aber nicht gelungen. Denn mit der wachsenden Seitenzahl würden die Fundamentalforneln so verwickelt, daß man an ihre Entwirrung Oel und Mühe verschwende. Er habe daher das mit den größten Schwierigkeiten behaftete allgemeine Problem verlassen, und wolle sich hier auf solche Polygone beschränken, welche man symmetrisch unregelmäßige (*symmetrice irregularia*) nennen könne, die nemlich einen Durchmesser haben, der durch beide Centra geht, und das Polygon in zwei gleiche und ähnliche Theile theilt.

Es thut aber diese Beschränkung bei dem Problem, das sich Fufs in seiner Abhandlung stellt, nemlich jene Gleichung zwischen den Radien und der Distanz der Centra zu finden, keinesweges der Allgemeinheit Eintrag. Denn zuerst ist klar, daß, wenn eine Ecke des Polygons in jenem durch beide Centra gehenden Durchmesser sich befindet, das Polygon auch zu beiden Seiten des Durchmessers symmetrisch liegen wird. Es kann aber immer eine Ecke des Polygons in dem Umfange des Kreises, in welchen es eingeschrieben sein soll, beliebig angenommen werden. Denn Herr J. V. Poncelet hat in seinem berühmten Werke, *Traité des Propriétés projectives des Figures* S. 361. den schönen Satz bewiesen, daß

„wenn irgend ein Polygon zugleich einem Kegelschnitt eingeschrieben und einem andern umgeschrieben ist, es eine unendliche Menge

ähnlicher giebt, welche diese Eigenschaft in Bezug auf die beiden Curven haben; oder wenn man nach dieser Bedingung von einem beliebigen Anfangspunct aus irgend ein anderes Polygon construiren will, es sich immer von selbst schliessen wird; und umgekehrt, wenn man, von irgend einem Puncte aus, einem Kegelschnitt ein Polygon einschreiben will, dessen Seiten einen andern berühren, und es sich nicht von selbst schliesst, kein anderes diese Eigenschaft haben wird."

Für unsern Fall sind die Kegelschnitte nur Kreise. Aber auf diesen Fall lässt sich der allgemeinere leicht reduciren, indem man, wie Herr Poncelet an einem andern Orte gezeigt hat, zwei Kegelschnitte, wofern sie nur nicht 4 Puncte gemein haben, immer so perspectivisch projeciren kann, dass man in der Projection zwei Kreise erhält.

Da also die Annahme, die Fufs gemacht, dass eine Ecke in dem Durchmesser liege, welcher durch beide Centra geht, der Allgemeinheit nicht schadet, so ist es auch nicht zu verwundern, wenn die Formeln, die er in seinem beschränkten Falle findet, wirklich allgemein sind, und mit den von Herrn Steiner gegebenen übereinkommen. Dieses letzte wollen wir kürzlich im Folgenden zeigen, da es nicht sogleich in die Augen fällt.

2.

Nennt man den Radius des umgeschriebnen Kreises R , des eingeschriebnen r , und die Distanz der beiden Mittelpuncte a , so giebt Herr Steiner für das Fünfeck zwischen R , r , a , die Gleichung:

$$r(R-a) = (R+a)\sqrt{[(R-r+a)(R-r-a)]} + (R+a)\sqrt{[(R-r-a)2R]}.$$

Setzt man mit Fufs $R+a=p$, $R-a=q$, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$qr = p\sqrt{[(p-r)(q-r)]} + p\sqrt{[(q-r)(p+q)]}.$$

Fufs findet S. 174 die Gleichung:

$$\frac{ppqq - rr(pp+qq)}{ppqq + rr(pp+qq)} = \pm \sqrt{\frac{(q-r)}{(p+q)}}.$$

Er bemerkt, dass dieser Gleichung die Werthe $r=-p$ und $r=\frac{pq}{p+q}$ Genüge thun, und dass sich daher die Gleichung, nachdem man das Wurzelzeichen weggeschafft, durch $p+r$ und $pq-r(p+q)$ werde dividiren lassen. Nach diesen Reductionen giebt er die Gleichung:

$$p^3q^3 + ppqqrr(p+q) - pqr r(p+q)^2 - r^3(p+q)(p-q)^2 = 0.$$

Wenn man Herrn Steiners Gleichung:

$$qr = p\sqrt{[(p-r)(q-r)] + p\sqrt{(q-r)(p+q)}}$$

quadrirt, so erhält man:

$$q^2r^2 - p^2(q-r)(2p+q-r) = 2p^2(q-r)\sqrt{[(p-r)(p+q)]}.$$

Wird diese Gleichung wieder quadrirt, so erhält man:

$$q^4r^4 - 2p^2q^2r^2(q-r)(2p+q-r) + p^4(q-r)^2(q+r)^2 = 0.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} 2(q-r)(2p+q-r) &= 2(q-r)^2 + 4p(q-r) \\ &= (q-r)^2 + (q+r)^2 + 4\{pq-r(p+q)\}, \end{aligned}$$

wonach sich die Gleichung so darstellen läßt:

$$q^4r^4 - p^2q^2r^2(q-r)^2 - 4p^2q^2r^2[pq-r(p+q)] + p^2(q+r)^2\{(q-r)^2p^2 - q^2r^2\} = 0.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} q^4r^4 - p^2q^2r^2(q-r)^2 &= -q^2r^2(qr + pq - pr)(pq - pr - rq), \\ (q-r)^2p^2 - q^2r^2 &= [(q-r)p + qr](pq - pr - qr). \end{aligned}$$

Man kann daher, wie bei Fufs, durch $pq - pr - qr$ dividiren, und erhält dann:

$$q^2r^2(pr - qr - pq) - 4p^2q^2r^2 + p^2(q+r)^2(pq + qr - pr) = 0.$$

Entwickelt man nach den Potenzen von r , so erhält man genau die von Fufs gegebene Gleichung. Nach den Potenzen von p geordnet wird sie:

$$p^3(q+r)^2(q-r) + p^2qr(q-r)^2 - pq^2r^2(q-r) - q^3r^3 = 0.$$

Fufs giebt ferner noch die Bedeutung seiner überflüssigen Factoren $p+r$ und $pq-r(p+q)$; und für diesen Fall, wie für die übrigen, numerische Beispiele.

3.

Für das Sechseck findet Herr Steiner:

$$3(R^2 - a^2)^4 = 4r^2(R^2 + a^2)(R^2 - a^2)^2 + 16r^4a^2R^2,$$

welche Gleichung sich, wenn man wieder $R+a=p$, $R-a=q$ setzt, in folgende verwandelt:

$$3p^4q^4 = 2r^2(p^2 + q^2)p^2q^2 + r^4(p+q)^2(p-q)^2,$$

welche mit der von Fufs gegebenen (S. 180.) übereinkommt:

$$3p^4q^4 - 2ppqqrr(pp + qq) = r^4(pp - qq)^2.$$

Für das Siebeneck findet Fufs die Gleichung:

$$\begin{aligned} [pq - r(p-q) - 2rr]2pqr\sqrt{[(p-r)(p+q)]} \\ + [ppqq - rr(pp + qq)]2r\sqrt{[(q-r)(p+q)]} \\ = \pm [pq - r(p-q)][ppqq + rr(pp - qq)]. \end{aligned}$$

Für das Achteck giebt Fufs die Gleichung:

$$p p r \sqrt{(q q - r r)} + q q r \sqrt{(p p - r r)} = p q r r - p q \sqrt{[(p p - r r)(q q - r r)]}.$$

Quadriert man diese Gleichung, so resultirt:

$$\begin{aligned} & 4 p^2 q^2 r^2 \sqrt{[(p p - r r)(q q - r r)]} \\ &= p^2 q^2 r^4 + p^2 q^2 (p^2 - r^2)(q^2 - r^2) - p^4 r^2 (q^2 - r^2) - q^4 r^2 (p^2 - r^2) \\ &= r^4 (p^2 + q^2)^2 - 2 r^2 p^2 q^2 (p^2 + q^2) + p^4 q^4 = \{r^2 (p^2 + q^2) - p^2 q^2\}^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung, rational gemacht, wird also:

$$\{r^2 (p^2 + q^2) - p^2 q^2\}^2 = 16 p^2 q^4 r^4 (p^2 - r^2)(q^2 - r^2).$$

Aber diese Gleichung scheint nicht mit der sehr verwickelten, welche Herr Steiner giebt, in Uebereinstimmung gebracht werden zu können.

Fufs bemerkt noch, daß wenn man einen Winkel μ aus dem Winkel ν durch die Gleichung $\cos \nu = -\cot \mu$ bestimmt, man setzen könne:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sin\left(\frac{\mu - \nu}{2}\right) - \sin\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mu - \nu}{2}\right) + \sin\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)} \cdot R = \frac{-\tan \frac{\nu}{2}}{\tan \frac{\mu}{2}} \cdot R, \\ r &= \frac{2 R \sin\left(\frac{\mu - \nu}{2}\right) \sin\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\mu - \nu}{2}\right) + \sin\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)} = \frac{R \sin\left(\frac{\mu - \nu}{2}\right) \sin\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\sin \frac{\mu}{2} \sin \frac{\nu}{2}}, \end{aligned}$$

woraus auch

$$\begin{aligned} p &= R + a = \frac{R \sin\left(\frac{\mu - \nu}{2}\right)}{\sin \frac{\mu}{2} \sin \frac{\nu}{2}}, \\ q &= R - a = \frac{R \sin\left(\frac{\mu + \nu}{2}\right)}{\sin \frac{\mu}{2} \sin \frac{\nu}{2}}, \end{aligned}$$

folgt, welche Formeln durch ihre Eleganz sich empfehlen.

Ich habe diese Formeln anführen wollen, weil es vielleicht Einigen interssant scheinen dürfte, sie mit den Resultaten zu vergleichen, welche sich aus der Theorie der elliptischen Transcendenten ergeben.

4.

Wir wollen jetzt die Fundamentalformeln aufstellen, auf welchen die hier anzustellenden Betrachtungen beruhen. Es seien demnach zwei Kreise gegeben, von denen der eine, mit dem Halbmesser R und Mittelpunkt C , den andern mit dem Halbmesser r und Mittelpunkt c umschließen möge. Die Distanz der Mittelpunkte Cc heiße a . Aus irgend einem Punkte A des Kreises C ziehe man eine Tangente an den Kreis c ,

welche den ersten wieder in A' schneidet; auf gleiche Weise ziehe man an den Kreis c die Tangenten $A'A''$, $A''A'''$, $A'''A^{iv}$ u. s. w., wo A , A' , A'' , A''' , A^{iv} u. s. w. in dem größern Kreise C liegen, und $AA'A''A'''...$ ein Stück eines Polygons oder ein ungeschlossenes Polygon ist, das dem Kreise C eingeschrieben, dem Kreise c umgeschrieben ist. Man ziehe den Durchmesser cC , welcher den Kreis C in P schneiden möge, so daß $CP=R$, $cP=R+a$. Jetzt nenne man die Winkel $ACP=2\varphi$, $A'CP=2\varphi'$, $A''CP=2\varphi''$, $A'''CP=2\varphi'''$, u. s. w., so ist leicht zu sehen, daß zwischen je zwei Winkeln, die aufeinander folgen, die Gleichungen Statt finden:

$$R \cos(\varphi' - \varphi) + a \cos(\varphi' + \varphi) = r,$$

$$R \cos(\varphi'' - \varphi') + a \cos(\varphi'' + \varphi') = r,$$

$$R \cos(\varphi''' - \varphi'') + a \cos(\varphi''' + \varphi'') = r,$$

$$\dots \dots \dots$$

welche Gleichungen man auch so darstellen kann:

$$(R+a) \cos \varphi' \cos \varphi + (R-a) \sin \varphi' \sin \varphi = r,$$

$$(R+a) \cos \varphi'' \cos \varphi' + (R-a) \sin \varphi'' \sin \varphi' = r,$$

$$(R+a) \cos \varphi''' \cos \varphi'' + (R-a) \sin \varphi''' \sin \varphi'' = r,$$

$$\dots \dots \dots$$

Zieht man jede dieser Gleichungen von der folgenden ab, und bemerkt, daß immer

$$\frac{\cos x - \cos y}{\sin y - \sin x} = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

so folgt sogleich:

$$\tan\left(\frac{\varphi'' + \varphi}{2}\right) = \frac{R-a}{R+a} \tan \varphi',$$

$$\tan\left(\frac{\varphi''' + \varphi'}{2}\right) = \frac{R-a}{R+a} \tan \varphi'',$$

$$\dots \dots \dots$$

In dieser Form der Gleichungen springt es sogleich in die Augen, daß sie mit denjenigen übereinkommen, welche zur Vervielfachung der elliptischen Transcendenten aufgestellt werden.

Setzt man nemlich das elliptische Integral, in dem x irgend eine Constante bedeutet,

$$\int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-x^2 \sin^2 \varphi)}} = u,$$

und setzt nach einer von mir angegebenen Bezeichnung die amplitudo φ

$$\varphi = \text{am}(u);$$

ferner eben so

$$\alpha = \operatorname{am}(t),$$

wo α irgend einen Winkel bedeuten möge,

$$\varphi' = \operatorname{am}(u+t),$$

$$\varphi'' = \operatorname{am}(u+2t),$$

so wird in den Elementen der Theorie der elliptischen Functionen die Gleichung gegeben:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi + \varphi''}{2}\right) = \Delta \operatorname{am}(t) \operatorname{tang} \varphi',$$

wo

$$\Delta \operatorname{am}(t) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{[1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(t)]}.$$

Bestimmt man also in unserm Falle die Gröſsen k und t oder α durch die beiden Gleichungen:

$$\frac{R-a}{R+a} = \Delta \operatorname{am}(t) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}; \quad \varphi' = \operatorname{am}(u+t),$$

so wird man haben:

$$\varphi = \operatorname{am}(u),$$

$$\varphi' = \operatorname{am}(u+t),$$

$$\varphi'' = \operatorname{am}(u+2t),$$

$$\varphi''' = \operatorname{am}(u+3t),$$

$$\varphi^{iv} = \operatorname{am}(u+4t),$$

$$\dots \dots \dots$$

wo $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$, $2\varphi^{iv}$ durch die §. 4. angegebene Construction gefunden werden.

5.

Wir wollen jetzt die Gröſsen α und k bestimmen; welches vermittelst der Gleichungen $\varphi = \operatorname{am}(u)$, $\alpha = \operatorname{am}(t)$, $\varphi' = \operatorname{am}(u+t)$, $\Delta \operatorname{am}(t) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} = \frac{R-a}{R+a}$ geschieht. Die Elemente der Theorie der elliptischen Functionen geben uns die Gleichung:

$$\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} = \cos \alpha.$$

Nach unseren obigen Formeln ist:

$$\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' \cdot \frac{R-a}{R+a} = \frac{r}{R+a}.$$

Dieses giebt uns zur Bestimmung von α und k die beiden Gleichungen:

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} = \frac{R-a}{R+a} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{r}{R+a},$$

woraus folgt:

$$k^2 = \frac{4Ra}{(R+a)^2 - r^2}, \quad 1 - k^2 \sin^2 \alpha = \frac{(R-a)^2 - r^2}{(R+a)^2 - r^2}.$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} R + a &= \frac{r}{\cos \alpha}, & 2R &= \frac{r(1+\Delta)}{\cos \alpha}, & r &= \frac{2R \cos \alpha}{1+\Delta}, \\ R - a &= \frac{r\Delta}{\cos \alpha}, & 2a &= \frac{r(1-\Delta)}{\cos \alpha}, & a &= \frac{R(1-\Delta)}{1+\Delta}, \end{aligned}$$

wo der Kürze halber für $\Delta \operatorname{am}(t)$ bloß Δ geschrieben ist.

Diese Formeln geben ein leichtes Mittel, wenn man $\operatorname{am}(u) = \varphi$, und $\operatorname{am}(t) = \alpha$ kennt, daraus $\operatorname{am}(u + mt)$ zu finden, was die Aufgabe der Multiplication der elliptischen Functionen ist, und zwar durch eine Construction der Elementargeometrie. Man beschreibe nemlich aus einem Punkte c mit einem beliebigen Radius r einen Kreis, und aus dem Mittelpunkte C , der um $a = Cc$ von c entfernt ist, einen zweiten Kreis mit dem Radius R , wo a und R durch die Gleichungen

$$a = \frac{r(1-\Delta)}{2 \cos \alpha}, \quad R = \frac{r(1+\Delta)}{2 \cos \alpha}$$

bestimmt werden. Bestimmt man nun den Punct A in der Peripherie des Kreises C , indem man $ACP = 2\varphi$ macht (s. §. 4.), und bestimmt die Punkte A' , A'' , A''' , ..., $A^{(m)}$ durch die §. 4. angegebene Construction, so wird $\frac{A^{(m)}CP}{2} = \varphi^{(m)} = \operatorname{am}(u + mt)$.

Will man bloß $\operatorname{am}(mt)$ bestimmen, so fällt der Punct A mit dem Punct P zusammen. Uebrigens bemerke ich, daß die Winkel 2φ , $2\varphi'$, $2\varphi''$, $2\varphi'''$, ... immerfort wachsend angenommen werden, so daß sie auch 360° überschreiten können.

Diese Construction scheint vor der Construction, die Lagrange mittelst des sphärischen Dreiecks gegeben hat, nicht ohne Vorzüge zu sein.

6.

Es ist ein bemerkenswerther Umstand, daß die Größen u , α gänzlich von φ oder u unabhängig sind. Wo man daher den Punct A in der Peripherie des Kreises C annimmt, wird immer, wenn man $\frac{ACP}{2} = \varphi = \operatorname{am}(u)$, $\frac{A'CP}{2} = \varphi' = \operatorname{am}(u + t)$ macht, die Linie AA' einen Kreis berühren, dessen Lage und Gröfse durch die Gleichungen $a = R \frac{(1-\Delta)}{1+\Delta}$, $r = \frac{2R \cos \alpha}{1+\Delta}$ bestimmt werden. Man denkt sich dann nemlich CP als eine feste Linie, von welcher an der Winkel 2φ gezählt wird, und in welcher der Mittelpunkt des Kreises c zu liegen kommt. Eben so wird immer, wo man auch A angenommen hat, die

Linie AA'' einen Kreis berühren, dessen Lage und Gröfse durch die Gleichungen $a = R \left(\frac{1 - \Delta^{(2)}}{1 + \Delta^{(2)}} \right)$, $r = \frac{2R \cos \alpha^{(2)}}{1 + \Delta^{(2)}}$ bestimmt werden, wenn man $\alpha^{(2)} = \text{am}(2t)$, $\Delta^{(2)} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha^{(2)}}$ setzt. Und allgemein wird immer, wo man auch den Anfangspunct A angenommen hat, die Linie $AA^{(m)}$, welche das Polygon zuschliesst, einen Kreis berühren, dessen Elemente durch die Gleichungen $a = R \left(\frac{1 - \Delta^{(m)}}{1 + \Delta^{(m)}} \right)$, $r = \frac{2R \cos \alpha^{(m)}}{1 + \Delta^{(m)}}$ gegeben sind, wo $\alpha^{(m)} = \text{am}(mt)$, $\Delta^{(m)} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha^{(m)}}$. Die Mittelpunkte aller dieser Kreise liegen in der festen Linie AP .

Wir wollen jetzt beweisen, dass diese Kreise ein System bilden, welche dieselbe Linie zum Orte der gleichen Tangenten haben, welche zweckmäßige Benennung Herr Steiner in seinen geometrischen Arbeiten in diesem Journal eingeführt hat. Es ist dieses bei zwei Kreisen eine gerade Linie, welche auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrecht steht, und eben, was ihr Name andeutet, die Eigenschaft hat, dass wenn man von irgend einem ihrer Punkte die Tangenten an die beiden Kreise legt, diese Tangenten gleich werden. Da wir schon wissen, dass jene Kreise ihre Mittelpunkte in derselben geraden Linie haben, so brauchen wir blofs zu zeigen, dass für irgend einen Punct die von ihm aus an alle Kreise gelegten Tangenten gleich sind, indem dieselbe Eigenschaft dann alle Punkte der durch ihn gehenden und auf AP senkrecht stehenden Linie haben werden.

Zu diesem Ende wollen wir den Punct in der Linie AP selbst aufsuchen, welcher diese Eigenschaft in Bezug auf die beiden Kreise C, c hat. Wir wollen D die Distanz dieses Punctes von C nennen, so wird seine Distanz von c , $D - a$. Die Tangente an den ersten Kreis wird $\sqrt{(DD - RR)}$, an den zweiten Kreis $\sqrt{[(D - a)^2 - rr]}$. Beides gleich gesetzt giebt

$$DD - RR = (D - a)^2 - rr,$$

oder

$$D = \frac{RR + aa - rr}{2a} = \frac{(R + a)^2 - rr}{2a} - R.$$

Oben aber fanden wir

$$k^2 = \frac{4aR}{(R + a)^2 - rr},$$

woraus

$$\frac{(R + a)^2 - rr}{2a} = \frac{2R}{k^2},$$

und also:

$$D = \frac{2R}{\alpha\alpha} - R.$$

Wir sehen dafs α in dem Ausdruck für D gar nicht vorkommt, sondern dafs es blofs von α abhängt. Für alle jene Kreise aber ist dieses α dasselbe, und nur im α unterscheiden sie sich. Hätten wir daher für C und irgend einen anderen Kreis den Ort ihrer gleichen Tangenten gesucht, so hätten wir denselben Ausdruck für D gefunden, so dafs also alle jene Kreise einen gemeinschaftlichen Ort der gleichen Tangenten haben.

Die analytische Bestimmung der Elemente des Kreises, den die Linie $AA^{(m)}$ beständig berührt, während der Punct A sich in der Peripherie des Kreises C bewegt, wäre selbst für kleinere m ein Problem von kaum zu übersteigender Schwierigkeit gewesen, welches auf diese Weise auf die Elemente einer bekannten Theorie zurückgeführt und dadurch in aller Allgemeinheit gelöst ist.

Der specielle Satz, dafs AA'' beständig einen Kreis während seiner Bewegung berührt, läfst sich auch folgendermassen aussprechen:

„Wenn man einen Winkel in einen Kreis einschreibt, der einem andern zu gleicher Zeit umgeschrieben ist, und man denselben sich unter diesen Bedingungen bewegen läfst, d. h. so, dafs seine Spitze die Peripherie des Kreises durchläuft, während seine Schenkel den anderen Kreis berühren, so wird die Sehne, die er in dem ersten Kreise, in den er eingeschrieben ist, abschneidet, während der Bewegung beständig einen dritten Kreis berühren, welcher mit dem gegebenen denselben Ort der gleichen Tangenten hat.“

Diesen Satz giebt Herr Poncelet S. 326. seines angeführten Werks. Durch die oben angedeutete Weise perspectivischer Projection lassen sich diese Sätze auf das System zweier Ellipsen ausdehnen.

7.

Aber Herr Poncelet giebt diesen Sätzen noch eine weit grössere Ausdehnung. Wir haben angenommen, dafs die Seiten des Polygons einen und denselben Kreis, oder in der Projection, denselben Kegelschnitt berühren. Poncelet bestimmt nur, dafs sie überhaupt in einer bestimmten Folge gegebene Kegelschnitte berühren, so dafs auch, wenn man will, ein Kegelschnitt mehrere Seiten berühren kann, wo dann gedacht werden kann,

dafs in diesen Kegelschnitt mehrere zusammen fallen. Er unterwirft diese Kegelschnitte blofs der Bedingung, dafs sie alle mit dem Kegelschnitt, in welchen das Polygon eingeschrieben ist, die reellen oder idealen Secanten *) gemeinschaftlich haben. Es giebt demnach folgenden Satz S. 327:

„Wenn man einem Kegelschnitt ein Polygon einschreibt, dessen Seiten, mit Ausnahme einer, andere Kegelschnitte berühren, die mit einander und mit jenem gemeinschaftliche Secanten haben, und man das Polygon unter diesen Bedingungen variiren läfst, so werden die freie Seite und alle Diagonalen sich auf anderen Kegelschnitten wälzen, die mit den gegebenen gemeinschaftliche Secanten haben.“

Aber auch diese Verallgemeinerung ergiebt sich leicht aus unseren Betrachtungen für Kreise, worauf man sogleich sie durch Projection auf Kegelschnitte erweitern kann. Ja wir erhalten sogleich unmittelbar wieder den analytischen Ausdruck für die Elemente des gesuchten Kreises in aller Allgemeinheit. Es seien die Kreise, wie sie aufeinander folgen, $c, c', c'', c''', \dots, c^{(m-1)}$, wie oben nach ihren Mittelpunkten benannt, ihre Radien resp. $r, r', r'', r''', \dots, r^{(m-1)}$; die Distanzen ihrer Mittelpunkte von $C, cC = a, c'C = a', c''C = a'', c'''C = a''', \dots, c^{(m-1)}C = a^{(m-1)}$. Man bestimme ferner die Winkel $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m-1}$ durch die Gleichungen:

$$\cos \alpha = \frac{r}{R+a}, \cos \alpha_1 = \frac{r'}{R+a'}, \cos \alpha_2 = \frac{r''}{R+a''}, \dots, \cos \alpha_{m-1} = \frac{r^{(m-1)}}{R+a^{(m-1)}},$$

und setze

$$\alpha = amt, \alpha_1 = amt', \alpha_2 = amt'', \dots, \alpha_{m-1} = amt^{(m-1)}.$$

Jetzt ziehe man aus einem beliebigen Punkte A des Kreises C die Tangente AA' an den Kreis c , die Tangente $A'A''$ an den Kreis c' , die Tan-

*) Herr Poncelet bestimmt eine gemeinschaftliche Secante zweier Kegelschnitte aus folgenden Eigenschaften, welche zugleich zu ihrer allgemeinsten Definition dienen. Man bestimme in ihnen die Durchmesser $AB, A'B'$, welche zu ihrer Richtung conjugirt sind; so müssen sich 1) beide Durchmesser, wenn es nöthig ist, verlängert in demselben Punct O schneiden. Wenn ferner $AB = a, A'B' = a'$, und die mit der gegebenen Linie parallelen, diesen conjugirte Durchmesser resp. b, b' sind, so muß 2) sein $\frac{bb'}{aa'} OA \cdot OB = \frac{b'b'}{a'a'} OA' \cdot OB'$. Diese Bestimmungen, welche augenscheinlich erfüllt sind, wenn die Linie beide Kegelschnitte wirklich schneidet, behalten ihren Sinn auch wenn sie ausserhalb beider fällt, in welchem Falle sie Poncelet die ideale Secante nennt. Für zwei Kreise, die sich nicht schneiden, ist die ideale gemeinschaftliche Secante der Ort der gleichen Tangenten bei Herrn Steiner.

gente $A''A'''$ an den Kreis c'' , u. s. w., die Tangente $A^{(m-1)}A^{(m)}$ an den Kreis $c^{(m-1)}$, wo $A, A', A'', \dots, A^{(m)}$ alle in der Peripherie des Kreises C liegen, und nenne wieder

$ACP = 2\varphi, A'CP = 2\varphi', A''CP = 2\varphi'', \dots, A^{(m)}CP = 2\varphi^{(m)}$,
so hat man, wenn $\varphi = \operatorname{am} u$:

$$\varphi' = \operatorname{am}(u + t), \quad \varphi'' = \operatorname{am}(u + t + t'), \quad \varphi''' = \operatorname{am}(u + t + t' + t''), \\ \varphi^{(m)} = \operatorname{am}(u + t + t' + \dots + t^{(m-1)}).$$

Nach §. 6. also wird, wenn man $t + t' + t'' + \dots + t^{(m-1)} = 5$ setzt, die Linie $A^{(m)}A$, welche das Polygon schließt, während der Drehung einen Kreis berühren, dessen Elemente durch die Gleichungen

$$r_m = \frac{2R \cos \operatorname{am} 5}{1 + \Delta \operatorname{am} 5}, \\ a_m = \frac{R(1 - \Delta \operatorname{am} 5)}{1 + \Delta \operatorname{am} 5},$$

bestimmt sind, wo r_m sein Radius, a_m die Distanz seines Mittelpunctes in der Linie AP von C bedeutet. Die Bedingung, daß die Kreise einen gemeinschaftlichen Ort der gleichen Tangenten haben, kommt mit der Identität des Moduls überein.

Das Vorhergehende giebt eine Construction der Addition mehrerer elliptischen Functionen, wie wir oben die Construction der Multiplication fanden. Uebrigens erhellt aus unsern Formeln noch der Satz, daß, in welcher Ordnung auch die Seiten $AA', A'A'', A''A'''$ u. s. w. die gegebenen Kreise berühren, der Endpunct $A^{(m)}$ immer derselbe sein wird.

8.

Man bestimme jetzt K durch die Gleichung $\operatorname{am} K = \frac{\pi}{2}$, so hat man bekanntlich $\operatorname{am}(u + 2K) = \operatorname{am}(u) + \pi$, und allgemein, wenn i eine ganze Zahl ist, $\operatorname{am}(u + 2iK) = i\pi + \operatorname{am} u$. Dieses vorausgeschickt, hätten wir eigentlich, wenn $AA'A'' \dots A^{(m)}A$, i Mal die ganze Peripherie durchmisst, genauer setzen müssen: $5 = 2iK' - (t + t' + t'' + \dots + t^{(m-1)})$. Doch ändert dies die Formeln für a_m und r_m nicht. Reduciren sich alle Kreise $c, c', c'', \dots, c^{(m-1)}$, c_m auf den einen c , so wird für diesen Fall das Polygon ein geschlossenes, dem Kreise c umgeschriebenes und dem Kreise C eingeschriebenes Polygon. Für diesen Fall wird $5 = t = t' = t'' = \dots = t^{(m-1)}$, wodurch man erhält:

$$(m+1)t = 2iK', \text{ oder } t = \frac{2iK'}{m+1}.$$

Dieses ist der analytische Ausdruck für die Relation, die zwischen der Gröfse und Lage zweier Kreise Statt finden muß, damit sich dem einen ein $(m+1)$ Eck einschreiben lasse, das dem andern umgeschrieben ist, und i Mal die ganze Peripherie durchmisst. Für diejenigen, welche weniger an die hier gebrauchte Bezeichnung gewöhnt sind, wollen wir sie folgendermaßen als Theorem hinstellen:

Theorem.

„Wenn R und r die Radien zweier Kreise sind, von denen jener einem n Eck umgeschrieben, dieser demselben eingeschrieben ist, die Distanz ihrer Mittelpunkte a heifst, und man die Gröfsen z und α durch die Gleichungen $\cos \alpha = \frac{r}{R+a}$, $zz = \frac{4aR}{(R+a)^2 - rr}$ bestimmt, so ist immer:

$$\int_0^\alpha \frac{\partial \varphi}{V(1-zz \sin^2 \varphi^2)} = \frac{i}{n} \int_0^\pi \frac{\partial \varphi}{V(1-zz \sin^2 \varphi^2)},$$

wo i die Zahl der Umläufe des Vielecks durch die ganze Peripherie bedeutet. Diese Gleichung giebt zugleich die zwischen r , R , a statt findende Bedingungsgleichung.”

Da die Bedingungsgleichung $t = \frac{2iK}{n}$ von u gänzlich unabhängig ist, so folgt daraus, dafs die Wahl des Anfangspuncts A von keinem Einflufs ist, wie Poncelet in dem zu Anfang angeführten Satz gezeigt hat. Uebrigens kann man immer annehmen, dafs i und n keinen Factor gemein haben, weil sonst das Vieleck in sich zurückkehrt.

So ist die in der Ueberschrift bezeichnete Aufgabe vollständig und in ihrer ganzen Allgemeinheit gelöst.

9.

Es sei $n = 2m$, also das Polygon von einer geraden Seitenanzahl; dann sind A und $A^{(m)}$, A' und $A^{(m+1)}$, A'' und $A^{(m+2)}$, . . . , $A^{(m-1)}$ und $A^{(am-2)}$ gegenüberstehende Ecken; und $AA^{(m)}$, $A'A^{(m+1)}$, $A''A^{(m+2)}$, u. s. w. die diese verbindenden Diagonalen. Diese werden dem Obigen zufolge einen Kreis berühren, dessen Elemente durch die Gleichungen

$$a = \frac{R[-\Delta \operatorname{am}(mt)]}{1 + \Delta \operatorname{am}(mt)}, \quad r = \frac{2R \cos \operatorname{am}(mt)}{1 + \Delta \operatorname{am}(mt)}$$

gegeben sind. Aber da $t = \frac{2iK}{2m}$, wo i eine ungerade Zahl ist, wird

$mt = iK$, woraus $\operatorname{am}(mt) = \frac{i\pi}{2}$. Es wird daher $r = 0$, $a = R \frac{1 - \sqrt{1-zz}}{1 + \sqrt{1-zz}}$.

Der Kreis reducirt sich daher auf einen Punct, in welchem sich alle jene Diagonalen schneiden, und welcher für alle die unendlichen Vielecke, die sich nach einem verschiedenen Anfangspuncte A unter den gegebenen Bedingungen construiren lassen, derselbe bleibt, da seine Bestimmung, die in der Gleichung $a = R \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - zz}}{1 + \sqrt{1 - zz}}$ enthalten ist, von u oder φ gänzlich frei ist. Dieser Punct ist einer der beiden, welche für die Schaar Kreise, welche denselben Ort der gleichen Tangenten haben, eine Art Gränze bilden, und durch welche alle jene Kreise, welche diese Schaar Kreise rechtwinklig schneiden und ihren Mittelpunkt in der Linie der gleichen Tangenten haben, gehen müssen. S. die Abhandlung von Herrn Steiner im 1sten Bande dieses Journals S. 161 ff.

Dieser Satz findet sich bei Herrn Poncelet am angef. O. S. 364. auf das System zweier Kegelchnitte erweitert.

Es dürfte nicht ohne Interesse für die Theorie der elliptischen Functionen sein, ähnliche Betrachtungen unmittelbar für das System zweier Kegelschnitte anzustellen. Das Integral dürfte dann in einer complicirteren Form erscheinen, die sich jedoch auf jene einfachere reduciren lassen muß. Vielleicht nehme ich später Gelegenheit, hierauf wieder zurückzukommen.

Den 1. April 1828.

36.

Démonstrations nouvelles de quelques théorèmes relatifs aux nombres.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

Parmi les différentes démonstrations que les géomètres ont successivement données du théorème de Wilson, celle que M. Gauss a exposée dans ses „*Disquisitiones arithmeticae*, art. 77.” et qui est fondée sur la considération des nombres correspondans (*numeri socii*) est sans contredit la plus simple. En généralisant un peu la définition des nombres correspondans et en suivant ensuite une marche analogue à celle de M. Gauss, on peut démontrer simultanément le théorème de Wilson et deux autres propositions qui sont d'un grand usage dans la théorie des nombres. C'est ce que nous allons faire voir en peu de mots.

La lettre p désignant un nombre premier, Euler qui le premier s'est servi de cette considération, nomme correspondans deux nombres m et n l'un et l'autre moindres que p et tels que leur produit mn donne l'unité pour reste lorsqu'il est divisé par p .

Généralisons cette définition et appelons correspondans deux nombres m et n moindres que p et dont le produit mn donne le même reste qu'un nombre déterminé a que nous supposons n'être pas divisible par p . Cela posé, considérons la suite

$$(1.) \quad 1, 2, 3, \dots, p-1.$$

Il est facile de voir que, si m désigne l'un quelconque des nombres qui composent cette suite, ce nombre m aura son correspondant n et n'en aura qu'un. Cela résulte immédiatement de ce que la congruence $my \equiv a \pmod{p}$ dans laquelle ni m ni a n'est divisible par p , a toujours une racine y moindre que p et n'en a qu'une.

Il peut arriver que n soit égal à m . On a alors $m^2 \equiv a \pmod{p}$, ce qui fait voir que ce cas ne peut avoir lieu qu'autant qu'il existe un carré donnant le même reste que a , ou, en d'autres termes, qu'autant que a est résidu quadratique par rapport à p . Distinguons actuellement

deux cas selon que a est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à p et commençons par le dernier de ces deux cas.

Soit, dans ce cas, m l'un quelconque des nombres (1.) et n son correspondant. On aura $mn \equiv a \pmod{p}$ et n sera différent de m . Après avoir oté les nombres m, n de la suite (1.), il restera $p-3$ nombres. Désignons par m' l'un quelconque de ces $p-3$ nombres restans et par n' son correspondant; n' sera différent de m' et l'on aura $m'n' \equiv a \pmod{p}$. En continuant de procéder ainsi, on épuisera la suite (1.) et l'on formera $\frac{p-1}{2}$ groupes composés chacun de 2 nombres correspondans; car chaque nombre n'ayant qu'un correspondant qui est mis de coté en même temps que lui, on ne peut jamais, pour former un nouveau groupe, avoir besoin d'un des nombres déjà mis de coté.

Le produit de deux nombres composant un groupe donnant le même reste que a , et les groupes étant au nombre de $\frac{p-1}{2}$, on voit que le produit des nombres dont l'ensemble des groupes est formé, c'est-à-dire le produit des nombres compris dans la serie (1.) donne le même reste que le nombre a élevé à la puissance $\frac{p-1}{2}$. On a donc dans le cas que nous venons d'examiner

$$(2.) \quad 1.2.3 \dots p-1 \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Passons au second cas qui a lieu lorsque a est résidu quadratique de p . Il existe dans ce cas un carré k^2 (dont la racine k peut être supposé $< p$) tel que $k^2 \equiv a \pmod{p}$. Le carré du nombre $p-k$, qui est également moindre que p , donne aussi le même reste que a lorsqu'il est divisé par p . Les nombres k et $p-k$ étant otés de la suite (1.), il n'y restera aucun nombre x tel que $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Car si parmi les nombres restans il y en avait un satisfaisant à cette condition, $x^2 - k^2 = (x+k)(x-k)$ serait divisible par p ; il faudrait donc qu'un des facteurs $x+k, x-k$ le fut pareillement; or c'est ce qui est manifestement impossible, x étant plus petit que p et différent de k et $p-k$. — Cela posé, on voit comme dans le cas déjà examiné, que les $p-3$ nombres qui restent dans la suite (1.) après en avoir oté k et $p-k$, se correspondent deux à deux, d'où l'on conclut comme précédemment que le produit de ces nombres donne le même reste que $a^{\frac{p-3}{2}}$. Il suit de là que

le produit de tous les nombres qui composent la suite (1.) donne le même reste que $a^{\frac{p-3}{2}} k(p-k)$ et comme, d'après ce qu'on a vu plus haut, on a $k(p-k) \equiv -k^2 \equiv -a \pmod{p}$, il vient ce résultat

$$1.2.3 \dots p-1 \equiv -a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Ce résultat et celui que nous avons obtenu plus haut, peuvent être réunis dans la formule suivante

$$(3.) \quad 1.2.3 \dots p-1 \equiv \mp a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

dans laquelle il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que le nombre a que nous supposons n'être pas divisible par p , est ou n'est pas résidu quadratique de p . Si nous posons $a = 1$, le signe supérieur aura lieu, l'unité étant un quarré et parconséquent résidu quadratique de tout nombre. Nous avons donc

$$1.2.3 \dots p-1 \equiv -1 \pmod{p}$$

congruence qui constitue le théorème de Wilson.

Remplaçons le premier membre de la formule (3.) par le nombre -1 , qui comme nous venons de le voir, n'en diffère que d'un multiple de p , et changeons ensuite les signes des deux membres; il viendra ainsi

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

congruence dans laquelle il faudra choisir le signe $+$ ou le signe $-$, selon que a est ou n'est pas résidu quadratique de p . Le théorème que cette formule renferme, et qui a été découvert par Euler, est d'une grande importance dans la théorie des résidus. — On fera disparaître le double signe dans la dernière congruence en élevant ses deux nombres au quarré. On trouve ainsi

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ce qui est le théorème de Fermat.

Ce dernier théorème peut être démontré très simplement de la manière suivante, sans qu'il soit nécessaire de rien supposer de ce qui précède.

Les nombres a et p conservant leur signification, considérons les $p-1$ multiples de a que voici:

$$a, 2a, 3a, \dots (p-1)a.$$

Il est facile de voir que deux de ces nombres ne sauraient donner le même reste quand on les divise par p ; car si les restes provenant des

multiples ma et na étaient égaux, $ma - na = (m - n)a$ serait divisible par p , ce qui est impossible, a n'étant pas divisible par p , et $m - n$ étant $< p$ sans pouvoir être zéro. Les restes que l'on obtient en divisant par p les $p - 1$ multiples de a , étant tous différens entre eux et aucun de ces restes ne pouvant être nul, comme on le voit facilement, ces restes doivent coïncider avec les nombres de la série $1, 2, 3, \dots, p - 1$, quand on fait abstraction de l'ordre dans lequel ils se suivent. Il suit de là que le produit des $p - 1$ multiples de a , doit donner le même reste que le produit $1.2.3 \dots p - 1$.

La différence de ces produits est donc un multiple de p . Or cette différence pouvant facilement se mettre sous la forme

$$(a^{p-1} - 1)(1.2.3 \dots p - 1)$$

et $1.2.3 \dots p - 1$ n'étant pas divisible par p , on en conclut que $a^{p-1} - 1$ est multiple de p , ou, ce qui est les même chose, que a^{p-1} étant divisé par p donne l'unité pour reste.

37.

Sur le nombre des transformations différentes, qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction donnée de premier degré.

(Par Mr. N. H. *Abel*.)

Soit pour abréger

$$1. \Delta = (1 - x^2)(1 - c^2 x^2); \Delta^1 = (1 - y^2)(1 - c^1 y^2)$$

et supposons qu'on satisfasse à l'équation différentielle

$$2. \frac{\partial y}{\Delta^1} = a \cdot \frac{\partial x}{\Delta}$$

en y substituant pour y une fonction rationnelle de x de la forme

$$3. y = \frac{A_0 + A_1 x + \dots + A_{2n+1} \cdot x^{2n+1}}{B_0 + B_1 x + \dots + B_{2n+1} \cdot x^{2n+1}},$$

où $2n + 1$ est un nombre premier et au moins un des coefficients A_{2n+1} et B_{2n+1} est différent de zéro. En supposant, ce qui est permis, la fraction précédente réduite à sa plus simple expression, nous dirons que $\frac{\partial y}{\Delta^1}$ se transforme en $a \cdot \frac{\partial y}{\Delta}$ par la substitution d'une fonction de degré $2n + 1$.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs différentes de y qui répondent à la même valeur de $2n + 1$. Si l'on fait

$$4. \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta} \text{ et } \frac{\omega_1}{2} = \int_0^c \frac{\partial x}{\Delta}$$

et qu'on désigne par $\lambda \theta$ une fonction de θ , telle que

$$5. \partial \theta = \frac{\partial x}{\Delta} \text{ pour } x = \lambda \theta,$$

et en outre

$$\lambda(0) = 0,$$

il suit immédiatement de ce qui j'ai dit sur le problème général de la transformation des fonctions elliptiques dans le No. 138. du journal d'astronomie de Mr. Schumacher, qu'on satisfera de la manière la plus générale à l'équation $\frac{\partial y}{\Delta^1} = a \cdot \frac{\partial x}{\Delta}$ dans le cas où $B_{2n+1} = 0$, en prenant

$$5. \begin{cases} y = a \cdot \frac{x(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 \alpha})(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 2\alpha}) \dots (1 - \frac{x^2}{\lambda^2 n\alpha})}{(1 - c^2 \lambda^2 \alpha \cdot x^2)(1 - c^2 \lambda^2 (2\alpha) \cdot x^2) \dots (1 - c^2 \lambda^2 (n\alpha) \cdot x^2)}, \\ c^1 = c^{2n+1} \cdot \left\{ \lambda \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) \cdot \lambda \left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha \right) \dots \lambda \left(\frac{\omega}{2} + n\alpha \right) \right\}^4, \\ a = \frac{c^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c^1}} \cdot (\lambda \alpha \cdot \lambda (2\alpha) \dots \lambda (n\alpha))^2, \end{cases}$$

où α est une quantité de la forme

$$6. \alpha = \frac{m\omega + m^1 \omega^1}{2n+1},$$

m et m^1 étant deux entiers. Maintenant, ayant trouvé cette solution, il suit encore de la formule (51.) du mémoire cité que toutes les autres valeurs de y seront de la forme $\frac{f^1 + f \cdot y}{g^1 + g \cdot y}$, où y est donné par (5.), et f^1, f, g, g^1 sont des quantités constantes qui doivent satisfaire à l'équation

$$7. \left(1 + \frac{g + f}{g^1 + f^1} \cdot x\right) \left(1 + \frac{g - f}{g^1 - f^1} \cdot x\right) \left(1 + \frac{g + c^1 f}{g^1 + c^1 f^1} \cdot x\right) \left(1 + \frac{g - c^1 f}{g^1 - c^1 f^1} \cdot x\right) \\ = (1 - x^2)(1 - c^1 x^2).$$

Cette équation donne vingt-quatre systèmes de valeurs différentes. On trouve ainsi qu'à chaque valeur de α répondent 24 valeurs de y et douze valeurs du module c^1 . Mais comme les valeurs de y sont deux à deux égales, mais de signes contraires, nous n'en comptons que douze. Par la même raison nous réduirons le nombre des valeurs de c^1 à six. Cela posé, si l'on fait pour abréger:

$$8. \begin{cases} p = x \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 \alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2 (n\alpha)}\right); \quad v = (1 - c^2 \lambda^2 \alpha \cdot x^2) \dots (1 - c^2 \lambda^2 (n\alpha) \cdot x^2); \\ \varepsilon = c^{n+\frac{1}{2}} \left\{ \lambda \left(\frac{\omega}{2} + \alpha \right) \dots \lambda \left(\frac{\omega}{2} + n\alpha \right) \right\}^2; \quad \delta = c^{n+\frac{1}{2}} (\lambda \alpha \cdot \lambda (2\alpha) \dots \lambda (n\alpha))^2; \end{cases}$$

on trouvera aisément ces valeurs correspondantes des trois quantités c^1, α, y :

$$9. \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} & \text{V.} & \text{VI.} \\ c^1 = \varepsilon^2, & \frac{1}{\varepsilon^2}, & \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2, & \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2, & \left(\frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i}\right)^2, & \left(\frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i}\right)^2, \\ \alpha = \pm \frac{\delta}{\varepsilon}, & \mp \delta \varepsilon, & \pm \frac{\delta}{\varepsilon} (1+\varepsilon)^2 i, & \mp \frac{\delta}{\varepsilon} (1-\varepsilon)^2 i, & \pm \frac{\delta}{\varepsilon} (1+\varepsilon i)^2 i, & \mp \frac{\delta}{\varepsilon} (1-\varepsilon i)^2 i, \\ y = \begin{cases} \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{v}, & \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{v}{p}, & \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{v+\delta p}{v+\delta p}, & \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{v+\delta p}{v+\delta p}, & \frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i} \cdot \frac{v+\delta p \cdot i}{v+\delta p \cdot i}, & \frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i} \cdot \frac{v+\delta p \cdot i}{v+\delta p \cdot i}, \\ \frac{1}{\delta \varepsilon} \cdot \frac{v}{p}, & \delta \varepsilon \cdot \frac{p}{v}, & \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{v+\delta p}{v+\delta p}, & \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{v+\delta p}{v+\delta p}, & \frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i} \cdot \frac{v+\delta p \cdot i}{v+\delta p \cdot i}, & \frac{1-\varepsilon i}{1+\varepsilon i} \cdot \frac{v+\delta p \cdot i}{v+\delta p \cdot i}, \end{cases} \end{array} \\ \text{(où } i = \sqrt{-1}). \end{array}$$

On voit qu'à chaque valeur de c^1 correspondent deux valeurs différentes de la fonction y . Maintenant si l'on attribue aux nombres m et m^1 des valeurs entières quelconques, on aura toutes les solutions possibles de notre problème. Or parmi ces solutions il n'y aura qu'un nombre fini qui seront différentes entre elles. Cherchons d'abord les solutions différentes qui répondent au premier cas, savoir $c^1 = \varepsilon^2$ et $y = \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{v}$. Pour les trouver soit α^1 une valeur de α et désignons les valeurs correspondantes de $y, p, v, \delta, \varepsilon$ par $y^1, p^1, v^1, \delta^1, \varepsilon^1$. Cela posé il est évident, que si y^1 doit être égal à $\pm y$, on doit avoir:

$$p^1 = p, \quad v^1 = v, \quad \frac{\delta^1}{\varepsilon^1} = \pm \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Or en vertu de (8.) on ne pourra avoir $p^1 = p$, à moins que les quantités $\lambda^2 \alpha, \lambda^2(2\alpha), \dots, \lambda^2(n\alpha)$ ne soient, quoique dans un ordre différent, égales à celles-ci:

$$\lambda^2 \alpha^1, \lambda^2(2\alpha^1), \dots, \lambda^2(n\alpha^1).$$

Soit donc

$$\lambda^2 \alpha^1 = \lambda^2(\mu \alpha),$$

où μ est moindre que n . On en tire $\lambda \alpha^1 = \pm \lambda(\mu \alpha)$ et de là, en vertu du théorème II. du No. 138. du Journal d'astronomie:

$$\alpha^1 = k\omega + k^1\omega^1 \pm \mu\alpha,$$

où k et k^1 désignent des nombres entiers quelconques. Cela donne

$$\lambda^2(\mu^1 \alpha^1) = \lambda^2(\mu^1 \mu \alpha),$$

et puisque

$$\lambda(\theta + (2n+1)\alpha) = \lambda\theta,$$

et $2n+1$ est un nombre premier, il suit que

$$p^1 = p, \quad v^1 = v, \quad \delta^1 = \delta, \quad \varepsilon^1 = \varepsilon.$$

Donc les solutions qui répondent à α et α^1 sont précisément égales entre elles.

Soit d'abord $m^1 = 0$ en sorte que $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$.

Si l'on fait $k^1 = 0$, et qu'on détermine les nombres k et μ de la manière à satisfaire à l'équation

$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = 1,$$

on aura

$$\alpha' = \frac{\omega}{2n+1}.$$

On voit par là que la solution qui répond à $\alpha = \frac{m\omega}{2n+1}$ est la même que celle qui répond à $\alpha = \frac{\omega}{2n+1}$, quel que soit m .

Supposons maintenant m^1 différent de zéro, on aura

$$\alpha^1 = k\omega + k^1\omega^1 \pm \frac{m\mu \cdot \omega + m^1\mu\omega^1}{2n+1}.$$

Si l'on détermine les deux nombres entiers μ et k^1 par l'équation

$$k^1 \pm \frac{m^1\mu}{2n+1} = 1,$$

et k par celle-ci :

$$k \pm \frac{\mu m}{2n+1} = \frac{\nu}{2n+1},$$

où ν est positif et moindre que $2n+1$, on aura

$$\alpha^1 = \frac{\omega^1 + \nu\omega}{2n+1}.$$

On voit de là, que pour toutes les valeurs différentes de ν et p , il suffit de donner à α les valeurs :

$$10. \quad \frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\omega^1}{2n+1}, \quad \frac{\omega^1 + \omega}{2n+1}, \quad \frac{\omega^1 + 2\omega}{2n+1}, \quad \dots \quad \frac{\omega^1 + 2n\omega}{2n+1}.$$

Or toutes les solutions ainsi obtenues seront effectivement différentes entre elles; car si l'on attribue à α et à α^1 deux valeurs différentes de la série (10.), il est clair qu'on ne pourra satisfaire à l'équation

$$\alpha^1 = k\omega + k^1\omega^1 \pm \mu\alpha,$$

qui exprime une condition nécessaire de l'identité des deux solutions qui répondent à α et à α^1 .

Donc le nombre des solutions différentes qui répondent à $y = \frac{\delta}{\varepsilon} \cdot \frac{p}{v}$ est $2n+2$. Maintenant si l'on attribue à α toutes les valeurs (10.), les formules (9.) donneront $12.(2n+2)$ solutions, et il est évident que toutes les $12.(2n+2)$ valeurs correspondantes de y seront nécessairement différentes entre elles. Cependant il ne répond à ces $24.(n+1)$ solutions que $12.(n+1)$ valeurs du module. Il faut observer que la conclusion précédente n'a pas lieu pour le cas particulier où $n=0$. En effet, dans ce cas y n'aura que douze valeurs différentes, car les deux valeurs $\alpha = \omega$, $\alpha = \omega^1$, auxquelles dans ce cas se réduisent les quantités (10.), donneront pour y une même valeur, savoir $y = x$. Il faut remarquer également que le module c ne doit avoir les valeurs zéro et l'unité. Dans ces cas la fonction $\int \frac{dx}{\Delta}$ n'est plus une fonction elliptique, mais circulaire ou logarithmique.

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-b^2x^2)]}},$$

où

$$b = \sqrt{1-c^2},$$

on aura

$$\omega^1 = \omega + \varpi\sqrt{-1}.$$

où ϖ est une quantité réelle comme ω . Cela posé les $2n+2$ valeurs de α deviendront:

$$\frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i + \omega}{2n+1}, \quad \dots \quad \frac{\varpi i + (2n+1)\omega}{2n+1}.$$

A la place de ces valeurs on pourra aussi mettre celles-ci:

$$\frac{\omega}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i + 2\omega}{2n+1}, \quad \frac{\varpi i + 4\omega}{2n+1}, \quad \dots \quad \frac{\varpi i + 4n\omega}{2n+1},$$

où $i = \sqrt{-1}$.

En faisant $c=1$, $e = \frac{c}{b}$ (formule 189. Tome II. pag. 177.), et mettant ensuite $b\omega$ et $b\varpi$ au lieu de ω et ϖ , et enfin $\alpha = b\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right)$, on trouvera $\lambda\theta = f\alpha$ et la formule donnera en vertu de quelques réductions faciles:

$$12. \lambda\theta = \frac{2}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt[4]{q} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right) \cdot \frac{\left[1-2q^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right) + q^4\right] \left[1-2q^4 \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right) + q^8\right] \dots}{\left[1-2q \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right) + q^2\right] \left[1-2q^3 \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\theta\right) + q^6\right] \dots},$$

où $q = e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi}$.

Pour avoir la valeur de ε (8.), il suffit de chercher les valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega}{2} + \alpha\right)$, $\lambda\left(\frac{\omega}{2} + 2\alpha\right)$, $\dots$, $\lambda\left(\frac{\omega}{2} + n\alpha\right)$ au moyen de la formule précédente, et de les multiplier ensuite entre elles. D'abord si l'on fait $\alpha = \frac{\omega}{2n+1}$, on trouvera aisément

$$13. \varepsilon = 2 \cdot \sqrt[4]{q^{2n+1}} \cdot \left\{ \frac{1+q^{2(2n+1)}}{1+q^{2n+1}} \cdot \frac{1+q^{4(2n+2)}}{1+q^{3(2n+1)}} \dots \right\}^2.$$

De même si l'on fait

$$\alpha = \frac{\varpi i + 2\mu\omega}{2n+1},$$

et pour abrégé:

$$\delta_1 = \cos \frac{2\pi}{2n+1} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n+1},$$

on parviendra à cette formule:

$$14. \varepsilon = 2 \cdot \sqrt[4]{\left(\delta_1^\mu \cdot q^{\frac{1}{2n+1}}\right)} \cdot \left\{ \frac{1 + \left(\delta_1^\mu \cdot q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^2}{1 + \delta_1^\mu \cdot q^{\frac{1}{2n+1}}} \cdot \frac{1 + \left(\delta_1^\mu \cdot q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^4}{1 + \left(\delta_1^\mu \cdot q^{\frac{1}{2n+1}}\right)^3} \dots \right\}^2.$$

Donc on voit, que pour avoir toutes les valeurs de ε , il suffit de substituer dans l'expression

$$15. \quad 2 \cdot \sqrt[4]{q} \cdot \left(\frac{1+q^2}{1+q} \cdot \frac{1+q^4}{1+q^3} \cdots \frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}} \cdots \right)^2,$$

au lieu de q , les $2n+2$ valeurs q^{2n+1} , $q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1 q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\delta_1^2 q^{\frac{1}{2n+1}}$, $\dots$, $\delta_1^{2n} q^{\frac{1}{2n+1}}$, où $1, \delta_1, \delta_1^2, \dots$ sont les racines de l'équation $\delta^{2n+1} = 1$. Deux seulement des valeurs de ε sont réelles, savoir celles qui répondent à la substitution de q^{2n+1} et $q^{\frac{1}{2n+1}}$, c'est à dire à

$$\alpha = \frac{\omega}{2n+1} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi i}{2n+1}.$$

Il suit encore des formules précédentes que toutes les $2n+2$ valeurs de ε sont nécessairement différentes entre elles, excepté peut-être pour les cas de valeurs particulières du module c . Ayant trouvé les valeurs de ε , on aura celles du module c^1 à l'aide des équations (9.). Il y a à remarquer que l'expression (15.) est précisément la valeur de $\sqrt{c}$, comme on peut le voir en faisant $\theta = \frac{\omega}{2}$. Dans le cas où l'on suppose y de la forme $\frac{\delta}{\varepsilon} \cdot u$, le module c^1 , suivant I. (9.) sera égal à ε^2 , donc $\sqrt{c^1} = \varepsilon$. Par conséquent dans ce cas le module c se changera successivement dans toutes les valeurs du module c^1 , si l'on remplace dans la formule

$$16. \quad \sqrt{c} = 2 \cdot \sqrt[4]{q} \cdot \left(\frac{1+q^2}{1+q} \cdot \frac{1+q^4}{1+q^3} \cdots \right)^2,$$

q par q^{2n+1} , $\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1 \sqrt[2n+1]{q}$, $\delta_1^2 \sqrt[2n+1]{q}$, $\dots$, $\delta_1^{2n} \sqrt[2n+1]{q}$.

Ce théorème s'accorde parfaitement avec le théorème énoncé par Mr. Jacobi dans le tome III. pag. 193. de ce journal. Seulement à l'endroit cité la fonction de q , qui exprime la valeur de $\sqrt{c}$, est présentée sous une autre forme. Donc on trouveroit immédiatement le théorème de ce géomètre, si l'on pouvoit parvenir à démontrer l'identité des deux fonctions

$$17. \quad \sqrt[4]{q} \cdot \left(\frac{1+q^2}{1+q} \cdot \frac{1+q^4}{1+q^3} \cdots \right)^2 = \frac{q^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{2}{2}} + q^{\frac{3}{2}} + \dots}{1 + 2q + 2q^9 + 2q^{16} + \dots}.$$

On pourra encore démontrer qu'on aura les $2n+2$ valeurs de c^1 , en mettant dans la formule

$$18. \quad \sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r} \cdot \frac{1-r^3}{1+r^3} \cdot \frac{1-r^5}{1+r^5} \cdots$$

les quantités r^{2n+1} , $\sqrt[2n+1]{r}$, $\delta \sqrt[2n+1]{r}$, $\delta^2 \sqrt[2n+1]{r}$, $\dots$, $\delta^{2n} \sqrt[2n+1]{r}$, au lieu de r , la lettre r désignant la quantité $e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$. Donc cette quantité est liée à q par l'équation

$$\log\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \log\left(\frac{1}{q}\right) = \pi^2.$$

Pour avoir la valeur du coefficient α il faut connoître celle de δ (8.). Or on pourra la déduire aisément de la formule (12.), en y faisant $\theta = \alpha$, 2α , $\dots$, $n\alpha$. On trouve de cette manière que les valeurs de δ qui répondent respectivement à

$$\alpha = \frac{\omega}{2n+1}, \frac{\varpi i}{2n+1}, \frac{\varpi i + 2\omega + 1}{2n+1}, \dots, \frac{\varpi i + 4n\omega}{2n+1},$$

sont égales à la valeur de l'expression

$$19. \delta = 2 \cdot \frac{\pi}{\omega} \cdot \sqrt[4]{q} \cdot \left(\frac{1-q^2}{1-q} \cdot \frac{1-q^4}{1-q^3} \cdot \dots \right)^2,$$

en y supposant au lieu de q les valeurs q^{2n+1} , $\sqrt[2n+1]{q}$, $\delta \sqrt[2n+1]{q}$, $\delta^2 \sqrt[2n+1]{q}$, $\dots$, $\delta^{2n} \sqrt[2n+1]{q}$.

38.

Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.

(Par Mr. N. H. *Abel*.)

Si une intégrale algébrique $f(y, x) = 0$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}} = a \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}},$$

on aura toujours :

$$\int \frac{A+Bx^2}{1-\frac{x^2}{n^2}} \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = \int \frac{A'+B'y^2}{1-\frac{y^2}{m^2}} \cdot \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}} + k \log p,$$

où A, B, n sont des quantités données, A', B', m, k des quantités constantes, fonctions des premières, et p une certaine fonction algébrique de y et x . Il est très remarquable que les paramètres m et n sont liés entre eux par la même équation, que y et x ; savoir $f(m, n) = 0$. Dans le cas où n est infini, le premier membre deviendra seulement une fonction de la seconde espèce et dans ce cas on pourra démontrer que

$$(a.) \int (A+Bx^2) \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = \int (A'+B'y^2) \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}} + v,$$

où v est une fonction algébrique des variables x et y .

Au reste il est aisé de démontrer la formule (a.). Il n'y a qu'à différentier l'équation

$$a \int \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}},$$

par rapport au module c . Je me réserve de donner dans un autre mémoire des développemens plus étendus sur le théorème ci-dessus.

39.

Suite des notices sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. C. G. J. Jacobi, prof. en phil. à Königsberg.)

I. Les formules données dans le troisième cahier de ce journal contiennent la découverte importante, „que les fonctions elliptiques de troisième espèce, dans lesquelles entrent trois variables, peuvent être ramenées à d'autres transcendentes qui n'en ont que deux.” De là on tire aisément toute la théorie des fonctions elliptiques de troisième espèce.

II. Soit $q = e^{\frac{-\pi K'}{K}}$, $q' = e^{\frac{-\pi K}{K'}}$, de sorte que l'on trouve q' en q , en mettant k' au lieu de k , ou en changeant le module et son complément. Si l'on met

$$\Theta(x, q) = 1 - 2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots$$

$$H(x, q) = 2\sqrt[4]{q} \sin x - 2\sqrt[4]{q^9} \sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}} \sin 5x - \dots$$

on aura :

$$\Theta(ix, q) = \sqrt{\left(\frac{K}{K'}\right)} e^{\frac{Kxx}{\pi K'}} H\left(\frac{Kx}{K'} + \frac{\pi}{2}, q'\right),$$

$$H(ix, q) = i \sqrt{\left(\frac{K}{K'}\right)} e^{\frac{Kxx}{\pi K'}} H\left(\frac{Kx}{K'}, q'\right),$$

i étant toujours $= \sqrt{-1}$, formules très remarquables. On pourra déduire l'une de l'autre au moyen de la formule $\sin am(iu, k) = i \operatorname{tang} am(u, k')$.

III. Je suis parvenu à résoudre un problème dont la difficulté avoit éludé long-tems tous mes efforts, savoir de trouver l'expression générale et algébrique des formules de multiplication. En effet on sait qu'en supposant $z = \sin am(nu)$, $x = \sin am(u)$, n étant un nombre impair quelconque, on a

$$z = \frac{A'x + A'''x^3 + A^{(5)}x^5 + \dots + A^{(nn)}x^{nn}}{1 + A''x^2 + A^{(4)}x^4 + \dots + A^{(nn-1)}x^{nn-1}} = \frac{U}{V},$$

A' , A'' , A''' , etc. étant des fonctions rationnelles et entières de k . On peut aussi trouver successivement pour chaque valeur donnée de n , p. e. $n = 3, 5, 7, \dots$, les expressions de U et de V ; mais trouver généralement pour un nombre n indéfini les valeurs algébriques de A' , A'' , A''' , etc.

en k , est un problème où toutes les méthodes connues paraissent être en défaut. Or, $z = \frac{U}{V}$ étant une substitution rationnelle quelconque qui sert ou à la transformation ou à la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce, je suis parvenu à sommer par parties le numérateur et le dénominateur de la substitution à faire et à définir l'un et l'autre au moyen d'une équation à différences partielles entre x et k . Dans le cas de la multiplication on tire de cette équation les expressions générales de A' , A'' , A''' , ... On trouve par exemple

$$A'' = 0, \quad A^{(2)} = -\frac{n^2(n^2-1)}{3.4}k^2, \quad A^6 = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)k^2(1+k^2)}{3.5.6},$$

$$A^{(8)} = -\frac{2n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)k^2(1+k^4)}{3.3.5} - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)(17n^2-69)k^2}{3.3.4.5},$$

etc. etc. etc.

On trouve très facilement chaque terme $A^{(m)}$ par les deux termes $A^{(m-2)}$, $A^{(m-4)}$, qui le précèdent. En vertu d'une remarque faite dans une autre occasion, savoir qu'étant mis $\frac{1}{kx}$ au lieu de x , z se change en $\frac{1}{\lambda z}$, λ étant le module transformé, on tire aussitôt le numérateur U du dénominateur et réciproquement. Le cas de n pair ne demande que quelques légères modifications.

Königsberg le 3. Oct. 1828.

40.

Zweite Annäherungs-Construction des Kreis-Umfanges.

(Von Herrn C. G. Specht zu Berlin.)

In der höchst schätzbaren und reichhaltigen Geometrie des Herrn Professor Paucker zu Mitau befindet sich eine Sammlung von elementar-geometrischen Constructionen, den Umfang eines Kreises näherungsweise zu finden, von denen die genaueste bis zu der fünften Decimalstelle mit dem Calcul übereintrifft, aber doch so weitläufig ist, daß sie in der wirklichen Ausführung bedeutende Schwierigkeiten verursacht. Ich habe vor einiger Zeit in diesem Journal eine einfache Construction des Kreis-Umfanges bekannt gemacht, welche bis zu der sechsten Decimalstelle mit dem Calcul übereintrifft, und gebe hier eine zweite, die bei der größten Einfachheit bis zu der achten Decimalstelle genau ist.

Man construire den rechten Winkel BAC ; *) nehme auf dem einen Schenkel AB desselben, $Aa = am = mp = pq = qB =$ dem Radius des gegebenen Kreises; theile sowohl mp in n und o , so wie auch qB in r und s , in 3 gleiche Theile; nehme auf dem andern Schenkel AC dieses Winkels, $AM = Aa$, $AR =$ der Entfernung zwischen den Puncten M und m , $AC =$ der Entfernung zwischen den Puncten R und r ; nehme nun auf der Geraden Co , die $Cc = AB$; und ziehe endlich aus c mit AB eine Parallele, bis sie die CB in d trifft; so wird Cd mit dem Umfange des gegebenen Kreises bis zu der achten Decimalstelle übereinstimmen. Denn es folgt aus der Construction, daß

$$Cd = \frac{5\sqrt{(3^2+6^2+13^2+15^2)}}{\sqrt{(3^2+6^2+13^2+8^2)}} = 5\sqrt{\left(\frac{439}{278}\right)}.$$

Nun ist $\pi = 3,141592653 \dots$

und $\frac{1}{2}Cd = 3,141592639 \dots$

folglich $\pi - \frac{1}{2}Cd = 0,000000014 \dots$

Es ist zu bemerken, daß die Formel

$$\frac{13\sqrt{146}}{50} = 3,1415919531 \dots,$$

*) Es wird dem Leser leicht sein, die Figur nach der Beschreibung zu entwerfen.

welche in dem ersten Heft des dritten Bandes pag. 83. in diesem Journal steht *), erst in der siebenten Decimalstelle um sieben Einheiten kleiner ist, wie die Zahl π , und die merkwürdige Beschaffenheit hat, daß sie in den beiden nächsten Decimalstellen wieder mit der Zahl π übereinstimmt, so daß die Formel

$$\frac{7}{10^7} + \frac{13\sqrt{146}}{50} = 3,1415926531$$

erst bei der zehnten Decimalstelle von der Zahl π abweicht **).

*) Durch einen Druckfehler steht daselbst

3,141591953 statt $2 \times 3,141591953$.

**) Wenn man die Zahl π näherungsweise durch Quadrat-Wurzeln ausdrücken will, welche Ausdrücke sich auch mit mehr oder weniger Mühe immer zeichnen lassen, so darf man nur das Quadrat von π , auf die Art wie man Brüche sucht die sich der Zahl π selbst oder überhaupt einer gegebenen irrationalen Zahl möglichst nähern, in einen Kettenbruch und diesen rückwärts in gewöhnliche Brüche verwandeln. Diese Brüche geben wie bekannt den Werth des Kettenbruchs, und folglich ihre Quadrat-Wurzeln die Zahl π selbst, genauer als alle andere Brüche in kleineren Zahlen. Auf ähnliche Weise kann man verfahren, wenn man π durch Cubic-Wurzeln oder in beliebigen anderen Formen, deren Umkehrungen sich leicht berechnen lassen, näherungsweise ausdrücken will.

41. Aufgaben.

Question d'analyse indéterminée.

(Par Mr. Lejeune-Dirichlet, prof. de mathém.)

30. La lettre p désignant un nombre premier impair, on sait par le théorème de Wilson, que le produit $1.2.3....p-1$, augmenté de l'unité, est divisible par p . On peut substituer au produit précédent celui que l'on obtient en remplaçant ses $\frac{p-1}{2}$ derniers facteurs qui sont $p-1$, $p-2$, ... $\frac{p+1}{2}$, par les nombres -1 , -2 , ..., $-\frac{p-1}{2}$, qui en diffèrent respectivement de p . On voit ainsi que la formule

$$\pm \left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2 + 1,$$

dans la quelle il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair, est toujours un multiple de p . Or $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair, selon que p est de la forme $4n+1$ ou de celle-ci: $4n+3$. On a donc pour tout nombre premier $p=4n+1$,

$$\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2 + 1$$

égal à un multiple de p , et pour tout nombre premier $p=4n+3$,

$$-\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2 + 1,$$

ou ce qui revient au même

$$\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1$$

égal à un multiple de p .

Ces deux corollaires du théorème de Wilson sont dûs à Lagrange, qui les a énoncés dans le beau mémoire où il a le premier démontré le théorème qu'on vient de nommer. Le dernier de ces corollaires donne lieu à une question que nous croyons pouvoir proposer à l'attention des géomètres qui s'occupent de la théorie des nombres.

La différence

$$\left(1.2.3....\frac{p-1}{2}\right)^2 - 1$$

étant divisible par p (p désignant un nombre premier $4n+3$) et cette différence pouvant se décomposer dans les deux facteurs:

$$\left(1.2.3 \dots \frac{p-1}{2}\right) + 1, \left(1.2.3 \dots \frac{p-1}{2}\right) - 1,$$

il s'ensuit que l'expression

$$\left(1.2.3 \dots \frac{p-1}{2}\right) \pm 1$$

avec le signe convenable est un multiple de p . On demande une règle qui fasse connoître le signe convenable, sans qu'il soit nécessaire de chercher par des multiplications successives le reste que l'on obtient en divisant $1.2.3 \dots \frac{p-1}{2}$ par p . Il est facile de voir que la question proposée revient à celle de savoir si $1.2.3 \dots \frac{p-1}{2}$ est ou n'est pas résidu quadratique de p .

Aufgaben von Anderen.

31. *a.* Von geradlinigen Figuren in der Ebene, deren Seiten mit denen gegebener Figuren parallel und von ihnen gleich weit entfernt sind, die Eigenschaften in Beziehung auf die gegebenen Figuren zu untersuchen.

b. Von Polyëdern, deren Seiten-Ebenen mit denen gegebener Polyëder parallel und gleich weit von ihnen entfernt sind, die Eigenschaften in Beziehung auf die gegebenen Polyëder zu untersuchen.

32. Die Zahl der geraden Linien, durch welche n Punkte in der Ebene oder im Raume verbunden werden können, ist $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Zu sagen, wie viele allgemein von diesen geraden Linien nöthig sind, die Lage der n Punkte zu bestimmen, und welche Modificationen des allgemeinen Gesetzes, wenn es ein solches giebt, entstehen, wenn die Punkte theilweise zu mehr als dreien in Ebenen, oder alle in einer und derselben Ebene liegen.

33. Die Zahl der Punkte zu finden, in welchen sich die $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ geraden Linien schneiden, durch welche n Punkte in der Ebene oder im Raume verbunden werden können, nebst den Modificationen. (32.)

34. Aehnliche Figuren in der Ebene oder im Raume, von krummen oder geraden Grenzen umschlossen, sind im Allgemeinen die-

jenigen, die so gelegt werden können, daß die bestimmenden Punkte der einen und die ähnlich liegenden bestimmenden Punkte der anderen in geraden Linien liegen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, und daß dann zugleich die Entfernungen der bestimmenden Punkte der einen Figur von diesem Punkte (welcher Aehnlichkeits-Punkt heißen kann) Gleichvielfache sind von den Entfernungen der bestimmenden Punkte der anderen von dem nemlichen Punkte. (Man sehe den Aufsatz No. 24. im ersten Bande dieses Journals, 3. Heft, S. 250. *.) Es wäre nun zu untersuchen, welche Eigenschaften Figuren zukommen, die so gelegt werden können, daß, wie bei ähnlichen Figuren, die bestimmenden Punkte der einen und die zugehörigen Punkte der anderen in geraden Linien liegen, welche durch einen und denselben Punkt gehen, daß aber dann die Entfernungen der bestimmenden Punkte der einen Figur von diesem Punkte, statt, wie bei ähnlichen Figuren, von den Entfernungen der bestimmenden Punkte der anderen von dem nemlichen Punkte Gleichvielfache zu sein, vielmehr um gleich viel von ihnen verschieden sind, oder daß die Summe zusammengehöriger Entfernungen überall dieselbe sei, oder daß die Producte der zusammengehörigen Entfernungen alle gleich sind. Das Letztere würde antiparallele Figuren geben.

*) Der Herausgeber dieses Journals hat in einer der Königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin von ihm am 13. März 1828 vorgelesenen Abhandlung einige aus dieser Definition folgende allgemeine Eigenschaften ähnlicher Figuren entwickelt.

42.

Einige Nachrichten von Büchern *).

Es ist in diesem Jahre eine mathematische Schrift des Herrn Doctor Plücker zu Bonn erschienen, unter dem Titel: „Analytisch-geometrische Entwicklungen. Erster Band. Essen bei G. D. Baedeker, 1828.“ Die Schrift handelt von der Theorie der graden Linie, des Kreises und der Linien zweiter Ordnung, letztere nach der rechten analytischen Methode, nicht aus dem Kegel sondern aus der allgemeinen Gleichung zweiter Ordnung abgeleitet. Sie verbreitet sich über die Gegenstände neuerer geometrischer Untersuchungen, über die Transversalen, Chordalen, Polaren, Aehnlichkeitspunkte und Axen, über die Zuordnung der Pole, die Bedeutung imaginärer Ausdrücke u. s. w. Sie handelt von der Bedeutung der Coefficienten der allgemeinen Gleichung zweiter Ordnung, von den Durchmessern, Brennpunkten, von den Durchschnitten u. s. w. allgemein und einfach, von der Osculation gewissermaßen eigenthümlich, und schließt mit einem Abschnitte, der sich zu einer bedeutenden Allgemeinheit erhebt. Sie scheint insbesondere zur Vermittelung zwischen der synthetischen und analytischen Methode in der Geometrie beitragen und die analytische Methode auch für die einfacheren Fälle, wo sie weniger anstellig zu sein scheint, geschmeidiger machen zu sollen. Die Art wie sie durch Zerlegung und Verbindung der Gleichungen, durch Multiplication und vermittelt Einführung von unbestimmten Coefficienten, durch Benutzung der Willkürlichkeit der Coordinaten-Winkel und der Lage der Axen und andere Kunstgriffe das analytische Verfahren dem synthetischen gleichsam näher zu rücken strebt, so wie die Sparsamkeit der Rechnungen und Formeln, ist bemerkenswerth. Sie vereinigt in sich auf eine scharfsinnige und eigenthümliche Weise die Untersuchungen die über diesen Gegenstand in neuerer Zeit nach eigenthümlichen Ansichten angestellt worden sind, und von welchen sich eine reichhaltige Sammlung in den *Annales des mathématiques* von Gergonne findet, und schreitet auf diesem Wege weiter. Die Schrift hat unstreitig bedeutenden wissenschaftlichen Werth und verdient alle Aufmerksamkeit. Es ist zu wünschen, daß ihre Fortsetzung über die Curven höherer Ordnung und die Figuren im Raume bald erscheinen möge. Ueber eine Aeußerung in der Vorrede glaubt der Herausgeber dieses Journals eine Bemerkung machen zu müssen, weil sie theils das Journal selbst, theils persönliche Umstände berührt, welche dem Herausgeber genau bekannt sind. Es heißt nemlich S. V. der Vorrede, daß der Herr Verfasser mehrere neue, unter sich sehr verschiedene, von ihm auf seinem Wege gefundene Resultate des Herrn Steiner (eines ausgezeichneten Mitarbeiters an diesem Journal), der in die Fußstapfen des Herrn Poncelet zu treten scheine, später im ersten und zweiten Hefte dieses Journals wiedergefunden habe. Der Herausgeber bemerkt, daß, wie ihm bestimmt bekannt und von ihm auch schon S. 96. ersten Bandes dieses Journals angedeutet ist, Herr Steiner keinesweges weder die Arbeiten des Herrn Plücker, noch die des Herrn Poncelet gekannt hat, als er die seinigen verfertigte, sondern völlig selbstständig arbeitete, daher sich auch nicht eigentlich sagen läßt, daß Herr Steiner in fremde Fußstapfen trete. Obgleich es noch keinesweges ein Ta-

*) Der Herausgeber nimmt, um Entschuldigung zu erbitten, daß er nur so selten Nachrichten und Beurtheilungen von Büchern giebt, auf die den vorjährigen Nachrichten (S. 399. des 2ten Bandes dieses Journals) beigelegte Bemerkung Bezug. Diese Bemerkung zeigt die Ursachen der Seltenheit seiner Aeußerungen dieser Art an. Die Bitte, ihn dabei zu unterstützen, ist bis jetzt noch nicht erfüllt worden. Er wiederholt sie.

del sein würde, zu sagen, daß Jemand in die Fußstapfen eines so ausgezeichneten, classischen Schriftstellers wie Herr Poncelet trete, so glaubt der Herausgeber doch die obige Bemerkung machen zu müssen, damit auf keine Weise, auch nicht scheinbar, etwa ein Schatten auf die Arbeiten des Herrn Steiner falle, sondern diesen, ganz auf eigener Kraft ruhenden, genialen Bemühungen volle Gerechtigkeit widerfahren möge.

Die im vorigen Jahrgange dieses Journals S. 399. und 400. erwähnten *Annales des mathématiques* von Herrn Gergonne und das *Bulletin universel des sciences* von Herrn Baron von Férussac sind auf eine erfreuliche Weise fortgesetzt worden. Das Bulletin ist noch fester begründet worden und verstärkt seine intensive Kraft fernerhin.

Von den eben daselbst erwähnten *Exercices des mathématiques* von Herrn A. L. Cauchy sind wieder 12 neue inhaltvolle Hefte, also nunmehr in Allem 31 Hefte erschienen. Von dem trefflichen *Cours d'analyse* des Herrn A. L. Cauchy erscheint so eben zu Königsberg in Preußen bei Bornträger eine deutsche Uebersetzung von Herrn Huzzler, welche zur Verbreitung dieses wichtigen Werkes in Deutschland beitragen wird.

Die ferner daselbst erwähnte zweite Auflage der „*Exercices du calcul intégral*“ von Herrn Legendre ist nunmehr erschienen. Die Erneuerung dieses classischen Werkes ist um so interessanter, da über den Gegenstand, mit welchem es sich vorzüglich beschäftigt, die elliptischen Functionen, jetzt so eifrig und vielfältig gearbeitet wird. Es sind, wie der ehrwürdige Verfasser dem Herausgeber zu melden die Güte gehabt hat, zwei Supplemente des Werks zu erwarten, von welchen das eine die Beweise der allgemeinen Theoreme des Herrn C. G. J. Jacobi über die elliptischen Functionen, nebst neuen Entwicklungen enthalten wird und so eben gedruckt wird, das andere über die Entdeckungen des Herrn N. H. Abel und die ferneren Arbeiten der beiden benannten Geometer, diesen Gegenstand betreffend, sich verbreiten wird.

Von Herrn C. G. J. Jacobi ist ein Werk über die elliptischen Functionen, unter dem Titel: *Fundamenta nova Theoriae functionum ellipticarum* unter der Presse. Herr N. H. Abel bearbeitet ebenfalls ein umfassendes Werk über diesen Gegenstand. Diese Schriften werden die weitere Ausführung der Mittheilungen enthalten, welche ihre Verfasser in dem gegenwärtigen Journale und in den „astronom. Abhandlungen des Hrn. Schumacher“ gegeben haben, und werden also von großem Interesse sein.

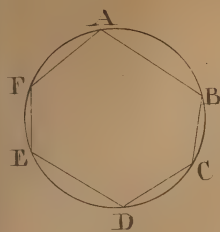
Die Kaiserliche Academie der Wissenschaften zu St. Petersburg giebt so eben einen Supplement-Band zu der bereits geschlossenen Suite ihrer Memoiren, enthaltend Arbeiten verstorbener Academiker, heraus. Dieser Band wird, außer mehreren wichtigen Abhandlungen von Schubert und Fufs, wiederum zwölf noch ungedruckte Abhandlungen des großen Euler enthalten. Der Herr Staats-Rath Fufs, beständiger Secretair der kaiserlichen Academie, hat auf die Bitte des Herausgebers die Güte gehabt, ihm die Titel der Eulerschen Abhandlungen mitzutheilen. Es sind folgende:

- 1) De insigni promotione analysis Diophantaeae. 1780.
- 2) Solutio problematis difficillimi, quo hae duae formulae $ax^2 + by^2$ et $ay^2 + bx^2$ quadrati reddi debent. 1780.
- 3) Investigatio binorum numerorum formae $xy(x^4 - y^4)$ quorum productum, sive quotus, sit quadratum. 1780.
- 4) De binis numeris, quorum summa, sive aucta sive minuta, tam unius quam alterius quadrato producat quadrata. 1780.
- 5) Dilucidationes circa binas summas duorum biquadratorum inter se aequales. 1780.
- 6) De resolutione hujus aequationis: $0 = +bx + cy + dxx + exy + fyy + gxy + hxyy + ixyy$ per numeros rationales. 1780.
- 7) Methodus nova et facilis, formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi. 1780.

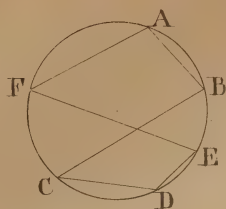
- 8) *Solutio problematis ad analysin infinitorum indeterminatorum referendi.* 1781.
- 9) *De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur.* 1781.
- 10) *De infinitis curvis algebraicis quarum longitudo arcui parabolico aequatur.* 1781.
- 11) *De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus.* 1781.
- 12) *De curvis algebraicis quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat.* 1781.
- 13) *Solutio problematis analytici difficillimi.* 1782.
- 14) *Intégration d'une espèce remarquable d'équations différentielles dans l'analyse des fonctions à deux variables.* 1777.

Es ist Eulers eigener, in seinen letzten Lebensjahren ausgesprochener Wunsch gewesen, noch 40 Jahre nach seinem Tode in den Druckschriften der Academie fortzuleben: und wirklich hat der reiche Vorrath bis jetzt vorgehalten, ob er gleich bald nach Eulers Tode um 58 Abhandlungen vermindert worden, aus welchen die *Opuscula analytica* und der vierte Band der zweiten Auflage der *Instit. calc. int.* entstanden sind. Wenn gleich ein halbes Jahrhundert alt, sind die oben erwähnten Abhandlungen doch noch nicht veraltet und enthalten interessante Forschungen über unbestimmte Analysis und höhere Geometrie, welche dem mathematischen Publicum höchst willkommen sein werden. Des großen Geometers Wunsch, noch 40 Jahre in den Memoiren der Academie zu leben ist erfüllt, aber Jahrtausende noch wird dieser Heros der Mathematik leben in der Wissenschaft und in der Achtung und Bewunderung der Nachkommen.

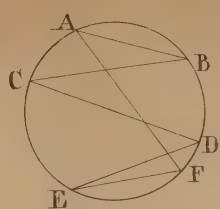
1.



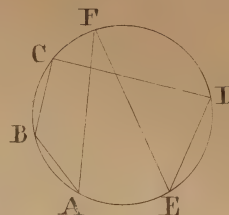
2.



3.



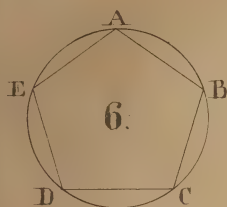
4.



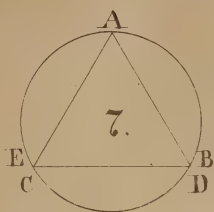
5.



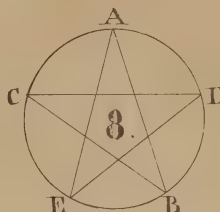
6.



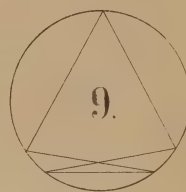
7.



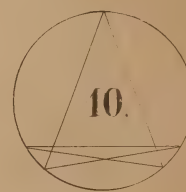
8.



9.



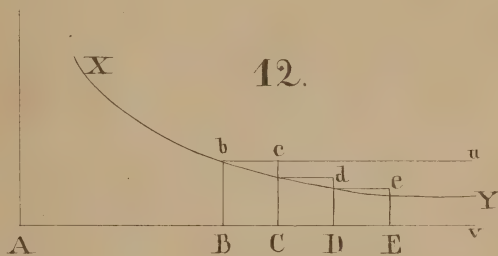
10.



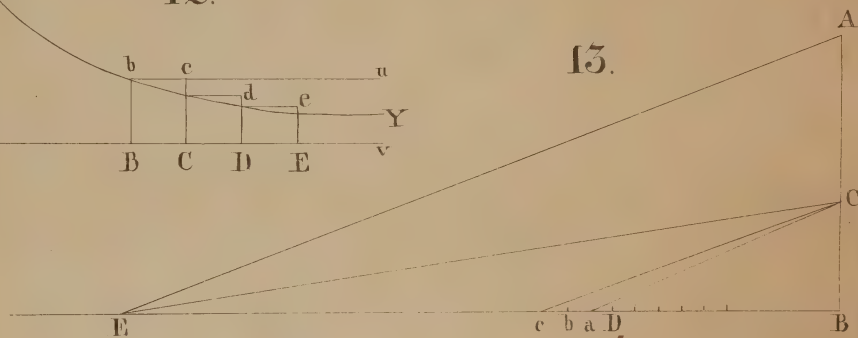
11.



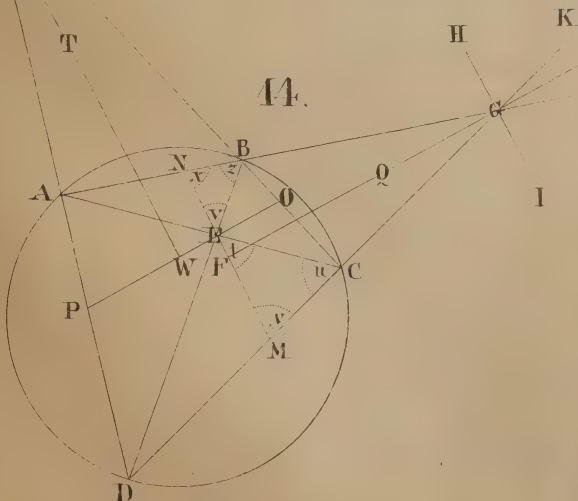
12.



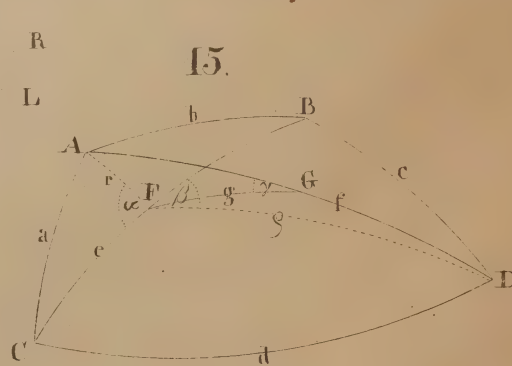
13.

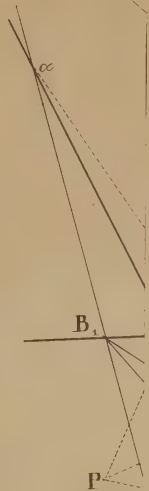


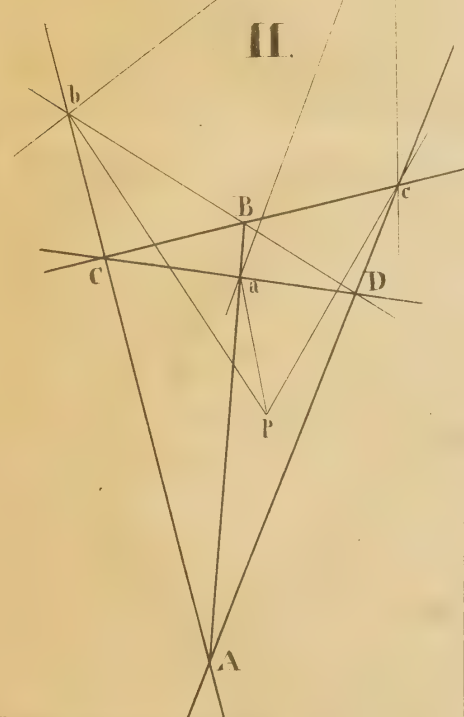
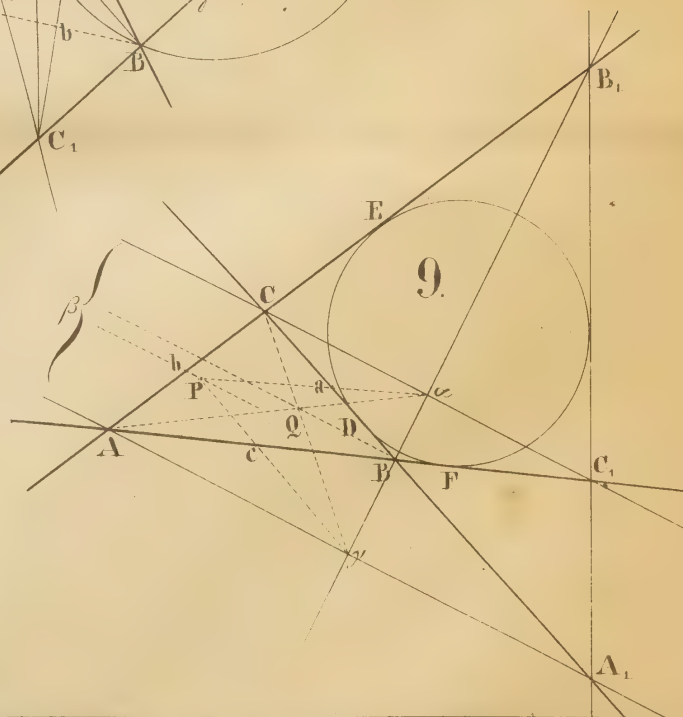
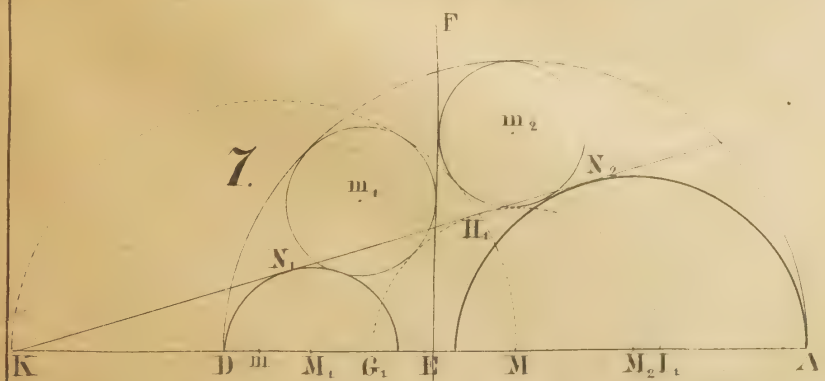
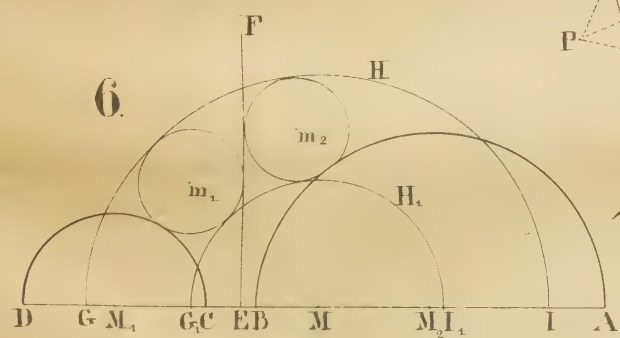
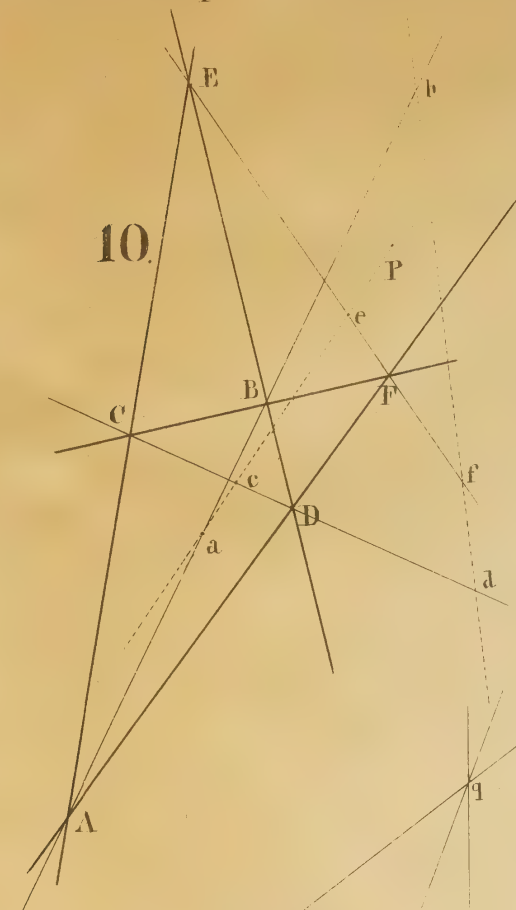
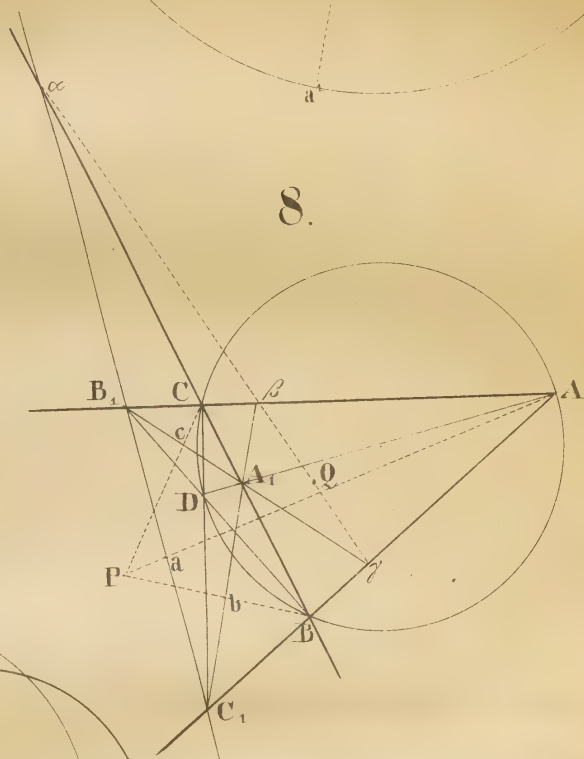
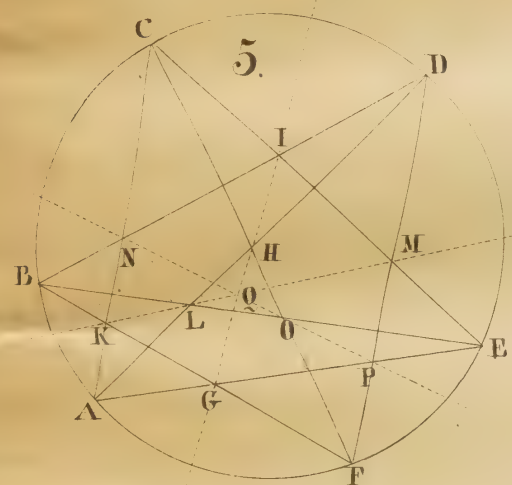
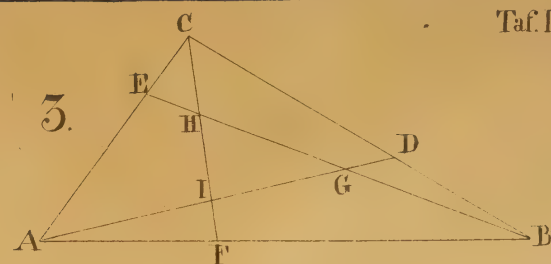
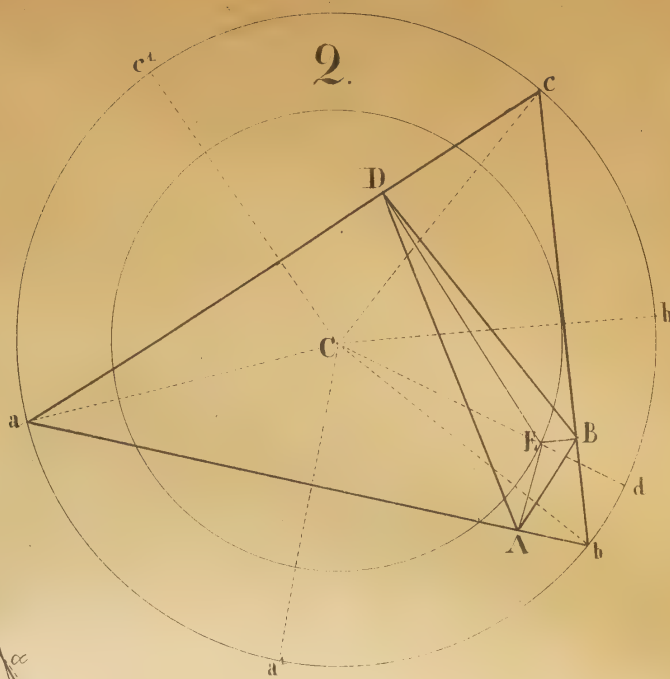
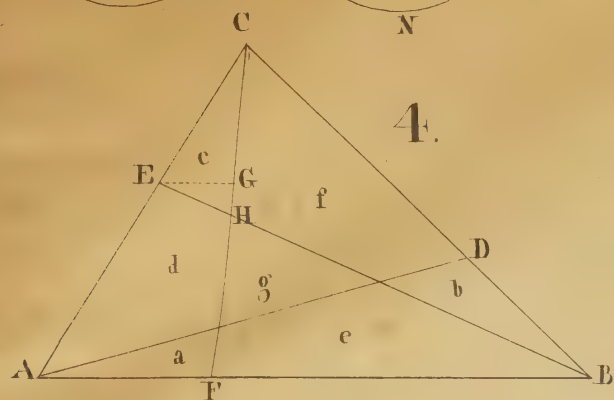
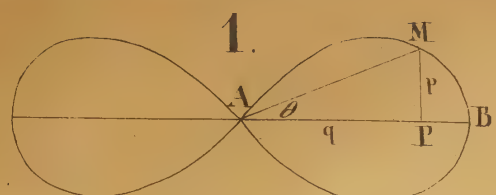
14.



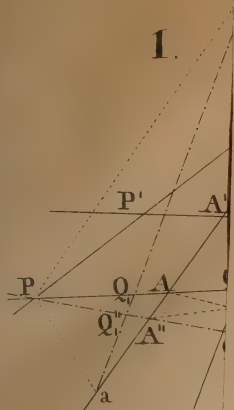
15.



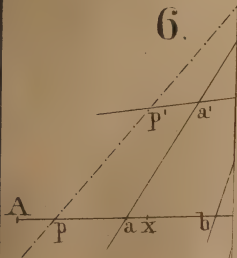




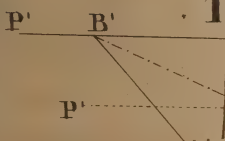
1.

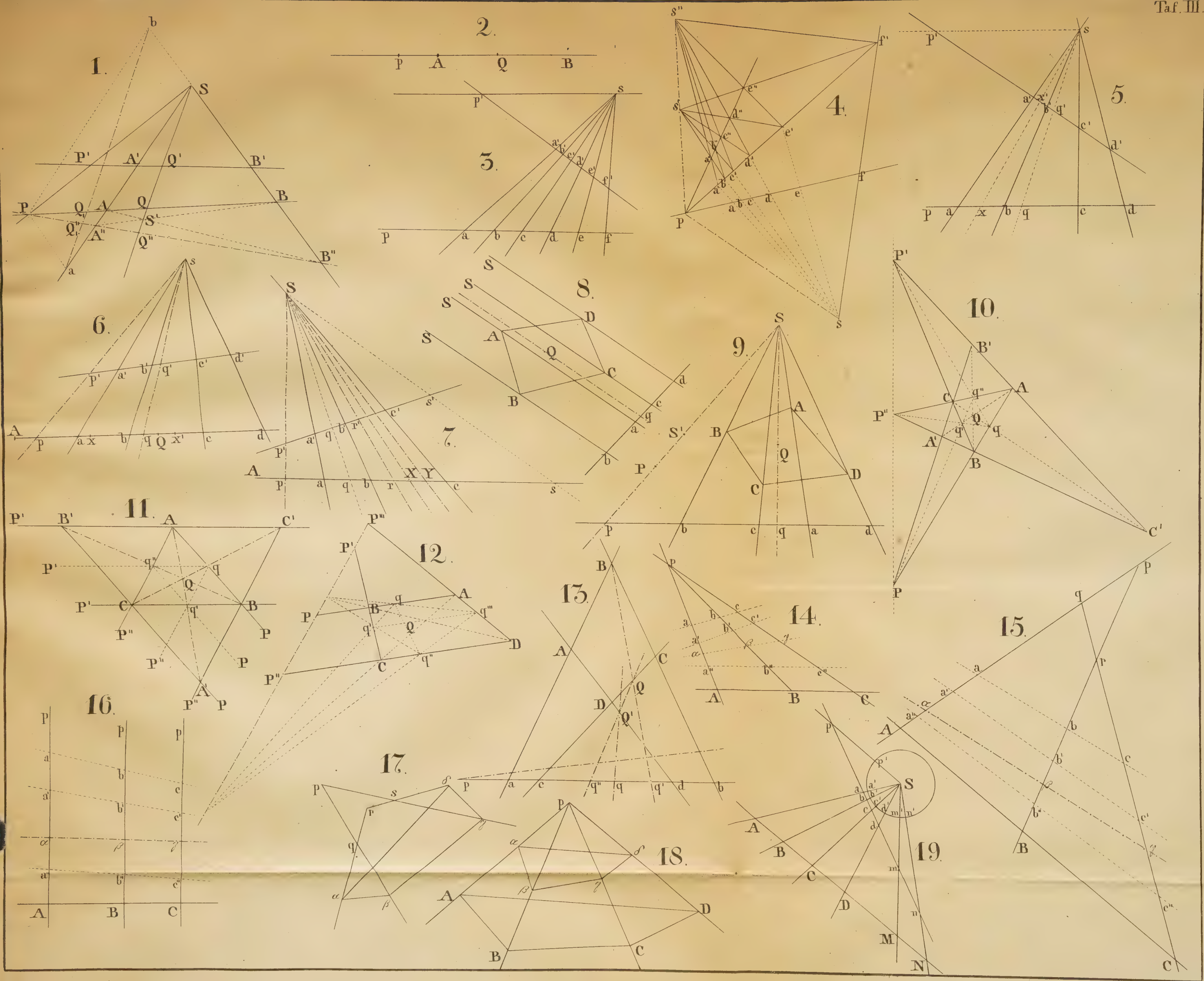


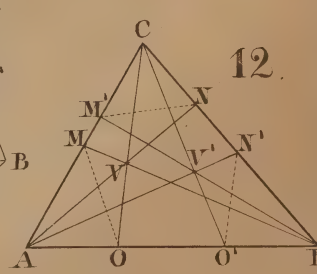
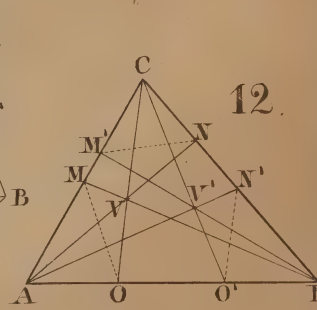
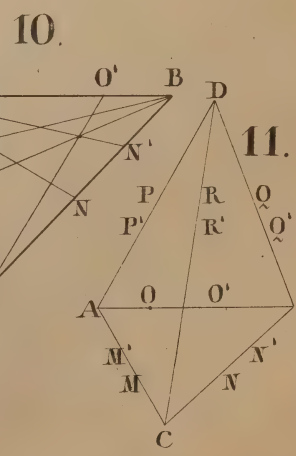
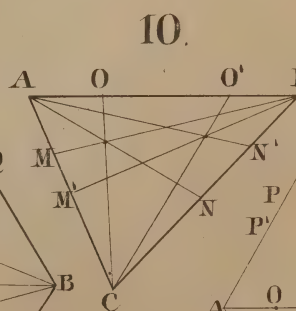
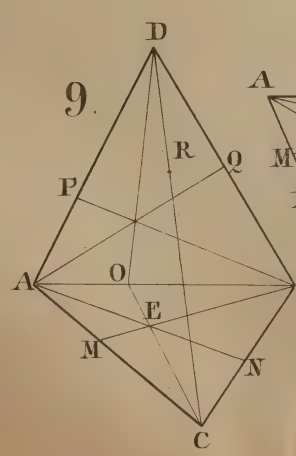
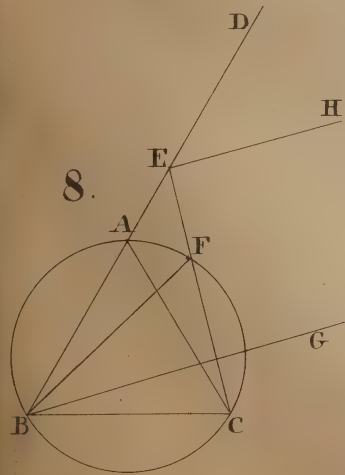
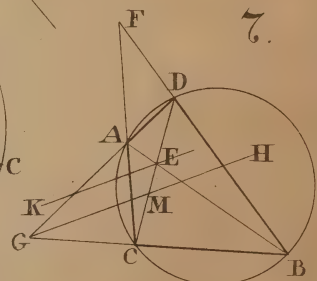
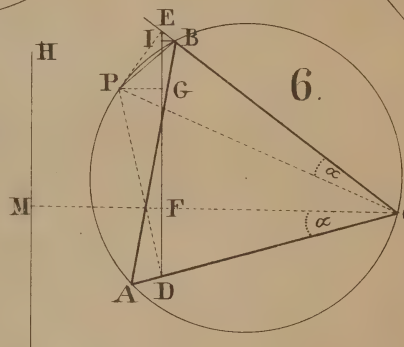
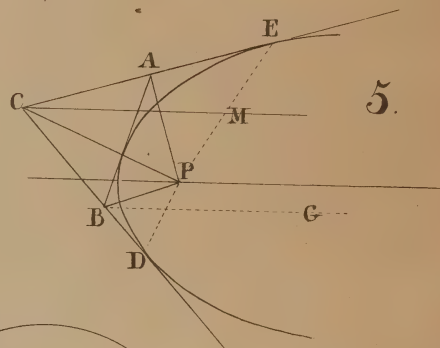
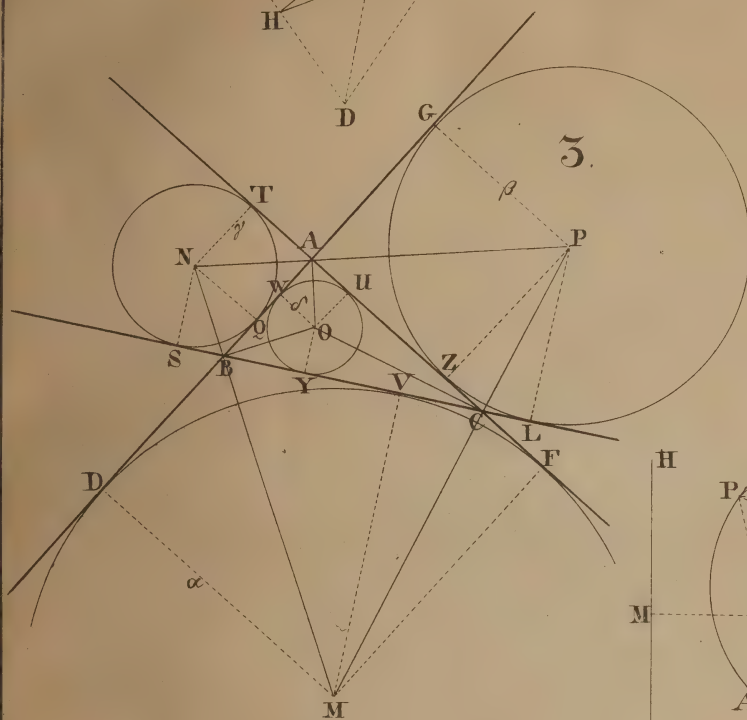
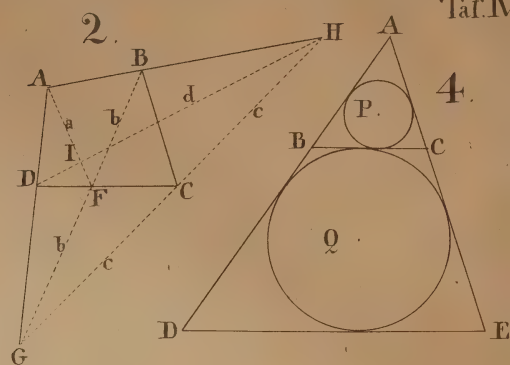
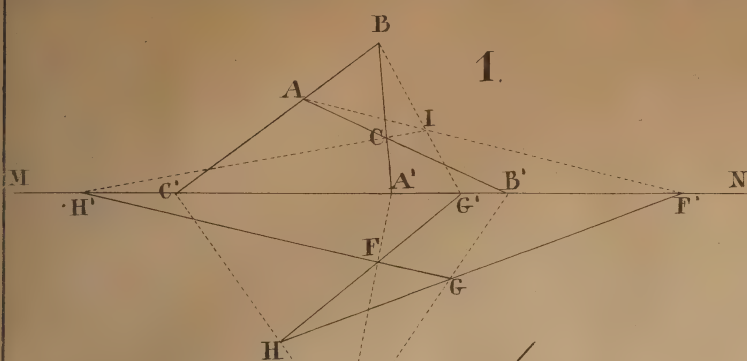
6.



1







J o u r n a l

für die

reine und angewandte Mathematik.

I n z w a n g l o s e n H e f t e n.

Herausgegeben

von

A. L. C r e l l e.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Vierter Band,

I n 4 H e f t e n.

Mit 3 Kupfertafeln.

Berlin,

b e i G. R e i m e r.

1 8 2 9.

1871

1872

1873

1874

1875

Inhaltsverzeichnis

des vierten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

Nr. der Abhandlung	1. A n a l y s i s.	Heft	Seite
3.	Note sur quelques formules elliptiques. Par Mr. <i>N. H. Abel</i>	I.	85
4.	Note sur les intégrales définies. Par Mr. <i>Lejeune-Dirichlet</i> , prof. de math.	I.	94
5.	Auflösung einer analytischen Aufgabe. (In Folge der Aufgabe 7. S. 99. des dritten Bandes dieses Journals.) Von Herrn <i>Th. Clausen</i> zu Altona.	I.	99
8.	Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébrique-ment. Par Mr. <i>N. H. Abel</i>	II.	131
9.	Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Par Mr. <i>Lejeune-Dirichlet</i> , prof. de mathém.	II.	157
10.	Über die Convergenz einer nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Reihe. Vom Herrn Prof. <i>Dirksen</i> zu Berlin.	II.	170
12.	Suite des notices sur les fonctions elliptiques. Par Mr. <i>C. G. J. Jacobi</i> , prof. de math. à Königsberg.	II.	185
13.	Théorèmes sur les fonctions elliptiques. Par Mr. <i>N. H. Abel</i>	II.	194
14.	Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes. Par Mr. <i>N. H. Abel</i>	II.	200
17.	Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen. (Vorgelesen in einer Klassen-Sitzung der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin, den 2. März 1829.) Von Sr. Excellenz dem Königl. wirkl. Geheimen-Rathe, Herrn Freiherrn <i>Alex. von Humboldt</i>	III.	205
19.	Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. Par Mr. <i>N. H. Abel</i> de Christiania.	III.	236
20.	Beweise verschiedener Sätze. Von Herrn <i>Th. Clausen</i> zu Altona.	III.	278
21.	Summirung verschiedener nach den Sinussen oder Cosinussen vielfacher Bogen fortgehender Reihen. Von Herrn <i>Th. Clausen</i> zu Altona.	III.	281
22.	Über die Potenzial-Functionen. Von Hr. Prof. <i>C. Gudermann</i> zu Cleve.	III.	287
24.	Über einen allgemeinen, die Bernoullischen Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck. Von Herrn Prof. <i>H. F. Scherk</i> zu Halle.	III.	299
25.	Démonstration nouvelle du théorème du binome. Par l'Editeur.	III.	305
26.	Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. (Suite du mémoire 19. cah. dern.) Par Mr. <i>N. H. Abel</i> de Christiania.	IV.	309
28.	De functionibus ellipticis commentatio. Auct. <i>C. G. J. Jacobi</i> , prof. math. ord. Regiom.	IV.	371

2. G e o m e t r i e.

1.	Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques; pour faire suite au „Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques.” Lu a l'académie royale des sciences de Paris, le 12. avril 1824, et approuvé le 18. février 1828, par une commission composée de MM. Legendre Poinsoet et Cauchy, rapporteur. Par Mr. <i>J. V. Poncelet</i> , Capitaine au corps royal du Génie.	I.	1
----	---	----	---

Abhandlung	Heft	Seite
7. Von den metrischen Relationen im Gebiete der Lineal-Geometrie. Vom Herrn Prof. <i>Möbius</i> zu Leipzig.	II.	101
23. Von der Zerlegung symmetrischer Polyëder. In Folge des Lehrsatzes S. 100., 4ter Band dieses Journals. Von Herrn <i>M.</i>	III.	296
27. Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben. Von Herrn Prof. <i>Plücker</i> zu Bonn.	IV.	349
29. Auflösung einer geometrischen Aufgabe. Von Herrn <i>Th. Clausen</i> zu München.	IV.	391
30. Ein geometrischer Beweis, daß wenn R und r die Halbmesser der in und um ein Dreieck beschriebenen Kreise bedeuten und D die Entfernung der Mittelpunkte dieser Kreise von einander bezeichnet, $D^2 = R^2 - 2Rr$, ist. Von dem Herrn Prof. <i>Unger</i> zu Erfurt.	IV.	395

3. Mechanik.

11. Beweis eines neuen, von Herrn <i>Chasles</i> in der Statik entdeckten Satzes, nebst einigen Zusätzen. Vom Hrn. Prof. <i>A. F. Möbius</i> zu Leipzig.	II.	179
18. Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. Vom Herrn <i>Hofrath</i> und Prof. Dr. <i>Gauß</i> zu Göttingen.	III.	232

II. Angewandte Mathematik.

2. Beobachtungen über die Schwere, welche in den Häfen von Europa, America und Asien, auf dem stillen Meere und in Neuholland, während <i>Malaspina's</i> Weltumsegelung, mit dem unveränderlichen Pendel angestellt worden sind. Mitgetheilt vom Herrn Prof. <i>Oltmanns</i> zu Berlin.	I.	72
15. Über die Theorie der Schraube. Vom Herrn Prof. Dr. <i>Lehmus</i> zu Berlin.	II.	202

Aufgaben und Lehrsätze.

6. Lehrsatz (zu beweisen). Vom Herrn Prof. <i>Gudermann</i> zu Cleve.	I.	100
16. Aufgaben. (Vom Herrn Prof. <i>Clausen</i> zu München und vom Herrn <i>W. Horn</i> zu Burg.)	II.	204
31. Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. Lehrsatz, vom Herrn Prof. Dr. <i>Grunert</i> zu Brandenburg.	IV.	396
Aufgaben von Anderen.	IV.	396

32. Einige Nachrichten von Büchern.	IV.	400
33. <i>Nécrologe</i>	IV.	402

1.

Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques; pour faire suite au Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques *).

Lu à l'Académie royale des sciences de Paris, le 12. avril 1824, et approuvé le 18. février 1828,
par une commission composée de MM. Legendre, Poinso et Cauchy, rapporteur.

(Par Mr. J. V. Poncelet, Capitaine au corps royal du Génie **).)

Introduction.

Dans un précédent Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques, j'ai annoncé que la théorie des polaires réciproques était susceptible d'une extension telle, qu'au simple énoncé d'une proposition suffisamment générale de l'étendue, elle permet d'en assigner, sur le champ, une autre toute différente et toute aussi générale, à moins cependant que la proposée ne soit elle même sa réciproque, ce dont il y a des exemples. J'ai ajouté qu'à l'exception de quelques principes élémentaires, je n'avais donné jusqu'ici qu'une idée très imparfaite de cette théorie, soit dans le Traité des propriétés projectives des figures, soit dans le tome VIII. des Annales de mathématiques, n'y ayant en effet simplement qu'effleuré le cas de l'espace, et m'étant constamment borné aux relations purement descriptives des figures; enfin j'ai annoncé que cette théorie était indispensable pour établir certaines propositions qui doivent entrer dans la partie de ces recherches relatives aux courbes et aux surfaces géométriques en général. Je me propose ici de reprendre cette théorie et de lui donner toute l'étendue et tous les développemens nécessaires pour en constituer un véritable corps de doctrine, qui puisse se suffire à lui même.

*) On trouve ce dernier mémoire tome III. cah. 3. pag. 213. de ce journal.

Note du rédacteur.

**) Il s'est élevé sur ce mémoire une discussion entre son Auteur et Mr. Gergonne, rédacteur des annales de mathématiques à Montpellier, qu'on trouve dans le tome XVIII. de ces annales. Le rédacteur du présent recueil est absolument étranger à cette discussion, et il déclare hautement qu'il n'a pas le but d'y entrer d'aucune manière par la publication du mémoire en question que son respectable auteur lui a bien voulu confier.

Note du rédacteur.

Vu son importance et son utilité générale dans toutes les questions et recherches géométriques, et ayant d'ailleurs le dessein de réunir, par la suite, et de faire paraître sous un même titre les différens Mémoires de Géométrie que je me propose de rédiger successivement, je n'ai pas dû craindre de revenir sur le petit nombre des principes déjà exposés dans les ouvrages cités précédemment, et de m'appesantir sur ceux qui ne seraient point encore connus ou qui pourraient présenter quelques difficultés à être saisis par le grand nombre des lecteurs; j'ai même fait suivre chaque théorie particulière de plusieurs exemples qui, bien que des conséquences fort simples de ces théories, n'en sont pas moins très propres à les éclairer et à en montrer l'esprit et la fécondité; j'ose donc espérer que l'académie ne jugera pas trop sévèrement le résultat de mon nouveau travail, et qu'elle voudra bien excuser des détails et des développemens nécessités par la nature du sujet et par le but particulier que je cherche à atteindre.

Pour donner une idée tant soit peu générale de l'objet que je me propose et des principes qui m'ont dirigé, il est nécessaire de rappeler que le pôle et la polaire d'une section conique, ne sont autre chose que le sommet de l'angle circonscrit à une telle courbe, et la direction indéfinie de la corde de contact des côtés de cet angle; tandis que, pour la surface du second ordre, le pôle et le plan polaire se confondent respectivement avec le sommet du cône circonscrit à cette surface et avec le plan indéfini du contact de ce cône.

Cela posé, considérons d'abord une figure quelconque sur le plan d'une section conique prise pour auxiliaire: on démontre aisément que, si un certain point se meut sur une ligne droite de la figure donnée, la polaire de ce point pivote sur la pôle de cette droite, et réciproquement; or de là on conclut plus généralement que, si ce même point est assujetti à décrire une courbe quelconque, sa polaire en enveloppera une autre ayant, à son tour, la première pour enveloppe des polaires de ses différens points; de sorte qu'on peut dire de ces deux courbes, qu'elles sont polaires réciproques à l'égard de la section conique auxiliaire. Substituant donc ainsi à chaque point, chaque droite, chaque courbe de la figure proposée, la droite, le pôle et la courbe qui leur appartiennent, on formera une nouvelle figure qui, elle-même, pourra s'appeler la polaire réciproque de la première, et sera tellement liée avec elle que, d'a-

près la théorie ordinaire du pôle et de la polaire simple, les relations descriptives ou de situation de l'une, pourront se traduire immédiatement en des relations pareilles de l'autre.

C'est à montrer l'espèce de réciprocité qu'ont entre elles les deux figures dans différens cas, et relativement aux diverses positions des points et des lignes, que j'ai consacré la première partie de ce Mémoire.

Ainsi, par exemple, j'y examine l'espèce de relations que conservent entre eux deux polygones réciproques polaires sur le plan d'une section conique, et je détermine le degré et les affections générales qui appartiennent aux courbes polaires qui peuvent être considérées comme les limites de ces polygones etc. Au surplus, je le répète, j'avais déjà exposé les élémens de cette théorie dans un article inséré au tome VIII. des *Annales de mathématiques*, année 1818, en montrant, par quelques exemples, tout le parti qu'on en pouvait tirer pour la recherche des propriétés générales des figures, et j'y suis revenu avec plus de détails dans le *Traité des propriétés projectives*, dont les sections II. et III. contiennent un grand nombre d'applications très remarquables et très propres à montrer l'importance et l'utilité de ce genre de spéculations.

Pour passer du cas du plan à celui de l'espace, il suffit de substituer une surface du second ordre quelconque à la section conique auxiliaire, et de remplacer la polaire par un plan: observant ensuite, avec MM. Monge, Livet et Brianchon, que quand un point ou pôle est assujetti à demeurer sur un plan ou sur une droite donnée, le plan polaire de ce point pivote lui même sur le pôle du premier plan, ou sur une droite qu'on peut nommer la polaire de la première droite, et réciproquement, on établit aisément la définition et les principales relations descriptives des figures rectilignes et polyédrales, qui sont polaires réciproques dans l'espace, par rapport à une surface quelconque du second ordre prise pour auxiliaire: or, de là on passe immédiatement, par la loi de continuité, aux courbes à double courbure, aux surfaces développables et aux surfaces quelconques qui sont réciproques polaires dans l'espace, et peuvent être considérées comme les limites respectives des figures rectilignes et polyédrales dont il s'agit.

MM. Livet et Brianchon avaient déjà recherché (13. cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique*), quelle était l'enveloppe des

plans polaires d'un point assujetti à demeurer constamment sur une courbe à double courbure ou sur une surface donnée, et ils avaient facilement reconnu, par l'analyse algébrique, que c'était, dans le premier cas, une surface développable qui se réduit à un cône lorsque la courbe proposée est plane, et, dans le second, une surface quelconque à deux courbures, susceptible d'être engendrée par une droite en même tems que la proposée. Mais ces habiles géomètres n'ont pas recherché quelle espèce de relations et de réciprocité ont entre-elles la figure primitive et sa dérivée; et, à l'exception du cas particulier où la surface directrice est du second ordre, ou se réduit à une section conique, ils n'ont point déterminé le degré de la surface polaire: or c'est ce que j'ai établi généralement dans la seconde partie de ce mémoire, et par les seuls principes de la géométrie rationnelle, en montrant de plus, que l'enveloppe des plans polaires d'une surface donnée est, en même tems, le lieu des pôles des plans tangens de cette surface; de sorte qu'elles jouissent de relations descriptives entièrement réciproques à l'égard de la surface du second ordre qui sert d'auxiliaire, remarque qui seule suffit pour justifier l'épithète de polaires réciproques que je leur ai appliquée.

J'examine, au surplus, les principales relations descriptives qui peuvent appartenir à la surface primitive et à sa dérivée, et je mets ainsi le lecteur en état de traduire, sur le champ, toute propriété de situation, relative à une figure quelconque donnée, en une autre essentiellement distincte et applicable à la figure qui en est la réciproque polaire. C'est ce que je démontre par l'application à plusieurs théorèmes particuliers qu'il serait, je crois, difficile d'établir de toute autre manière. Parmi ce théorèmes, je me contenterai d'indiquer ceux qui concernent l'intersection plane des nappes de développables circonscrites à deux surfaces quelconques du second degré, et le lieu de tous les autres de surfaces du même degré, qui sont tangentes à la fois à huit plans donnés quelconques etc.

Ce qui précède concerne uniquement les relations purement descriptives, et, parmi ces relations, celles qui n'ont trait qu'à la direction indéfinie des lignes et surfaces, sans égard à aucun rapport de grandeur; or j'ai consacré les trois dernières parties du mémoire à examiner quelle espèce de modifications doivent éprouver, dans le passage de la figure donnée à sa polaire réciproque, soit les relations d'angles et de

lignes trigonométriques, soit les relations métriques entre les simples distances: j'ai trouvé que, quand ces relations sont de la nature de celles que j'ai nommées ailleurs projectives, la traduction pouvait toujours avoir lieu de l'une à l'autre figure, et j'ai indiqué les moyens de l'opérer, dans tous les cas, par une substitution de mots et de lettres à la place les uns des autres, qui se réduit à une sorte de mécanisme. Ainsi, non seulement on est en état de découvrir, par la théorie des polaires réciproques, de nouvelles propriétés descriptives des figures, à l'aide des propriétés descriptives déjà connues et établies par les géomètres, mais on peut en faire tout autant pour les relations métriques entre les angles, et pour une classe très étendue de relations pareilles entre les simples distances, puisqu'elle comprend comme cas particuliers, toutes celles de la Théorie des transversales et de la Géométrie de la règle.

Je ne dirai rien d'ailleurs des applications que j'ai faites de ces préceptes généraux à la démonstration ou à la recherche des théorèmes concernant les angles et les distances de certaines figures; je ferai seulement remarquer que, loin d'avoir épuisé le nombre des applications particulières et même des principes, je me suis constamment attaché aux plus simples et aux plus utiles d'entre eux, me contentant fort souvent, d'en indiquer à la hâte quelques autres, comme exercices, ou parcequ'ils me paraissaient dignes de fixer l'attention des géomètres. On verra en effet que la mine est d'une richesse pour ainsi dire intarissable, et que, si l'on voulait seulement citer ou énoncer les théorèmes de géométrie qui peuvent découler de la théorie des polaires réciproques, par sa simple application aux propositions déjà connues, il faudrait y consacrer des volumes entiers et un tems considérable.

Je crois devoir prévenir, avant d'entrer en matière, que je continuerai ici l'ordre de numérotage adopté, dans mon précédent mémoire, pour les figures et les articles, de sorte que celui-ci doit en être considéré comme la suite.

Théorie générale des polaires réciproques.

La théorie des polaires réciproques se rattache, de la manière la plus intime, à celle du centre des moyennes harmoniques, dont nous avons établi les principes dans notre précédent Mémoire: c'est ce qu'on a pu voir par ce que nous en avons déjà dit dans le Tome VIII. des Annales de mathématiques, et dans le Traité des propriétés projectives des figures; mais, avant de l'exposer dans toute la généralité qui lui est propre, nous croyons nécessaire de réunir sous un même point de vue, et de résumer en peu de mots, les différentes notions et définitions établies aux endroits cités, de manière à arriver, par une marche à la fois claire et rapide, aux nouveaux principes qui font l'objet de ce Mémoire; et, afin d'aller du simple au composé, nous commencerons par le cas facile où les objets de la figure sont situés dans un seul et même plan.

Des figures polaires réciproques dans un plan.

55. Supposons que, d'un point quelconque P (Fig. 20.) pris sur le plan d'une ligne du second ordre, on mène une suite de droites telles que AB , rencontrant respectivement la courbe en deux points A et B ; puis qu'on détermine (4. et 7.), sur chacune d'elles, le centre Q des moyennes harmoniques des points A , B par rapport au pôle commun P des rayons vecteurs, pris pour origine des segmens harmoniques, tous les centres pareils seront, comme on sait, situés sur une seule et même droite ou polaire TT' que, d'après nos précédentes définitions (42.), nous pourrions aussi nommer l'axe des moyennes harmoniques de la courbe relativement à l'origine commune ou au pôle P , qui, à son tour pourrait s'appeller le centre des moyennes harmoniques de la courbe relativement à la droite dont il s'agit, prise pour axe des origines harmoniques, puisque la relation $PA:PB::QA:QB$ qui lie l'origine P au centre Q des moyennes harmoniques de chaque transversale, est réciproque entre ces points.

Pour justifier, sur le champ et a priori, ces définitions, il suffit de remarquer que chaque transversale PB , menée par le point fixe P , ne renferme qu'un seul centre Q des moyennes harmoniques, et que ce centre ne peut jamais se confondre avec le point P , quelle que soit la position de la transversale mobile; de sorte que le lieu des points Q est

nécessairement du premier degré, c'est-à-dire une ligne droite (Propriétés projectives, Sect. IV. No. 539.).

Remarquons d'ailleurs, pour compléter ce rapprochement, que la polaire TT' d'un point P n'est autre chose que la direction indéfinie de la corde, réelle ou idéale, qui joint les points de contact T, T' des tangentes à la courbe, issues de ce point, et (1.) que cette polaire s'éloigne à l'infini, ou se change en un diamètre de la section conique, selon que le pôle lui même se confond avec le centre de cette section conique, ou s'éloigne à l'infini sur son plan; de sorte que le pôle d'un diamètre est à l'infini sur le diamètre conjugué, et le pôle de toute droite à l'infini se confond avec le centre même de la courbe.

56. Cela posé, considérons quelque part sur le plan de la section conique proposée, un nouveau point quelconque p , servant de pôle aux sécantes ou transversales rectilignes ab de la courbe; à ce pôle correspondra la nouvelle polaire tt' rencontrant en Q la première, et, pour les transversales QP, Qp qui y passent, le point Q sera à la fois le centre des moyennes harmoniques des cordes AB et ab déterminées par ces transversales, et cela par rapport aux pôles respectifs P et p . Mais les points Q et P, Q et p sont réciproques entre eux d'après la relation qui les définit: donc le point Q peut, à son tour, être considéré comme le pôle de la droite Pp , puisque les points P et p suffisent pour la déterminer complètement; c'est-à-dire que cette droite est la polaire de Q par rapport à la section conique, comme la droite TT' l'est déjà relativement au point P . Or de là résulte ce théorème qui sert de base à tout ce qui va suivre:

Si un certain point P est situé sur une droite Pp tracée dans le plan d'une section conique quelconque, sa polaire TT' passera nécessairement par le pôle Q de cette droite et réciproquement.

57. Le point P étant le pôle de TT' , comme le point Q est le pôle de Pp , le système du point P et de la droite Pp qui le renferme, et le système du point Q et de la droite TT' , défini par le premier, devront jouir de propriétés réciproques à l'égard de la section conique auxiliaire ou directrice; c'est pourquoi on peut dire que ces systèmes sont polaires réciproques l'un de l'autre.

58. Considérons, sur le plan d'une section conique quelconque (Fig. 21.), deux droites arbitraires AB et AC se rencontrant en A ; soit P le pôle de AB , et P' le pôle de AC ; d'après ce qui précède, la polaire de A devra renfermer à la fois les points P et P' , c'est-à-dire que PP' est cette polaire. D'un autre côté, le système du point A et de AB est réciproque de PP' et P , comme aussi le système de A et AC est réciproque de PP' et P' ; donc on peut dire que le système de BAC , tout entier, est réciproque polaire de P, P' et PP' . Il est évident d'ailleurs que si, au lieu des deux droites indéfinies AB et AC et de leur point de rencontre A , nous avons considéré primitivement le système des deux points P, P' et de la droite PP' qui les renferme, nous serions arrivés aux mêmes conséquences.

Enfin on voit pareillement que „le système d'un nombre quelconque de droites $AB, AC, AD, \dots$, situées dans le plan d'une section conique, et qui convergeraient en un même point A , aurait pour réciproque polaire un système pareil de points $P, P', P'', \dots$ rangés sur une même droite PP' polaire de A .”

59. En général, un système de m droites quelconques tracées dans un plan, a pour réciproque polaire un système pareil de points en nombre égal, et les $m \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right)$ points d'intersection de ces droites, prises deux à deux, sont remplacés par les $m \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right)$ droites ou distances qui joignent aussi deux à deux leurs pôles respectifs; de telle sorte qu'il passera autant de ces distances par l'un quelconque de ces pôles, que dans la figure primitive, il y a de points d'intersection sur la polaire correspondante à ce pôle, c'est-à-dire $m-1$.

Ainsi „les m droites du premier système et leurs intersections respectives, ont pour réciproques polaires le système d'un égal nombre de points réunis, deux à deux, par les lignes droites ou distances indéfinies qui leur appartiennent; et, vice versa, ce dernier système a pour réciproque polaire le premier.”

Enfin, puisque les points d'intersection des m droites de celui-ci sont les pôles respectifs des distances de l'autre, „les droites ou diagonales qui joignent ces points deux à deux, ont, à leur tour, pour réciproques polaires (58.), les intersections correspondantes de ces mêmes distances prolongées;” telle est donc l'espèce de relation graphique qui sub-

siste entre une figure plane rectiligne et sa polaire réciproque à l'égard d'une section conique quelconque.

60. Considérons, par exemple, l'un quelconque des polygones $ABCDE$ (Fig. 22.), formés par le système des droites proposées; ses côtés AB , BC , CD , ... ayant pour pôles respectifs les points a , b , c , d , e , ses sommets B , C , ... A auront pour polaires respectives (58.) les droites ab , bc , cd , ... ae qui joignent, deux à deux, consécutivement les pôles dont il s'agit, et forment par conséquent le polygone a , b , c , d , ... qu'on peut nommer le polaire réciproque du proposé.

En effet, d'après ce qui précède, les côtés et sommets de celui-ci auront à leur tour pour pôles et polaires, les sommets et côtés respectifs du premier, et la même relation de réciprocité aura lieu entre les points de rencontre des côtés et les diagonales de ces polygones, à l'égard de la section conique auxiliaire; c'est-à-dire que les diagonales et les points de rencontre des côtés de l'un auront réciproquement pour pôles et polaires respectifs les points de rencontre des côtés de l'autre et ses diverses diagonales.

D'après cela on voit, entre autre, que si certains points de rencontre des côtés de l'un des polygones étaient situés en ligne droite, les diagonales qui leur correspondent dans l'autre, concourraient (58.) en un même point, pôle de cette droite et vice versa.

61. Supposons maintenant que l'on coupe par une droite ou transversale arbitraire, les côtés prolongés de l'un des polygones polaires ci-dessus, cette transversale sera remplacée, dans l'autre, par un point, pôle de cette droite, et tout point d'intersection avec un côté le sera par une droite ou polaire passant (58.) par ce pôle et par le pôle du côté dont il s'agit, c'est-à-dire par le sommet correspondant du polygone réciproque. Ainsi le „système de la transversale et de ses points de rencontre avec les côtés du polygone proposé, sera remplacé par le faisceau des droites qui joignent le pôle de cette transversale aux différens sommets du polygone polaire, et réciproquement, un pareil faisceau de droites convergentes, dans l'un des polygones, sera remplacé par le système des points de rencontre d'une droite transversale des côtés du polygone polaire.”

62. Considérons encore deux polygones quelconques sur le plan d'une section conique prise pour auxiliaire, ainsi que les polygones polai-

res qui leur appartiennent; supposons qu'on prolonge les côtés de l'un de ces deux polygones jusqu'à ses intersections avec ceux de l'autre, ils est évident (59. et 60.) que les points ainsi obtenus seront remplacés, dans les polygones polaires des proposés, par les droites qui joignent, deux à deux, les sommets de ces derniers. D'après cela, on voit en particulier que, si un certain nombre des points d'intersection dont il s'agit, appartenant à des côtés différens, étaient en ligne droite, les polaires qui leur correspondent, et qui appartiennent également à des sommets différens des polygones réciproques, se croiseraient en un même point (58.).

Ces exemples me semblent devoir suffir, en ce moment, pour montrer l'espèce de dépendance graphique qui lie entre elles la figure primitive et sa dérivée, lorsqu'on n'envisage que des systèmes de points et de lignes droites situés dans un même plan; et attendu que cette dépendance est réciproque de l'une à l'autre des deux figures, il nous est permis de les appeller polaires réciproques à l'égard de la section conique auxiliaire. Les principes qui précèdent rendent d'ailleurs très faciles les moyens de multiplier indéfiniment le nombre de ces exemples et de se familiariser avec eux; c'est pourquoi je crois devoir aborder de suite le cas où l'on a à considérer des lignes courbes quelconques.

63. Soit une courbe quelconque sur le plan d'une section conique prise pour directrice des pôles; d'après la loi de continuité, on pourra regarder indifféremment cette courbe comme la limite de deux polygones inscrits ou circonscrits d'un nombre infini de côtés infiniment petits; appliquant donc à ces polygones les raisonnemens établis ci-dessus (60.) pour un polygone quelconque fini, on aura à considérer une nouvelle courbe, limite commune des polygones polaires des proposés, et qui sera à la fois le lieu des pôles des élémens ou des tangentes de la première, et l'enveloppe des polaires des points qui lui appartiennent.

On pourra donc décrire, par deux procédés différens et faciles, la courbe dont il s'agit, qu'on peut nommer la polaire réciproque de l'autre, puisque, en vertu de ce qui a été dit (60.) pour les simples polygones polaires, la courbe proposée doit, à son tour, être considérée à la fois, ou comme le lieu des pôles des tangentes de celle dont il

s'agit, ou comme l'enveloppe des polaires des points qui lui appartiennent.

D'ailleurs on arrive directement aux mêmes conséquences à l'aide du principe de l'art. 56., en observant que, si „un certain point se déplace infiniment peu sur la première courbe, ou sur la tangente en ce point, sa polaire qui, par hypothèse, est une tangente de l'autre, tendra à pivoter sur le point de contact de cette tangente; car, d'après le principe cité, ce point de contact est, à son tour, évidemment le pôle de l'élément ou de la tangente que l'on a considéré sur la première; c'est-à-dire que, si en un point quelconque de l'une des deux courbes, on mène une tangente à cette courbe, sa polaire touchera l'autre courbe en un point qui sera réciproquement le pôle de cette tangente.

Ainsi ces deux systèmes de tangentes et de points de contact seront polaires réciproques l'un de l'autre, comme les courbes mêmes dont ils font partie.

64. Supposons maintenant qu'on inscrive ou circoncrive un polygone quelconque à l'une de nos deux courbes, il est évident, d'après ce qui précède, que la polaire réciproque de ce polygone sera, au contraire, circonscrit ou inscrit à l'autre courbe; de telle sorte que les sommets inscrits se changeront en des côtés tangens ou circonscrits, polaires de ces sommets par rapport à la section conique auxiliaire, tandis que les cordes ou côtés inscrits se changeront en des sommets d'angles ou de polygones circonscrits, et vice versa pour la seconde figure. Toutes les autres relations de réciprocité indiquées ci-dessus (60.) pour deux polygones polaires quelconques continueront d'ailleurs de subsister entre les deux polygones, l'un inscrit et l'autre circonscrit aux deux courbes réciproques

65. Pour développer encore plus ces considérations, concevons qu'on trace une droite ou transversale quelconque à travers l'une des deux courbes, elle la rencontrera, en général, en autant de points qu'il est marqué par son degré. Or (63.) chacun de ces points est le pôle d'une certaine tangente de la courbe réciproque, et (58.) cette tangente passe nécessairement par le pôle de la transversale arbitraire; donc „le système de cette transversale et des points d'intersection qui lui appartiennent, sera remplacé, dans la figure

réci-proque, par le système d'un égal nombre de tangentes issues d'un même point, pôle de cette transversale."

Ces deux systèmes sont d'ailleurs réciproques; c'est-à-dire qu'à l'inverse: „Si, d'un même point, on mène à l'une des courbes toutes les tangentes qui lui appartiennent, ce système aura pour polaire une droite rencontrant l'autre courbe en un nombre de points, égal au degré de cette courbe et au nombre des tangentes dont il s'agit, qui en sont respectivement les polaires."

66. Il suit delà, entre autres, que

„Le degré de la polaire réciproque d'une courbe donnée est au plus égal au nombre qui exprime combien, d'un point arbitraire, on peut mener de tangentes à cette dernière courbe."

Car, si l'on trace, à volonté, une droite ou transversale à travers cette polaire réciproque, le nombre de ses intersections avec elle sera marqué par celui des tangentes à la proposée qui passent par le pôle de la transversale.

Mais on prouve aisément, à l'aide de la loi de continuité ou de toute autre manière, que le nombre des tangentes qu'il est possible de mener à une courbe plane du degré m , par un point quelconque de son plan, est en général et au plus $m(m-1)$; donc aussi

Une courbe de degré m a pour réciproque polaire, une courbe qui est en général et au plus du degré $m(m-1)$.

D'où il suit en particulier, que

Toute ligne du second ordre a pour réciproque polaire une ligne qui est elle même de cet ordre.

Sans nous arrêter aux conséquences qu'on peut déduire de là pour les sections coniques, conséquences qui, pour la plupart, sont indiquées dans le *Traité des propriétés projectives*, nous ferons, sur ce qui précède, plusieurs remarques essentielles, et que nous ne devons pas passer sous silence.

67. D'abord il paroît évident que, quoique la polaire réciproque d'une courbe de degré m soit, en général, du degré $m(m-1)$, on ne peut cependant (65.) lui mener, d'un point pris arbitrairement sur son plan, que m tangentes, au plus, bien qu'il semble, en général que le nombre des tangentes possibles pour une courbe du degré $m(m-1)$, soit

$m(m-1)[m(m-1)-1]$; mais cela tient à ce que cette courbe est d'une espèce particulière parmi toutes celles du même degré, et qu'une courbe du degré m n'a pas toujours et nécessairement $m(m-1)$ tangentes, réelles ou imaginaires, passant par un point pris à volonté sur son plan.

En effet, d'une part, il est visible que, si la courbe (m) que l'on considère, a un ou plusieurs points multiples, le nombre des tangentes véritables dont il s'agit sera nécessairement diminué, attendu que les droites qui joignent ce point multiple au point donné, quoiqu'ayant deux ou plusieurs points communs avec la courbe et confondus en un seul, n'en sont pas moins, en général, des sécantes de cette courbe, qui d'ailleurs, ne sauroient être distinguées, sous certains rapports, des véritables tangentes, puisqu'elles remplissent exactement les mêmes conditions.

D'une autre part, en se reportant à nos deux polaires réciproques, dont l'une est du degré m , on s'apercevra sans peine (63.), que tout point multiple de l'une a, pour polaire, une tangente commune à un nombre de branches de sa réciproque, marqué par l'ordre de multiplicité du point dont il s'agit; et vice versa, qu'une telle tangente a pour pôle un point multiple de l'ordre marqué par le nombre des points de contact de cette tangente; enfin on voit que ces points de contact sont les pôles des tangentes au point multiple de la réciproque.

Or une courbe plane quelconque du degré m a évidemment, en général, un certain nombre n de tangentes communes à deux de ses branches; donc la réciproque polaire aura pareillement ce même nombre n de points doubles, et par conséquent, le nombre $m(m-1)[m(m-1)-1]$ que nous avons trouvé pour exprimer celui des tangentes à cette polaire, qui passent par un point donné, devra être diminué de $2n$.

En effet, il est aisé de s'assurer, par la loi de continuité, que la droite qui passe par un point double, doit être considérée comme la réunion en une seule de deux tangentes de la courbe, c'est-à-dire qu'elle fait doublement partie des $M(M-1)$ tangentes que, d'un point quelconque, on peut en général mener à une courbe plane géométrique du degré M . Elle diminueroit ce nombre de trois unités, si elle appartenait à un point triple, et en général de p unités, si elle appartenait à un point multiple de l'ordre p ; mais on voit, d'après ce qui précède, que de tels points singuliers ne peuvent exister que pour des courbes d'une espèce

tout à fait particulières, tandis que le contraire a lieu pour les points qui ne sont que doubles.

68. Une conséquence de ce qui précède, c'est que la polaire réciproque d'une courbe du degré m n'est pas toujours du degré $m(m-1)$, comme on l'a avancé ci-dessus (66.); ce degré peut-être moindre si la proposée a des points multiples, car le nombre des tangentes véritables qu'on peut mener à (m) par un point quelconque de son plan, sera diminué d'autant d'unités qu'il y a de branches distinctes passant à la fois par tous ces points multiples, et il devra en être de même du nombre $m(m-1)$ qui exprime, en général, le degré de la polaire réciproque de (m) ; le pôle de toute droite qui passe simplement par un point multiple de cette dernière, ne faisant pas partie de la réciproque, et appartenant simplement à une tangente commune à plusieurs branches de cette réciproque.

Effectivement, d'après la remarque faite plus haut, une telle tangente est la polaire d'un point multiple de la courbe (m) , et un point quelconque de sa direction a nécessairement (56.) pour polaire une droite quelconque passant par ce point multiple, tandis que les seuls points de contact de cette tangente avec la réciproque de (m) , sont les pôles des véritables tangentes du point multiple dont il s'agit; de sorte que, dans la recherche ci-dessus (65. 66.) des intersections d'une droite arbitraire et de la réciproque de la courbe (m) , on ne doit pas tenir compte de celles relatives aux tangentes de (m) qui passent simplement par les divers points multiples, à moins qu'on ne veuille considérer les polaires de tels points singuliers comme faisant réellement partie de la réciproque, par ce seul motif que leur différens points sont les pôles d'une série de droites qui, sous certains rapports, peuvent être censées des tangentes de la courbe primitive (m) .

69. Les points d'inflexion, de rebroussement et les points conjugués donnent lieu à des remarques analogues.

En effet, le point conjugué d'une courbe pouvant être considéré comme une branche isolée et infiniment petite de cette courbe, ou, plus généralement, comme l'intersection réelle de deux branches imaginaires de cette même courbe, toutes les droites qui y passent doivent être considérées comme de véritables tangentes dont les pôles, par rapport à la section conique auxiliaire, sont situés sur une

même droite appartenant tout entière à la polaire réciproque de la courbe proposée. Or la droite menée d'un point quelconque donné au point conjugué, représentant au moins le système de deux tangentes issues de ce point et confondues en une seule, on voit que la polaire d'un point conjugué peut être envisagée comme le système de deux branches de la courbe réciproque, confondues en une seule et même droite. Faisant donc abstraction de cette droite, on voit que le degré de la réciproque sera abaissé au moins de deux unités: il le seroit évidemment de quatre, si le point conjugué étoit double ou représentoit deux branches de courbe devenues infiniment petites etc.

70. Par un point de rebroussement du premier ou du second genre, il passe également une infinité de tangentes; ainsi ce que nous venons de dire du point conjugué s'y applique directement; cependant comme le point de rebroussement a, de plus, une tangente réellement déterminée, renfermant deux élémens consécutifs et superposés de la courbe, la polaire réciproque de celle-ci aura un point singulier répondant au premier, et que la discussion, par rapport à la section conique auxiliaire, apprend être un point d'inflexion, quand le rebroussement est du premier genre ou que la tangente passe entre les branches, et un point de rebroussement du second genre, quand celui du proposé est de ce genre, ou que la tangente laisse d'un même côté les deux branches qui y passent.

A l'inverse, un point d'inflexion a pour réciproque polaire, un point de rebroussement du premier genre; mais comme, d'après la loi de continuité, les droites qui passent par un tel point, ne sauroient plus être prises pour des tangentes de la courbe proposée, la remarque précédente n'a plus lieu, à moins qu'on ne regarde la tangente en ce point comme faisant partie de la courbe, et en constituant une véritable branche.

71. J'ajouterai une dernière remarque à toutes celles qui précèdent, concernant les branches infinies et les asymptotes des courbes qui sont polaires réciproques par rapport à une section conique donnée dans leur plan commun: c'est que les points à l'infini de l'une de ces courbes ont pour polaires les tangentes de la réciproque, issue du centre de la section conique auxiliaire, tandis que les asymptotes relatives à ces points sont les polaires des points de contact de ces mêmes

tangentes; de telle sorte, par exemple, que, quand l'une des deux courbes a une ou plusieurs branches paraboliques, c'est-à-dire dont les asymptotes sont entièrement à l'infini, sa réciproque a un même nombre de branches passant par le centre de la section conique auxiliaire, lequel est ainsi un point multiple.

Ce qui précède, offre, comme on voit, les moyens de discuter parfaitement le cours et les affections diverses que peut présenter la polaire réciproque d'une courbe quelconque continue, donnée sur le plan d'une section conique, choisie à volonté pour servir d'auxiliaire ou de directrice; bien plus, on est en état de découvrir le degré véritable de cette polaire réciproque dans chaque cas particulier, et de trouver même, sans recourir à la description effective, la position des divers points singuliers et des asymptotes qui lui appartiennent, ou, plus généralement, la direction de ses branches infinies; sur quoi il est essentiel de remarquer que plusieurs des points à l'infini de ces branches peuvent eux-mêmes être des points singuliers, tout comme cela arrive pour les points à distance donnée et finie.

Pour se rendre compte de cette particularité, il suffit, en effet, de considérer un point singulier ordinaire et à distance donnée, d'une courbe quelconque, et de supposer ensuite qu'on mette la figure en projection centrale ou perspective sur un plan parallèle à la projetante de ce point, c'est-à-dire de façon que ce même point passe à l'infini dans la nouvelle figure.

Ainsi il y a des points d'inflexion et de rebroussement, des points multiples et conjugués etc., à l'infini comme à distance donnée; ce qui, je crois, n'a pas encore été remarqué des géomètres, ou du moins n'a pas encore attiré leur attention autant que le sujet le mérite par lui-même.

72. Nous sommes maintenant en état de passer au cas où la figure contiendrait deux ou un nombre quelconque de courbes situées sur le plan d'une section conique prise pour auxiliaire, et de découvrir ce qui se passe dans la polaire réciproque de cette figure; car, d'après ce qui a été dit art. 63., il paraîtra évident que tout point d'intersection, commun à deux des courbes de l'une des figures, a pour polaire, dans l'autre, une tangente commune aux réciproques de ces courbes; et vice versa, toute tangente commune à ces mêmes courbes, a pour pôle

l'un des points de rencontre des courbes réciproques: ainsi le nombre des points de rencontre et des tangentes communes appartenant à l'une des figures, est précisément égal à celui des tangentes communes et des points de rencontre qui appartiennent à l'autre; de plus ces deux systèmes ont entre eux les diverses relations examinées art. (59.) pour un système quelconque de points et de droites et son système polaire.

Par exemple: les points de concours des tangentes communes de l'un des systèmes, sont les pôles des sécantes ou cordes communes de l'autre et vice versa; comme aussi les droites qui joignent, deux à deux, les points de concours dont il s'agit, ont pour pôles, dans l'autre système, les points où se coupent deux à deux les sécantes communes etc.

73. Soient deux courbes, l'une du degré m et l'autre du degré n situées dans le plan commun d'une section conique prise pour directrice, leurs polaires réciproques seront, en général (66.), des degrés $m(m-1)$, $n(n-1)$, et, comme on sait, elles se rencontreront aussi en général et au plus, en $mn(m-1)(n-1)$ points, auxquels correspondront, d'après ce qui précède, un égal nombre de tangentes communes des courbes primitives; donc on a ce théorème:

Deux courbes géométriques, de degrés m et n , étant tracées sur un même plan, le nombre des tangentes communes à ces courbes est, en général et au plus, $mn(m-1)(n-1)$.

Quant au nombre des tangentes communes aux polaires réciproques de ces courbes, il ne sauroit évidemment surpasser celui mn , qui appartient aux points mêmes de rencontre des courbes m et n ; sur quoi on pourroit faire des réflexions analogues à celles que nous avons rapportées ci-dessus (67. et 68.) pour le cas où les tangentes partent d'un même point.

Ajoutons, pour terminer, que l'orsque les courbes m et n ont un point de contact ou d'osculation d'un certain ordre, les polaires réciproques de ces courbes en ont pareillement un de ce même ordre, et qui correspond au premier; car p étant cet ordre, il en résulte que les courbes m et n ont $p+1$ tangentes consécutives communes confondues en une seule au point de contact, de sorte que les réciproques de ces courbes ont aussi $p+1$ points consécutifs communs confondus en un seul au point correspondant; on voit en outre que, dans

ce même cas, le nombre des points communs distincts et des tangentes communes distinctes des courbes de l'un et de l'autre système, se trouve diminué de p unités.

74. Je crois inutile d'examiner les diverses autres relations de situation qui peuvent exister entre le système des courbes primitives et de leurs réciproques; par exemple celles qui auroient lieu pour des tangentes et des points communs à l'infini, soit de simple contact, soit d'osculation etc.; j'en dirai tout autant de celles qui peuvent appartenir en commun au système d'un nombre quelconque de courbes situées dans un même plan; ce qui a été dit du cas particulier d'une seule courbe, suffira toujours pour faire découvrir ces relations sans difficulté, si l'on s'est bien pénétré de la théorie des polaires réciproques.

Au surplus, les principes qui viennent d'être exposés concernent proprement les relations descriptives des figures planes, et parmi ces relations, celles qui n'ont trait qu'au cours indéfini des lignes, sans égard à aucune mesure, à aucune grandeur déterminée ou constante, en un mot celles qui n'ont trait qu'aux propriétés de situation des lignes et des points tracés dans un plan commun. Nous examinerons plus tard, ce qui arrive pour les relations qui, au contraire, ne concernent uniquement que les rapports de grandeur, que nous avons nommés métriques; et, quant aux applications de ces mêmes théories, nous renverrons au *Traité des propriétés projectives* qui en offre de nombreux exemples relatifs aux systèmes de sections coniques et de lignes droites. Nous ne saurions revenir ici sur ces applications particulières sans faire un double emploi, d'autant plus qu'elles se présentent comme d'elles-mêmes, et ne donnent lieu à aucune observation nouvelle, à aucune difficulté particulière. C'est pourquoi nous allons, de suite, passer au cas où les figures que l'on considère sont situées d'une manière quelconque dans l'espace.

Des figures polaires réciproques dans l'espace.

75. La théorie des polaires réciproques, dans l'espace, offre la plus grande analogie avec celle qui concerne les figures simplement tracées dans un plan; elle n'en est même, comme on va le voir, qu'une extension facile.

Soit, en effet, une surface du second ordre quelconque, et un point pris arbitrairement pour pôle des rayons vecteurs, ou d'une suite de transversales rectilignes rencontrant respectivement la surface en deux points; le raisonnement déjà mis en usage (55.) pour les courbes du second ordre, prouvera encore que le lieu des centres de moyennes harmoniques des différens couples de points d'intersection, par rapport au pôle considéré comme origine commune des segmens, sera du premier degré ou une surface plane. On arriveroit d'ailleurs à la même conséquence en considérant ce qui se passe dans les différens plans menés par le pôle des transversales, et en observant que les polaires (55.) qui répondent respectivement aux différentes courbes d'intersection de ces plans et de la surface proposée, doivent nécessairement s'entre-couper deux à deux, et être ainsi comprises dans un même plan, qu'on peut nommer indifféremment le plan des moyennes harmoniques, le plan polaire relatif au pôle considéré en particulier.

Il est évident d'ailleurs que le plan polaire, quand il rencontre la surface proposée, ou que le pôle est au dehors de cette surface, contient les différens points de contact de celle-ci avec les tangentes issues du pôle; c'est-à-dire que, dans tous les cas, il est le plan de contact, réel ou idéal, de la surface conique circonscrite à la proposée, et qui a son sommet au pôle.

Enfin on voit que, quand le pôle d'un plan s'éloigne à l'infini, ce plan passe par le centre de la surface auxiliaire, ou devient un plan diamétral conjugué à la direction du diamètre qui contient le pôle; comme aussi, quand le plan polaire passe tout entier à l'infini, le pôle devient le centre même de la surface auxiliaire, et vice versa.

76. Considérons à présent trois points arbitrairement situés par rapport à une surface du second ordre quelconque, les trois plans polaires qui leur correspondent respectivement dans la surface, iront se couper en un même point, et les cordes de la surface, qui appartiennent aux trois droites joignant ce point à chacun des proposés, seront (55.) divisées harmoniquement par le couple des deux points dont il s'agit; le point d'intersection des plans polaires de nos trois points proposés, a donc lui-même pour polaire un plan qui passe par ces trois points; d'où résulte ce principe entièrement analogue à celui qui a été établi (56.) pour le cas particulier des sections coniques, et qui, comme lui, est fondamental:

Si un certain point est situé sur un plan quelconque, le plan polaire de ce point, par rapport à une surface du second ordre quelconque, passera nécessairement par le pôle de ce plan, et *vice versa*; de sorte que ces deux systèmes seront *polaires réciproques* à l'égard de la surface auxiliaire du second ordre.

Il suit de là aussi qu'un nombre quelconque de plans passant par un même point, a pour réciproque polaire un nombre pareil de points ou pôles situés dans un même plan; et *vice versa*, un nombre quelconque de points situés dans un même plan, a pour polaire réciproque un système pareil de plans passant par un même point.

77. Considérons maintenant une droite quelconque dans l'espace, et prenons arbitrairement deux points sur sa direction; les plans polaires de ces points se rencontreront suivant une nouvelle droite, qui sera évidemment telle que tout point de la direction aura réciproquement pour plan polaire un plan passant par la première; car le point dont il s'agit, appartenant à la fois aux deux premiers plans, son plan polaire, d'après ce qui précède, doit renfermer aussi les pôles de ces plans, c'est-à-dire les deux points pris à volonté sur la droite donnée.

La réciproque de cette proposition est également vraie; c'est-à-dire que tout plan passant par la droite donnée a, pour pôle, un point de l'autre droite; car un tel plan renferme les deux points ci-dessus pris à volonté sur la droite proposée, et par conséquent son pôle doit appartenir à la fois (76.) aux plans polaires de ces deux points ou à la droite de leur intersection commune; de plus, si l'on applique à cette seconde droite les raisonnemens qu'on vient d'établir sur la première, il sera facile de prouver qu'elles jouissent entièrement des mêmes propriétés réciproques à l'égard de la surface du second ordre auxiliaire; on peut donc dire qu'elles sont polaires réciproques et énoncer ce théorème:

La droite, polaire réciproque d'une droite à l'égard d'une surface du second ordre, est à la fois le lieu des pôles des différens plans qui passent par la première, et l'intersection commune des plans polaires des différens points de

cette première; de sorte que ces propriétés sont réciproques entre les deux droites dont il s'agit.

78. Ajoutons comme chose évidente d'après ce qui précède, que, si par l'une quelconque de ces droites, on mène, dans la surface auxiliaire, une suite de plans sécans, ils rencontreront l'autre droite en des points qui seront respectivement, pour les courbes d'intersection, les pôles de la première. On voit encore que, si l'on joint par une nouvelle droite, deux quelconques des points de celles là, sa direction ira rencontrer la surface auxiliaire en deux autres points qui la diviseront harmoniquement ou en segmens proportionnels; de sorte que, en supposant l'une quelconque de ces droites à l'infini, dans une direction donnée par un plan, sa polaire deviendra un diamètre de la surface auxiliaire, et vice versa.

Enfin, si l'on considère deux ou un nombre quelconque de droites passant par un même point, leurs polaires réciproques seront (77.) situées dans le *plan polaire* unique de ce point, et, à l'inverse, si un nombre quelconque de droites sont situées dans un seul et même plan, leurs polaires réciproques passeront par un point unique, pôle de ce plan.

79. En remarquant que la réciproque polaire d'une droite n'est autre chose que la direction indéfinie de la sécante, réelle ou idéale, qui, sur la surface du second ordre, renferme les points de contact des plans tangens issus de cette même droite, on déduira aisément de ce qui précède, les différens théorèmes établis d'abord par Monge, Livet, Brianchon et Chasles, sur les droites polaires ou conjuguées.

Mon objet n'est point d'ailleurs d'examiner les conséquences particulières qu'on peut déduire de là pour les surfaces du second degré, conséquences qui ont été également exposées par les géomètres cités, dans les Recueils de l'Ecole polytechnique; je me contenterai seulement de remarquer que les considérations précédentes sont basées sur la définition la plus générale des lignes et des surfaces du second ordre, et qu'elles offrent la plus grande analogie avec celles qui ont été exposées à la fin du Mémoire précédent, relativement aux centres et aux axes de moyennes harmoniques des figures rectilignes et polyédrales.

80. Après ce qui vient d'être dit sur les polaires réciproques du point, du plan et de la droite, il ne sera pas difficile de découvrir les di-

verses relations graphiques ou descriptives qui peuvent avoir lieu entre une figure, composée des manières quelconques des mêmes objets, et celle qui en est la polaire réciproque par rapport à une surface du second ordre, prise à volonté pour directrice. Cette discussion étant d'ailleurs entièrement analogue à celle que nous avons établie pour les figures planes, nous nous bornerons à quelques exemples généraux, relatifs aux polygones et aux polyèdres, en les choisissant de préférence parmi ceux qui peuvent nous servir à passer immédiatement aux relations de réciprocité qui concernent les courbes et les surfaces à double courbure, considérées comme limites de polygones et des polyèdres qui leurs sont inscrits ou circonscrits respectivement.

81. Soit d'abord un polygone rectiligne et gauche situé d'une manière quelconque dans l'espace, il y aura, dans ce polygone, plusieurs choses distinctes à considérer, telles que les sommets, les côtés, les angles aux sommets et les plans comprenant ces angles respectifs, qu'on peut nommer plans aux sommets ou au périmètre. Supposons qu'on prolonge indéfiniment les côtés de ce polygone, on pourra les considérer comme les arêtes d'une sorte de surface composée de faces planes angulaires et que nous nommerons, pour abréger, polyèdre angulaire ou indéfini. A son tour, le polygone proposé pourra être envisagé comme résultant de l'intersection mutuelle des arêtes consécutives de ce polyèdre.

Cela posé, si nous appliquons à ce système les considérations offertes par la théorie des polaires réciproques, deux arêtes ou côtés consécutifs quelconques auront pour polaires (78.) deux droites situées dans le plan polaire du sommet appartenant à ces côtés, et qui se rencontreront ainsi en un point, à son tour pôle du plan qui contient ces mêmes arêtes ou côtés. La suite des droites pareilles formera, par ses intersections successives, un nouveau polygone gauche, et celle des plans qui leur appartiennent formera un nouveau polyèdre indéfini, ayant ces droites pour arêtes; polygone et polyèdre qu'on pourra nommer les polaires réciproques des premiers à l'égard de la surface auxiliaire du second degré, attendu les relations de réciprocité qui les lie entr'eux d'après ce qui précède.

Remarquons d'ailleurs que, quand l'un des polygones est tout entier compris dans un plan, et que sa surface polyèdre s'évanouit en

quelque façon, l'autre se réduit à un point (78.) pôle de ce plan; de sorte que la surface polyèdre réciproque se change en un véritable angle solide, ayant ce même point pour sommet, et dont les faces ont réciproquement pour pôles les sommets du polygone plan proposé.

82. Si, revenant au cas général de deux polygones gauches quelconques polaires à l'égard d'une surface du second ordre donnée, nous passons aux courbes à double courbure, limites de l'un et de l'autre de ces polygones, de même que nous l'avons fait (63.) dans le cas du plan, il résultera de ce qui précède, que ces deux courbes jouissent entre-elles de cette propriété, que les tangentes de l'une sont les polaires de celles de l'autre, tandis que les points de la première sont les pôles des *plans osculateurs* de la seconde, et *vice versa*.

Mais, d'après ce qui vient d'être observé pour les simples polygones, il existe, dans le cas de l'espace, une autre considération essentielle qui n'a pas lieu dans le cas du plan, c'est que la suite des tangentes à une courbe à double courbure et dont elle peut être censée l'intersection continuelle, forme une véritable surface développable ayant cette courbe pour arête de rebroussement, et pour plans tangens les différens plans osculateurs de cette même courbe. Il en résulte, en effet, que l'enveloppe des plans polaires des différens points d'une courbe à double courbure n'est pas simplement la polaire de cette courbe, mais le système complet des tangentes à cette polaire, c'est-à-dire la développable osculatrice qui lui appartient: or cette propriété est réciproque entre les deux courbes dont il s'agit et leurs développables osculatrices.

Quant aux différens plans tangens à l'une de nos deux courbes, et il en existe une infinité passant par un même point ou une même tangente de cette courbe, ils ont évidemment pour pôles (77.) les différens points de la développable réciproque, appartenant à l'arête polaire de la tangente dont il s'agit.

83. Concluons de tout ce qui précède, qu'une courbe à double courbure et sa développable osculatrice étant données dans l'espace, ou, ce qui est aussi général et revient au même, une surface développable et son arête de rebroussement étant données, il correspondra à ce système un autre système pareil composé également d'une développable et de son

arête de rebroussement, système qu'on pourra nommer le réciproque polaire du premier, par rapport à la surface du second ordre prise pour auxiliaire, et dont les propriétés seront telles qu'il suit: „1) les droites génératrices de l'une des développables seront les réciproques polaires de celles de l'autre; 2) les plans tangens de l'une des développables, ou les plans osculateurs de son arête de rebroussement, seront les polaires des différens points de l'arête de rebroussement de l'autre; et vice versa les points de son arête de rebroussement seront les pôles des plans tangens de la développable réciproque ou des plans osculateurs de l'arête de rebroussement de cette développable; 3) tout plan passant par une génératrice de l'une des développables, c'est-à-dire par une tangente à son arête de rebroussement, aura pour pôle un point de la développable de l'autre système; et vice versa un point quelconque de l'une des surfaces développables aura pour plan polaire un plan passant par une génératrice de l'autre, c'est-à-dire qu'il sera simplement tangent à l'arête de rebroussement de cette surface etc.” Il convient d'ajouter à tout ceci que, quand l'une des courbes que l'on considère est plane, auquel cas la développable osculatrice est elle-même comprise toute entière dans le plan qui lui appartient, la courbe de l'autre système se réduit simplement à un point (81.) pôle du plan dont il s'agit; de sorte que la développable correspondante est alors une véritable surface conique.

84. Proposons nous maintenant de rechercher directement le degré de la développable réciproque d'une courbe à double courbure donnée, aussi bien que celui de l'arête de rebroussement de cette développable. Soit, à cet effet, m le degré de la courbe donnée, et appelons n celui de sa développable osculatrice, nous verrons bientôt qu'il existe une relation nécessaire entre les nombres m et n .

Cela posé, le degré de la développable réciproque de la courbe (m) sera évidemment égal au nombre de points d'intersection d'une droite arbitraire avec cette développable: or d'après ce qui précède, cette droite a pour polaire réciproque dans le système proposé, une autre droite, et les plans polaires des points d'intersection qui s'y trouvent sont des plans passant (77.) par cette droite réciproque, et touchant (83.) simplement la courbe. D'un autre côté, par une droite donnée à volonté dans l'espace, on ne peut mener, en général et au plus, que $m(m-1)$ plans tangens à une courbe de degré m , puisque si l'on fait la projection ortho-

gonale de la figure sur un plan perpendiculaire à la droite, la question revient à demander (66.) le nombre des tangentes à la projection de la courbe, qui passent par le point unique de projection de la droite, et que le degré de cette courbe n'a pas cessé d'être m . Donc enfin le degré de la développable réciproque d'une courbe de degré m est, en général et au plus, $m(m-1)$.

Quant à l'arête de rebroussement de cette développable, son degré est marqué par le nombre des points suivant lesquels elle est rencontrée par un plan arbitraire; or ce plan a pour pôle, dans le système primitif, un point quelconque et ses intersections ont pour réciproques des plans passant par ce point, et touchant (83.) la développable (n) de (m) . Mais le nombre des plans tangens que, d'un point quelconque donné, on peut, en général, mener à une développable de degré n , est égal au nombre des tangentes qui répondent à ce point et à une section plane quelconque faite par ce même point dans la surface, section qui est également du degré n ; donc le nombre des plans tangens dont il s'agit, et par conséquent le degré cherché de l'arête de rebroussement de la développable réciproque est $n(n-1)$.

85. Nous avons dit qu'il existe une relation nécessaire entre les nombres m et n , qui expriment les degrés respectifs d'une courbe à double courbure et de la développable osculatrice, ou, ce qui revient au même, de l'arête de rebroussement d'une surface développable et de cette surface elle-même. Pour la découvrir, cherchons en combien de points une droite arbitraire rencontre la surface dont il s'agit, lorsque le degré de son arête de rebroussement est m ; à chaque point pareil répondra une génératrice de la surface, tangente à la courbe (m) , de sorte que le plan qui la renferme ainsi que la transversale arbitraire, sera lui-même tangent à cette courbe: le nombre des points d'intersection cherché sera donc égal à celui des plans tangens qu'on peut mener à la courbe (m) , par la droite dont il s'agit; or nous avons fait voir ci-dessus que ce dernier est, en général, $m(m-1)$; donc tel est aussi, en général et au plus, le degré n de la développable osculatrice de la courbe (m) .

Il suit de là évidemment que, dans la seconde des questions ci-dessus, il faudra remplacer le nombre n par celui $m(m-1)$ que nous venons de trouver, ce qui donneroit pour le degré de l'arête de rebroussement, polaire réciproque de la développable (n) de (m) , $(m-1)[m(m-1)-1]$.

Mais cette première limite peut-être diminuée, quoique les raisonnemens que nous avons établis, pour le cas où n est immédiatement donné sans que l'on connaisse m , soient en eux mêmes très rigoureux et très concluans dans ce cas général; en effet, la connoissance du degré m de l'arête de rebroussement permet de modifier ainsi ces premiers raisonnemens.

86. Le degré de l'arête de rebroussement polaire réciproque de la développable (n) est égal, comme on l'a vu (84.), au nombre qui exprime combien, d'un point donné arbitrairement, on peut mener de plans tangens à cette développable (n), ou de plans osculateurs à l'arête de rebroussement (m) de cette développable. Or le système de tous les points de contact de ces plans tangens avec la développable (n) est lui-même sur une autre développable de degré $n-1$ *), laquelle rencontre bien la développable (n) en $n(n-1)$ génératrices en général, mais ne rencontre l'arête de rebroussement (m), qu'en $m(n-1)$ points au plus, dont les plans osculateurs remplissent seuls complètement les conditions de la question; donc $m(n-1) = m[m(m-1)-1]$ est, en général, le degré de l'arête de rebroussement, polaire réciproque de la surface (n) ou $m(m-1)$.

Nous pourrions faire, sur ces dernières considérations et en général sur toutes celles qui précèdent, relatives aux degrés des courbes et des surfaces, des réflexions analogues à celles que nous avons présentées dans les No. 67., 68. et suivans, sur les simples courbes planes et leurs réciproques; mais elles se présentent d'une manière trop facile, et elles nous écarteroient trop de notre sujet pour qu'il soit convenable de nous y arrêter.

87. Pour terminer ce que nous avons à dire sur les courbes à double courbure et les surfaces développables, nous remarquerons qu'une telle courbe n'a jamais qu'une seule développable osculatrice, mais qu'il en est une infinité qui lui sont simplement tangentes, c'est-à-dire dont les élémens plans la touchent en chaque point de son périmètre, de la même manière qu'une surface développable quelconque n'a qu'une arête de rebroussement unique, composée d'ailleurs d'une ou de plusieurs branches distinctes et pour laquelle les plans tangens de la surface sont des

*) Cette proposition qu'on démontre aisément par l'analyse algébrique, sera établie directement dans la suite de ces recherches, relative aux propriétés générales des courbes et des surfaces géométriques.

plans osculateurs, tandis que cette même surface renferme une infinité d'autres courbes à double courbure simplement touchées en chaque point par les plans tangens de la surface.

Or si l'on considère ce qui se passe par rapport à une surface du second ordre prise pour auxiliaire, il sera aisé de reconnoître (83.), qu'une surface développable (n) étant circonscrite à une courbe à double courbure quelconque (m), ou, ce qui est la même chose, passant par cette courbe, la suite des pôles des plans tangens à cette surface sera une courbe à double courbure (p) située elle-même sur la développable, enveloppe des plans polaires des points de la courbe proposée (m); si donc, pour fixer entièrement la position de la surface développable (n), on l'assujettit à passer par une seconde courbe à double courbure donnée (m'), la courbe (p) qui est la polaire réciproque de cette surface dans l'autre système, ou le lieu des pôles de ses plans tangens, sera à la fois sur la développable réciproque de la première (m) des deux courbes proposées, et sur la développable réciproque de la seconde (m') de ces courbes, c'est-à-dire qu'elle sera à l'intersection commune de ces développables. Mais, d'après ce que nous avons vu ci-dessus (84.), le degré de ces développables est en général $m(m-1)$, $m'(m'-1)$, m et m' étant ceux des courbes proposées; donc $mm'(m-1)(m'-1)$ est aussi celui de l'intersection dont il s'agit; d'où l'on conclut réciproquement (84.) que le degré de la développable circonscrite à nos deux courbes (m) et (m'), est, en général, $mm'(m-1)(m'-1)[mm'(m-1)(m'-1)-1]$ bien qu'on ne puisse lui mener, au plus, que $mm'(m-1)(m'-1)$ plans tangens d'un point quelconque donné.

88. Il seroit inutile de nous appesantir d'avantage sur ces applications particulières, relatives aux surfaces développables et aux courbes à double courbure; les principes et les exemples généraux qui précèdent doivent suffire pour montrer comment on doit s'y prendre dans chaque cas; en conséquence, nous allons passer immédiatement à ce qui concerne les surfaces quelconques; mais auparavant nous devons dire quelques mots touchant les figures polyédrales, dont ces surfaces peuvent être regardées comme les limites.

Considérons donc un polyèdre quelconque dans l'espace, et prenons à volonté une surface du second ordre pour auxiliaire; d'après ce qui a été établi, art. 76. et suivans, il est clair que la figure polaire de

ce polyèdre sera elle-même un autre polyèdre, dont les sommets, les faces et les arêtes seront respectivement les polaires réciproques des faces, des sommets et des arêtes du proposé; de telle sorte, par exemple, que les sommets de l'un seront les pôles des faces de l'autre et vice versa; ainsi l'on peut dire de ces polyèdres qu'ils sont polaires réciproques l'un de l'autre.

Considérons entre-autres un hexaèdre ordinaire quelconque, composé, comme on sait, de six faces et de huit sommets, son polaire réciproque aura donc, au contraire, six sommets et huit faces, de sorte que ce sera un octaèdre à faces triangulaires; car le nombre des sommets appartenans à chaque face sera égal au nombre des faces appartenant à chaque sommet de l'hexaèdre, c'est-à-dire trois. En général on voit que les angles solides de l'un des polyèdres seront toujours (81.) remplacés par des polygones, plans de l'autre, contenant le même nombre d'arêtes que ces angles et autant de sommets qu'ils ont de faces planes.

89. On peut déduire de là plusieurs rapprochemens curieux entre les polyèdres de diverses espèces, et qu'il serait peut-être moins facile de saisir de toute autre manière: ainsi par exemple, un polyèdre d'une espèce quelconque étant donné, on peut toujours construire un autre polyèdre ayant autant de faces que le premier a de sommets, et autant de sommets que le premier a de faces; de telle sorte que ses angles solides seront de même espèce que les polygones, plans du premier et vice versa. Enfin on voit que deux polyèdres réciproques sont toujours tels que le nombre de leurs arêtes est le même de part et d'autre; mais nous ne saurions nous arrêter ici d'avantage à ces corollaires particuliers de la théorie des polaires réciproques.

90. Pour compléter ce que nous venons de dire sur les polyèdres polaires, nous ferons observer que la droite ou diagonale qui appartient à deux sommets quelconques de l'un d'eux, a pour réciproque la droite d'intersection des deux faces qui ont pour pôles ces mêmes sommets et vice versa; qu'en suite toute droite qui rencontre les faces de l'un des polyèdres ou leurs prolongemens, a pour polaire réciproque une autre droite (77.), intersection commune de plans passant par les sommets de l'autre polyèdre et qui ont pour pôles respectifs les intersections de la première; qu'enfin tout plan ren-

contrant les arêtes de l'un des polyèdres a pour réciproque (76.) le point d'intersection commune de plans passant par les arêtes de l'autre polyèdre.

91. En passant de ce qui précède aux surfaces, comme on l'a fait pour les simples polygones et les courbes, on en conclura que,

Une surface quelconque étant donnée et une surface du second ordre étant prise à volonté pour *auxiliaire*, il existe toujours une autre surface, polaire réciproque de la première, et qui est à la fois le lieu des pôles de ses plans tangens et l'enveloppe des plans polaires des différens points qui lui appartiennent.

Cette propriété est d'ailleurs réciproque entre les deux surfaces, c'est-à-dire que,

Si, en un point quelconque de l'une des surfaces, on mène le plan tangent correspondant, le plan polaire de ce point touchera l'autre surface en un point qui sera réciproquement le pôle de ce plan tangent.

D'après cela, on prouve aisément encore (77.) que toute tangente en un point de l'une des surfaces, a, pour polaire, une tangente à l'autre surface, en un point dont le plan tangent a réciproquement pour pôle le point de contact de la première.

92. Il est presque inutile de dire que tout polyèdre inscrit à l'une des deux surfaces a pour réciproque un polyèdre circonscrit à l'autre et vice versa. Quant aux polygones inscrits ou circonscrits, ils offrent des circonstances particulières que nous aurons occasion d'examiner plus loin.

Remarquons d'ailleurs que, quand l'une des surfaces est susceptible d'être engendrée en général par une droite mobile, c'est-à-dire l'orsque c'est une surface réglée quelconque et non développable, l'autre en est nécessairement une aussi (77.); or il est aisé de prouver que la réciprocité observée ci-dessus pour les surfaces polaires en général, aura encore lieu dans le cas actuel, c'est-à-dire que chacune de ces surfaces sera à la fois l'enveloppe des plans polaires des points de l'autre, et le lieu des pôles des plans tangens à cette autre.

Au contraire, quand les génératrices de la surface proposée se rencontrent consécutivement, ou que cette surface est développable, les

choses se passent tout différemment, et la réciprocité n'a plus lieu, comme on en a déjà pu juger d'après ce qui a été dit (82.) à l'occasion des courbes à double courbure. Car, tandis que le lieu des pôles des plans tangens à une surface développable est simplement une courbe à double courbure, l'enveloppe des plans polaires de ses différens points, est, au contraire, une véritable surface développable comme la proposée, et qui est osculatrice de cette courbe; circonstances qui semblent tenir (82.) à ce que, sous certains rapports, il est comme impossible de distinguer une courbe à double courbure de sa développable osculatrice, ou, ce qui revient au même, une développable de son arête de rebroussement.

Revenons au cas général des surfaces quelconques à double courbure.

93. Supposons que, dans la vue de découvrir le degré de la surface réciproque polaire d'une surface de degré m donnée dans l'espace, on considère une droite transversale arbitraire de cette réciproque; chacun des points d'intersection de cette droite aura pour réciproque (91.) un plan tangent à la surface (m) passant (77.) par la droite polaire de celle dont il s'agit; donc le degré de la polaire réciproque d'une surface (m) est égal à celui qui exprime combien, d'une droite donnée à volonté dans l'espace, on peut mener de plans tangens à cette surface (m).

Pour découvrir ce dernier nombre, nous supposerons que, de deux points quelconques de la droite proposée, on mène deux cônes enveloppes de la surface (m), les courbes de contact de ces cônes se couperont en des points qui seront évidemment ceux des points de contact des plans tangens demandés, et leur nombre sera précisément égal à celui de ces plans; mais on démontre que la courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface du degré m , est sur une autre surface du degré $m-1$, quoique ce cône soit lui-même du degré $m(m-1)$; donc les points de contact des plans tangens ci-dessus sont à l'intersection commune de la surface (m) et de deux autres surfaces du degré $m-1$, donc leur nombre ou celui des plans tangens est, en général et au plus $m(m-1)^2$; et par conséquent:

La polaire réciproque d'une surface de degré m , est, en général et au plus, du degré $m(m-1)^2$.

C'est évidemment aussi, en général, le degré de toute section plane faite dans cette surface polaire.

94. On remarquera que tout cône circonscrit à l'une de nos deux surfaces, a pour polaire réciproque (83.) une section plane de l'autre, et vice versa; mais toute section plane faite dans une surface de degré m , est elle-même du degré m ; donc (84.) tout cône, enveloppe de la polaire réciproque de (m) , est du degré $m(m-1)$ seulement, bien que le degré de cette surface polaire soit, en général, $m(m-1)^2$, d'après ce qui précède. Supposons, par exemple, $m=2$, on aura à la fois $m(m-1)^2=2$ et $m(m-1)=2$, c'est-à-dire que

La polaire réciproque d'une surface du second degré est elle-même du second degré, et que toute surface conique circonscrite à cette polaire est pareillement de ce degré.

En se rappelant (75.) que le pôle et le plan polaire d'une surface du second degré, ne sont autre chose que le sommet et le plan de contact d'une surface conique quelconque circonscrite à cette même surface, on conclura en particulier, de ce qui précède, qu'un pareil système a pour polaire à l'égard de la surface auxiliaire, un nouveau point et un nouveau plan qui ont entr'eux la même corrélation par rapport à la surface du second degré réciproque de la proposée.

95. Considérons maintenant un polygone gauche quelconque inscrit à l'une (m) de nos deux surfaces réciproques (m) et (m') , il est évident (81.) que son réciproque polaire sera lui-même un autre polygone dont les différens angles aux sommets seront simplement compris dans des plans tangens (91.) à la seconde (m') de ces surfaces, formant ainsi un polyèdre indéfini (80.) circonscrit à cette surface suivant des points qui seront les pôles respectifs des plans tangens aux sommets du premier polygone. Or les intersections consécutives de ces derniers plans tangens donnent lieu à un autre solide indéfini circonscrit à la surface (m) , et ayant, à son tour, pour réciproque le polygone formé par les points de contact déterminés sur (m') , pris pour sommets successifs de ce polygone; donc ces deux polygones inscrits, sans être réciproques polaires, sont néanmoins tels que les côtés de l'un sont les polaires des arêtes du solide indéfini circonscrit aux sommets de l'autre, et que ses sommets sont les pôles des faces planes de ce même solide.

Les choses se passent d'une manière différente pour le cas où l'on considère un polygone circonscrit à l'une (m) des surfaces: car son réci-

proque est évidemment (91.) lui-même circonscrit à l'autre (m'), et ses angles ne sont plus compris dans des plans tangens à cette autre surface. On appercevra encore mieux la différence qui existe entre les deux cas, en supposant qu'on inscrive aux surfaces (m) et (m'), les polygones qui ont pour sommets les points de contact des côtés des premiers; car les polyèdres circonscrits qui leur appartiennent, renfermeront simplement sur leurs surfaces, les contours des polygones circonscrits dont il s'agit, de telle sorte que les sommets de ceux-ci seront situés sur les arêtes respectives de ceux là.

96. Passant donc au cas où les polygones inscrits ou circonscrits aux surfaces proposées deviennent des courbes véritables qui se confondent en une seule pour chaque surface, les polyèdres circonscrits deviendront des surfaces développables elles-mêmes circonscrites aux proposées suivant ces courbes, et dont chacune sera l'enveloppe des plans polaires des points de la courbe de contact de l'autre; les arêtes de rebroussement de ces développables restant d'ailleurs distinctes de leurs courbes de contact, puisque les osculatrices développables de celles-ci, polaires réciproques (83.) de ces arêtes, sont supposées quelconques à l'égard des surfaces proposées. Quant aux degrés des développables et des courbes de contact de la figure réciproque, il se détermineroient aisément par des moyens analogues à ceux qui ont été mis en usage précédemment.

Enfin nous croyons devoir ajouter que, d'après les considérations précédentes et d'après la définition des tangentes conjuguées des surfaces, donnée par Mr. Dupin (*Développemens de géométrie*, page 41. et suiv.) le système de deux pareilles tangentes d'une surface a pour polaire, un autre système de deux tangentes conjuguées de la réciproque de cette surface.

97. Nous pourrions encore ici reproduire, sur les dépendances graphiques qui lient entre elles les surfaces polaires, des réflexions et des remarques analogues à celles que nous avons établies (67. et suiv.) pour les simples courbes tracées dans un plan; car les surfaces présentent, aussi bien que les courbes, des modifications de forme tout à fait particulières dans certaines régions de leurs cours. Ainsi non seulement elles ont des points multiples et conjugués, des points de rebroussement et d'inflexion; mais elles ont aussi des lignes tout entières,

soit conjuguées, soit multiples, qu'on nomme aussi de striction, enfin des lignes d'inflexion et de rebroussement etc.; or ces lignes et ces points singuliers donnent lieu à des considérations importantes et qu'il ne faut pas négliger dans la recherche du degré et des affections des surfaces polaires; mais, comme elles conduiroient à une discussion qui n'a de difficulté que la longueur, d'après ce qui a été dit du cas simple des courbes, nous croyons devoir ne pas nous y arrêter pour le moment.

Ces observations s'appliquent d'ailleurs également aux points et aux courbes des surfaces polaires, qui sont à l'infini: ainsi, par exemple, tout point à l'infini de l'une de ces surfaces a pour polaire un plan tangent à l'autre, passant (75.) par le centre de la surface du second ordre auxiliaire et vice versa; or le plan tangent en un tel point, qu'on peut nommer asymptotique de la surface correspondante, a pour pôle le point de contact du premier plan. La suite des points à l'infini de l'une des surfaces est donc remplacée par la suite des plans tangens de l'autre, qui passent par le centre de la surface du second degré auxiliaire; et la suite des plans asymptotiques de cette même surface est remplacée par la courbe des points de contact des différens plans tangens dont il s'agit; d'où il résulte, en particulier, que la développable asymptotique de l'une des surfaces, est la polaire de la courbe de contact du cône circonscrit à l'autre, et qui a le sommet au centre de la surface du second ordre auxiliaire. Or c'est ce qu'on auroit pu conclure immédiatement des principes qui précèdent (94.), en observant que tous les points à l'infini de l'espace doivent être censés sur un plan qui a pour pôle (75.) le centre dont il s'agit.

Pour les raisons déjà déduites ci-dessus, nous ne nous arrêterons pas à discuter ce qui arrive dans le cas où le plan à l'infini touche une ou plusieurs nappes de l'une des deux surfaces, ni les diverses autres circonstances que peuvent présenter en général les nappes infinies de ces surfaces.

98. Après ce qui vient d'être dit sur les surfaces polaires réciproques à l'égard d'une surface du second ordre prise pour auxiliaire, il ne sera pas difficile de découvrir ce qui se passe dans le cas où l'on considère un système de deux ou de plusieurs surfaces quelconques et le système de leurs polaires réciproques.

Par exemple, si l'on considère deux surfaces de degrés m et n et leurs polaires réciproques de degrés (93.) $m(m-1)^2$, $n(n-1)^2$, il paroît évident 1) que la courbe d'intersection des deux premières surfaces, qui est du degré mn , aura pour réciproque une surface développable circonscrite aux systèmes de deux dernières, et que cette développable sera (84.) du degré $mn(mn-1)$ au plus; 2) que la développable circonscrite aux surfaces (m) et (n) , a aussi réciproquement pour polaire la courbe d'intersection des surfaces polaires $m(m-1)^2$, $n(n-1)^2$, laquelle est évidemment, en général, du degré $mn(m-1)^2(n-1)^2$; 3) que par conséquent (84.) la développable circonscrite aux surfaces m et n est elle-même au plus du degré $mn(m-1)^2(n-1)^2[mn(m-1)^2(n-1)^2-1]$, et que le nombre des plans tangens qu'on peut lui mener d'un point donné, lequel est aussi celui des plans tangens communs à la fois aux surfaces (m) et (n) et passant par le point en question, ne peut surpasser le nombre $mn(m-1)^2(n-1)^2$ inférieur à celui de cette développable etc. etc.

99. Supposons encore que les surfaces (m) et (n) se touchent en un point ou aient un plan tangent commun en ce point, il est clair (91.) que leurs réciproques se touchent pareillement en un autre point correspondant au premier; et, par suite, si ces mêmes surfaces (m) et (n) se touchent en s'enveloppant suivant une courbe toute entière, leurs polaires réciproques se touchent de même suivant une courbe toute entière, de telle sorte que chacune de ces courbes (96.) pourra être considérée réciproquement comme le lieu des pôles des plans tangens qui appartiennent à l'autre, et dont l'enveloppe est la développable circonscrite à la fois aux deux surfaces qui se touchent suivant cette autre.

Si d'ailleurs les deux surfaces (m) et (n) , au lieu de se toucher suivant une courbe entière, ne se touchoient que suivant une portion de courbe; c'est-à-dire, si, au point commun à ces surfaces, deux courbes tracées sur elles avoient un contact d'un certain ordre, et que de plus les surfaces se touchassent simplement suivant la portion commune à ces courbes, il en seroit de même encore de leurs surfaces polaires. Enfin, si les différentes courbes tracées sur les surfaces (m) et (n) , à partir d'un point commun et dans la même direction, avoient toutes un contact de l'ordre p entre-elles, c'est-à-dire si ces surfaces avoient, autour du point en question, un contact de l'ordre p , on

voit que leurs polaires réciproques auroient un contact du même ordre au point qui correspond au premier.

100. Mais il seroit fort inutile de pousser plus loin ce rapprochement entre les figures qui, dans l'espace, sont réciproques polaires l'une de l'autre à l'égard d'une surface du second ordre prise pour auxiliaire; la discussion, aidée des principes généraux qui précèdent, suffira pour faire découvrir, dans chaque cas particulier, l'espèce de relations graphiques ou descriptives qui lieront entre-elles la figure primitive et sa dérivée; de sorte qu'on sera toujours en état de traduire leurs propriétés de situation, et, par là, d'en découvrir de nouvelles si l'on en connoissoit déjà: c'est ainsi, par exemple, que, pour le cas de l'espace, les propriétés des polygones plans et de courbes planes se changeront (81. et 83.) en d'autres appartenant aux angles solides et aux surfaces coniques; que les propriétés des courbes à double courbure se changeront en d'autres des surfaces développables et réciproquement; qu'enfin celle des polygones et des polyèdres inscrits aux courbes et aux surfaces se changeront en d'autres propriétés des polygones et des polyèdres indéfinis ou définis, circonscrits, au contraire, à de telles lignes et surfaces.

Au surplus, il est essentiel de le rappeler ici sur de nouveaux frais, l'échange dont il s'agit ne sauroit avoir lieu pour toute espèce de propriétés ou de relations descriptives, mais seulement pour les propriétés de situation des figures, et qui étant ainsi indépendantes de toute relation particulière de grandeur, se trouvent comprises parmi celles que nous avons nommées ailleurs propriétés projectives.

101. Une autre remarque toute aussi importante, c'est que les propriétés des courbes et des surfaces ne pourront donner lieu à de nouvelles propriétés, lorsqu'on leur appliquera les considérations de la théorie des polaires réciproques, qu'autant qu'elles seront des propriétés de genre et non d'espèce, ou plutôt qu'autant qu'elles appartiendront à la fois à toutes les courbes et à toutes les surfaces quel qu'en soit le degré. Je vais m'expliquer plus clairement.

Concevons, sur un plan, une courbe quelconque du degré m , la polaire réciproque sera donc du degré $m(m-1)$; cela posé, si la courbe proposée (m) jouit d'une certaine propriété ou relation graphique et projective, on pourra, à coup sûr, traduire cette relation en une autre qui

appartiendra à sa réciproque $m(m-1)$. Mais celle-ci n'est que d'une espèce particulière (67.) parmi toutes celles du même degré; donc on ne sauroit affirmer que la propriété qu'on lui a découverte appartienne en effet à toutes les courbes de ce degré. Mais si la propriété qu'on suppose déjà comme pour la courbe (m) , est une propriété commune à la fois à toutes les courbes quel qu'en soit le degré, c'est-à-dire si m est indéterminé, alors la polaire réciproque $m(m-1)$ en jouira en même temps que la primitive (m) , et par conséquent celle-ci, dont le degré est d'ailleurs quelconque, jouira en même temps de la propriété réciproque et qui se déduit de l'autre par la théorie des pôles et polaires. Or, si la première propriété n'est pas elle-même sa réciproque, on en aura découvert une tout à fait différente et toute aussi générale, puisqu'elle appartiendra à la fois à toutes les courbes géométriques.

102. Néanmoins le cas des courbes et des surfaces du second degré fait exception à la règle que nous venons de poser: c'est-à-dire que toute propriété graphique et projective d'une telle ligne et surface peut se traduire immédiatement en une autre appartenant à toutes les courbes et surfaces de ce degré, sans que, pour cela, cette propriété appartienne à la fois à toutes les courbes et surfaces géométriques en général. Or cela tient à ce que les polaires réciproques d'une courbe ou d'une surface du second degré sont elles-mêmes de ce degré (66. et 93.); de sorte que les propriétés qu'elles possèdent doivent aussi appartenir à ces réciproques.

Dans le supplément placé à la fin du *Traité des propriétés projectives des figures*, j'ai indiqué quelques unes des conséquences qu'on peut déduire de cette remarque particulière, pour les surfaces du second ordre: ce qui précède met en état d'en découvrir beaucoup d'autres. Mais ayant principalement pour objet, dans ce *Mémoire*, la théorie générale des polaires réciproques, je me bornerai à un petit nombre de nouveaux exemples, dans la simple vue de faciliter l'intelligence des principes, et de montrer le degré d'utilité ou d'importance qui peut leur être propre dans les recherches relatives aux figures.

103. Considérons deux surfaces quelconques du second ordre, leurs réciproques polaires seront elles-mêmes deux autres surfaces quelconques de cet ordre, dont l'intersection mutuelle sera une courbe à double courbure du 4^{me} degré, polaire (98.) de la développable circonscrite à la fois aux surfaces proposées, la quelle est ainsi au plus du 12^{me} de-

gré (84.). Mais nous avons prouvé dans l'ouvrage déjà cité ci-dessus (supplément, No. 611. et suiv.), que „les branches d'une telle courbe peuvent toujours être placées sur quatre surfaces coniques du second degré, dont les sommets respectifs ont, pour plans polaires communs à l'égard des surfaces auxquelles ils appartiennent, les plans qui renferment les trois autres sommets de cônes semblables;” et, d'un autre côté, chaque cône a pour polaire, dans le système proposé ou primitif, une ligne du second ordre (94.) dont les différens points appartiennent nécessairement (87.) à la développable circonscrite aux deux surfaces de ce système, et qui est la pénétration commune de deux de ses nappes, c'est-à-dire que c'est une des lignes de striction de ces nappes; donc en premier lieu,

La surface développable circonscrite à deux surfaces quelconques du second ordre offre, en général, quatre lignes de striction distinctes, planes et du second ordre seulement.

Et, comme les sommets des cônes qui les remplacent dans le système réciproque, ont mêmes plans polaires à l'égard des surfaces de ce système, il en résulte, en outre, que

Les plans de striction du système primitif ont aussi mêmes pôles dans les deux surfaces proposées. Donc, d'après les articles (612. et 615.) de l'ouvrage cité, ces pôles sont, à leur tour, les sommets des cônes du second ordre qui contiennent la courbe d'intersection des deux surfaces proposées; mais, selon ce que nous venons de rappeler, chacun d'eux est aussi le pôle du plan qui renferme les trois autres; donc enfin ces quatre pôles sont, trois par trois, situés sur les quatre plans de striction, c'est-à-dire qu'ils sont l'intersection mutuelle de ces quatre plans.

Quant aux deux courbes de contact de la surface développable circonscrite à la fois à deux surfaces quelconques du second ordre, il est facile de prouver qu'elles sont en général du 4^{me} degré, et placées à l'intersection respective des surfaces proposées et de deux autres surfaces comme elles du second degré.

En effet, considérons, en particulier, la courbe de contact appartenant à l'une (m) des deux surfaces, et supposons que, prenant cette surface pour auxiliaire, on détermine (91.) celle qui est la polaire réciproque de l'autre (m'), cette polaire réciproque sera aussi du second degré; mais, d'après sa nature, elle est le lieu des pôles des plans tangens à la

surface (m') par rapport à la surface auxiliaire (m), et d'ailleurs le pôle de tout plan tangent à cette auxiliaire se confond nécessairement (75.) avec le point de contact même de ce plan; donc, si l'on recherche les points où la réciproque ci-dessus coupe la surface auxiliaire, les plans tangens à ces points seront en même tems tangens à la seconde (m') des surfaces proposées; et par conséquent la suite des points d'intersection pareils formera une courbe à double courbure du 4^{me} degré, qui sera précisément, sur (m), la courbe de contact de la développable circonscrite aux deux surfaces du second ordre proposées (m) et (m'). On détermineroit, de la même manière, celle qui appartient à l'autre de ces deux surfaces.

On remarquera que la courbe de contact, qui vient d'être déterminée sur chacune des deux surfaces que l'on considère, est précisément celle qui sépare entre-elles, sur cette surface, l'ombre, la pénombre et la partie entièrement éclairée, quand on suppose l'autre surface lumineuse; or ce qui précède donneroit lieu à une construction assez simple de la courbe de séparation d'ombre et de lumière pour les surfaces du second degré, et qui n'exigeroit d'autres instrumens que la règle et le compas, lorsqu'une fois l'on auroit obtenu un seul point de la courbe dont il s'agit, ce qui est facile.

104. Considérons encore un système quelconque de surfaces du second ordre, ayant une même courbe d'intersection, on prouve aisément que les plans polaires qui répondent à ces surfaces et à un même point quelconque de l'espace concourent tous suivant une même droite. En effet, si, par le point donné, on conduit un plan quelconque, il rencontrera les surfaces proposées en autant de lignes du second ordre passant par les mêmes quatre points d'intersection du plan et de la courbe commune aux surfaces; or ce même plan ira déterminer, dans chacun des plans polaires du point donné, autant de droites qui seront évidemment (75.), pour les courbes de ce plan, les polaires du point dont il s'agit; et, d'après le No. 388. du Traité des propriétés projectives des figures, ces polaires passent toutes par un même point distinct du premier; donc aussi les plans polaires auxquels elles appartiennent vont concourir en une même droite comme il s'agissoit de le démontrer.

Cela posé, appliquons donc à ce système général les principes qui font l'objet de ce Mémoire, c'est-à-dire, recherchons ce qui se passe dans

le système des surfaces du second degré polaires réciproques des proposées à l'égard d'une dernière surface quelconque du même degré prise pour auxiliaire; il est évident que ces nouvelles surfaces auront (98.) une même développable circonscrite à la fois à tout leur système, et polaire réciproque de la courbe d'intersection commune à toutes celles du premier système. Or le point arbitraire de ce premier système sera remplacé par un plan, et ses différens plans polaires, par rapport aux surfaces proposées, le seront par des points pôles respectifs (94.) de ce plan à l'égard des nouvelles surfaces; enfin tous les points semblables seront situés (77.) sur une ligne droite réciproque de celle où concourent, d'après ce qui précède, les plans polaires dont il s'agit; donc, tout étant (109.) réciproque entre l'ancien et le nouveau système, on pourra en conclure la proposition générale qui suit:

Lorsque plusieurs surfaces du second degré ont une même développable circonscrite, un plan quelconque a pour pôles, dans ces surfaces respectives, une suite de points rangés sur une même droite, qui contient (75.) tous les centres de ces surfaces quand le plan est supposé à l'infini.

105. On démontre encore, par un genre de raisonnement analogue à celui que nous venons de mettre en usage précédemment, que,

Lorsque plusieurs surfaces du second ordre passent toutes par les mêmes huit points d'intersection, leurs plans polaires respectifs, par rapport à un point quelconque de l'espace, concourent tous en une seule et même droite.

Passant donc à la figure polaire, on aura à considérer un système de surfaces du second ordre à la fois tangentes aux huit mêmes plans, ce qui est le plus grand nombre de plans qui puissent toucher en même tems trois surfaces quelconques du second ordre. Or, par les mêmes raisons que ci-dessus, le point arbitraire du système primitif est remplacé par un plan dans le nouveau système, et les plans polaires qui lui appartiennent sont remplacés par les pôles de ce plan pris relativement aux surfaces dérivées; donc puisque ces plans polaires passent par une même droite, en vertu du théorème qui précède, les pôles qui les remplacent seront réciproquement (77.) compris sur une même droite, proposition qu'on peut énoncer ainsi:

Lorsque plusieurs surfaces du second ordre ont les

huit mêmes plans tangens communs, un plan quelconque a pour pôles, dans ces surfaces respectives, une suite de points rangés sur une seule et même droite.

Huit plans quelconques peuvent toujours être censés former par leurs rencontres successives, et lorsqu'on les prend dans un certain ordre, un octaèdre indéfini (80.) ou à faces angulaires; on peut donc énoncer plus simplement encore le théorème qui précède en cette manière:

Le lieu des pôles d'un plan donné par rapport à une suite de surfaces de second ordre inscrites à un même octaèdre indéfini, est une ligne droite, qui contient à la fois (75.) tous les centres de ces surfaces, lorsque le plan est supposé à l'infini.

Les principes établis dans le *Traité des propriétés projectives*, pour le cas des sections coniques, conduiroient à plusieurs autres théorèmes sur les systèmes de surfaces du second ordre, au moyen desquels on en déduiroit d'autres tout aussi généraux à l'aide de la théorie des polaires réciproques; de là ensuite on seroit conduit à divers corollaires intéressans et utiles qui permettroient d'aborder d'une manière purement géométrique, plusieurs des cas généraux du problème très difficile et jusqu'ici non complètement résolu, de construire une surface du second ordre assujettie à passer par des points ou à toucher des plans et des droites en nombre suffisant pour la déterminer parfaitement de grandeur et de position; mais nous ne saurions nous arrêter ici sur ces conséquences et ces théories particulières, qui d'ailleurs méritent toute l'attention des géomètres.

106. Pour donner un dernier exemple propre, par l'étendue des conséquences qui en dérivent, à montrer les avantages que peuvent offrir les principes de la théorie des polaires réciproques, nous rappellerons que les propriétés projectives des surfaces du second degré, qui ont une section plane commune, réelle ou idéale, sont les mêmes (*Traité des propriétés projectives des figures, supplément* No. 637.) que celles qui appartiennent aux systèmes de sphères quelconques, propriétés nombreuses et bien connues des géomètres. Or, si l'on applique à ces propriétés générales des surfaces du second ordre les principes qui font objet du présent paragraphe, on verra, sans peine, qu'elles se convertiront toutes en d'autres

propriétés des surfaces du second degré qui, au lieu d'avoir un plan de section commune, ont (94. et 99.) un cône enveloppe commun, ce cône pouvant d'ailleurs être imaginaire comme la section dont il s'agit, et n'ayant alors de réel que son sommet et le plan indéfini de son contact avec chaque surface individuelle, c'est-à-dire le plan polaire de ce sommet. Dans cette déformation d'ailleurs, les plans tangens communs deviennent des points communs, les sections planes deviennent des cônes enveloppes et réciproquement etc. etc.

Delà résulte donc une foule de propriétés nouvelles des surfaces du second degré assujetties à toucher un même cône, et des moyens de construire ces surfaces d'après des conditions données; enfin on voit qu'on seroit conduit pareillement aux propriétés générales des surfaces du second degré qui sont inscrites à la fois à deux cônes, ou qui se touchent suivant une courbe toute entière, réelle ou idéale, en partant simplement de celles, si bien connues, relatives aux sphères qui ont, à l'infini, une section plane commune de contact, ou qui sont concentriques (voyez l'ouvrage déjà cité No. 630.).

Mais nous laisserons là ces applications particulières, que nous nous contenterons d'avoir indiquées et qu'il seroit facile de multiplier, pour reprendre, dans le paragraphe suivant, l'exposition générale des principes de la théorie des polaires réciproques.

Des relations d'angles relatives aux figures polaires réciproques dans un plan ou dans l'espace.

107. Jusqu'ici nous nous sommes uniquement occupés des relations graphiques ou descriptives des figures, celles qui ne concernent que la direction indéfinie, l'intersection et le contact des lignes et des surfaces; il nous reste à examiner ce qui a lieu pour les relations purement métriques, ou qui n'ont trait qu'aux rapports généraux de grandeur des parties rectilignes des figures.

Pour faciliter cet examen, nous remarquerons, en premier lieu, qu'il n'est pas nécessaire, comme nous en avons agi précédemment, de prendre pour courbe ou surface auxiliaire des pôles ou polaires, une ligne ou surface quelconque du second ordre, et que, sans rien ôter à la généralité des raisonnemens et des conséquences, on peut tout aussi bien se contenter de prendre une circonférence de cercle ou une sur-

face de sphère, ce qui rend beaucoup plus simple la description des figures polaires de figures données, et l'étude de changemens qui s'opèrent dans leurs propriétés métriques par suite de cette espèce particulière de déformation.

Rappelons d'abord, en peu de mots, la relation particulière qui existe entre le pôle et la droite ou le plan polaire, dans le cas particulier dont il s'agit.

108. Puisque le pôle d'une droite située sur le plan d'un cercle est, en général (55), le sommet de l'angle circonscrit à ce cercle dont la corde de contact a pour direction indéfinie celle de cette droite, on en peut de suite conclure que, relativement à cette courbe particulière, la direction du diamètre ou du rayon qui renferme le pôle d'une droite quelconque est nécessairement perpendiculaire à cette droite; mais c'est ce qu'on pourroit aussi établir directement et sans restriction, en s'appuyant simplement sur la définition générale du pôle et de la polaire, posée art. (55.).

Maintenant, si l'on remplace le cercle par une sphère quelconque, on arrive à la même conséquence pour le pôle et le plan polaire dans l'espace; c'est-à-dire que le rayon ou le diamètre indéfini qui renferme le pôle d'un plan quelconque est perpendiculaire à ce plan.

Ce théorème se déduirait d'ailleurs du précédent, en considérant ce qui se passe dans les différens plans qui renferment à la fois le pôle et le centre de la sphère.

Le cas de l'espace donne encore lieu à la considération des droites réciproques polaires (77.); or il est également facile de reconnaître que, pour le cas de la sphère, le plan diamétral qui contient l'une de ces droites est perpendiculaire à l'autre; de sorte qu'il existe un diamètre de cette sphère dont la direction est perpendiculaire à la fois sur ces droites, et qui se trouve divisé harmoniquement aux deux points où il les rencontre. Il seroit d'ailleurs inutile de rappeler ici les autres relations descriptives qui appartiennent aux polaires réciproques, et qui ont été exposées aux Nos. 77. et suiv.

109. Ces préliminaires étant établis, nous considérerons d'abord les relations de réciprocité qui peuvent avoir lieu entre les ouvertures d'angles dans la figure proposée et dans celle qui en est la po-

laire réciproque à l'égard d'un cercle ou d'une sphère auxiliaire quelconque.

Soit ABC (Fig. 23.) un angle quelconque situé sur le plan d'un cercle (S) de rayon arbitraire et dont le centre est S . Soient A' et C' les pôles respectifs des côtés AB et BC de cet angle; les rayons indéfinis SA' et SC' seront donc perpendiculaires à ces côtés, et l'angle en S ou $A'SC'$ sera supplément de l'angle en B , qui comprend le centre S entre ses côtés, ou est égal à celui des angles en B qui, au contraire, ne comprend pas le centre S entre ses côtés; ces angles auront donc, dans tous les cas, mêmes sinus. Quant à la polaire du sommet B , elle devra passer par les pôles A' et C' ; ce sera par conséquent la droite $A'C'$ qui, soutendant l'angle au centre S ou $A'SC$, est perpendiculaire à celle SB qui joint ce centre au sommet B .

Si maintenant nous remplaçons le cercle (S) par une sphère, et les droites AB et BC par des plans quelconques, il arrivera pareille chose à l'égard des pôles A' et C' de ces plans, si ce n'est que la droite $A'C'$ qui les joint, sera la polaire même de l'arête B , commune à ces plans ou à l'angle qu'ils forment.

Dans le cas actuel d'une sphère (S), on peut aussi avoir à considérer, au lieu de deux plans, deux droites AB , BC se rencontrant en B , et formant par conséquent un angle plan; alors les choses se passeront un peu différemment; car les réciproques de ces droites ne seront plus des points, mais des droites $A'B'$, $C'B'$ situées elles-mêmes dans un plan (78.) polaire au sommet B , et dont l'intersection B' sera, à son tour, le pôle du plan ABC . Néanmoins les plans $SA'B'$, $SB'C'$, qui contiennent respectivement ces polaires et le centre de la sphère, étant (108.) perpendiculaires aux droites AB et BC , formeront encore entr'eux un angle supplément de celui ABC de ces droites, qui est tourné vers le centre S ; proposition qui aura même lieu pour deux droites quelconques dans l'espace, c'est-à-dire qui ne se rencontreroient pas, et pour les polaires réciproques qui appartiennent à ces droites.

Quant à l'angle $A'B'C'$ formé par les polaires, il n'a aucun rapport déterminé avec l'angle ABC ; en effet, d'après ce qui précède, il est le supplément de l'angle formé par les deux plans SAB , SBC qui contiennent le centre de la sphère ainsi que les droites AB , BC et qui sont perpendiculaires aux réciproques $A'B'$, $B'C'$ de ces droites; or cet

angle dépend, comme on voit, non seulement de l'ouverture absolue de l'angle ABC , mais encore de sa position à l'égard du centre S de la surface auxiliaire.

Enfin on peut avoir à considérer, dans le cas de l'espace, l'angle formé par un plan AB avec une droite BC ; alors la direction du rayon SA qui renferme le pôle A' de ce plan, et la direction du plan diamétral $SB'C'$ qui renferme la polaire $B'C'$ de cette droite, formeront encore un angle égal à celui des deux angles en B , dont le côté et l'èdre, ou la face, ne comprennent pas entr'eux le centre S , ou mieux ne sont pas dirigés vers ce centre.

En général, pour énoncer d'une manière simple les résultats qui précèdent et qui puisse les faire graver aisément dans la mémoire, on peut dire, que „l'angle de deux droites, ou de deux plans, ou d'un plan et d'une droite quelconques situés dans l'espace, est supplément de celui sous lequel on voit leurs pôles ou polaires réciproques du centre de la sphère, prise pour auxiliaire, ou est égal à ce même angle, selon que ce dernier comprend ou ne comprend pas ce centre entre ses èdres ou côtés.”

110. D'après cela on voit que, „si deux figures quelconques sont polaires réciproques à l'égard d'un cercle ou d'une sphère, et qu'il existe entre les ouvertures d'angles de l'une une certaine relation donnée, on pourra, de suite, en conclure une relation semblable entre les angles formés, autour du centre de la sphère ou du cercle auxiliaire, par les diamètres ou plans diamétraux dont la direction contient les pôles ou polaires des côtés et des èdres des premiers angles.” Et réciproquement, „si l'on connoissoit une telle relation d'angles au centre pour l'une des figures, on seroit en état d'en conclure, de suite, une autre semblable entre les angles mêmes des plans et des droites de la réciproque polaire.”

Considérons, par exemple, un polygone équiangle sur un plan, son polaire réciproque (60.) par rapport à un cercle quelconque, sera tel que les droites ou rayons dirigés vers ses différens sommets, feront des angles consécutifs égaux entr'eux, pourvu qu'on les prolonge indéfiniment; ces angles d'ailleurs seront ceux sous lesquels on voit les différens côtés du polygone polaire, du centre du cercle directeur.

Considérons encore un angle solide dont les angles dièdres soient égaux entr'eux, le polygone plan qui est (81.) son polaire récipro-

que, jouira de la même propriété que ci-dessus relativement au centre de la sphère prise pour auxiliaire; et si, de plus, les angles plans du solide proposé étoient tous égaux entr'eux, non seulement les angles au centre, plans, sous lesquels on voit les différens côtés du polygone réciproque, seroient égaux entre-eux; mais il en seroit encore de même des angles dièdres sous lesquels on voit les angles au périmètre de ce polygone.

111. Ces remarques s'étendroient aisément à un polyèdre équi-angle et à son polaire réciproque, en observant que les différens angles solides du premier ont, pour réciproques, les polygones plans du second et vice versa. En général, on traduira d'une manière semblable toutes les relations d'angles qui pourroient avoir lieu dans l'un de ces polyèdres; car si l'on considère, par exemple, un des angles solides qui le composent, le centre de la sphère auxiliaire étant compris dans l'intérieur de cet angle, il sera aisé de voir d'après ce qui précède (109.), qu'en menant de ce centre des droites vers les sommets du polygone polaire de l'angle solide proposé, on formera un nouveau solide dont les angles plans seront supplémens des angles dièdres respectifs du premier, et dont les angles dièdres seront, à leur tour, supplémens des angles plans de ce premier solide; de sorte que le nouveau et l'ancien angle solide seront proprement ce que les géomètres sont convenus d'appeler des angles solides supplémentaires.

La même chose ayant lieu entre les divers angles solides et les divers polygones plans des deux polyèdres réciproques, on voit quelle espèce de relation subsistera, en général, entre les angles propres de l'un et les angles au centre qui appartiennent à l'autre. Mais, sans nous arrêter aux conséquences qu'on pourrait déduire de là pour les polyèdres en général et pour certains polyèdres en particulier, nous allons donner quelques exemples simples et faciles qui montreront l'importance et l'utilité des remarques ci-dessus (109.), en même tems qu'elles serviront à en faire connoître l'esprit dans les applications à des propriétés données.

112. Supposons, en premier lieu, que la figure étant tout entière comprise dans le plan du cercle auxiliaire (S) (Fig. 23.), on considère un angle quelconque ABC , constant de grandeur et dont les côtés soient assujettis à se mouvoir autour de deux points quelconques A , C de leurs directions; les pôles A' et C' des côtés de cet angle devront

aussi rester sur les polaires $A'B'$, $A'C'$ des points fixes A et C' , et l'angle au centre $A'SC'$ sera constant comme supplément de l'angle en B . A l'inverse, un point quelconque S et deux droites fixes $A'B'$, $A'C'$ étant donnés sur un plan, aussi bien qu'un angle constant $A'SC'$ mobile autour du point S , la figure polaire de ce système à l'égard d'un cercle quelconque dont le centre est en S , sera précisément composée d'un angle constant ABC mobile autour de points fixes A et C , comme celle d'où nous sommes partis. Mais le sommet B d'un tel angle se meut toujours sur un cercle passant par les points fixes A et C ; donc la polaire $A'C'$ qui soutient l'angle $A'SC'$ roule ou glisse, de son côté, sur une section conique tangente aux droites fixes $A'B'$, $A'C'$; ce qui donne lieu au théorème que nous avons fait connaître No. 472. du Traité des propriétés projectives.

113. Si l'angle constant ABC , au lieu de pivoter autour des points fixes A , C , demeurerait perpétuellement circonscrit à une section conique quelconque, on voit que la corde $A'C'$, polaire de son sommet, demeurerait au contraire sans cesse inscrite (63.) à une autre section conique, en soutendant un angle constant $A'SC'$ mobile autour du point S . Et réciproquement, on peut toujours regarder le système d'une section conique et d'un angle constant $A'SC'$ mobile autour d'un point quelconque S de son plan, pris pour sommet, comme le réciproque polaire du premier système. Toutes les fois donc que le sommet B décrira une section conique, la corde inscrite $A'C'$ roulera pareillement sur une autre section conique: or c'est ce qui aura lieu, en particulier, lorsque l'angle B ou son supplément S sera droit: ainsi les théorèmes des Nos 487. et 488. de l'ouvrage déjà cité sont réciproques l'un de l'autre.

Maintenant on remarquera que, quand la courbe à laquelle est circonscrit l'angle B est une parabole, ayant par conséquent une tangente à l'infini, sa polaire réciproque, circonscrite à toutes les cordes $A'C'$, passe (71.) par le centre S du cercle auxiliaire, c'est-à-dire par le sommet de l'angle S ; et réciproquement, que si le sommet de l'angle constant et mobile S se trouve sur la courbe qui contient les extrémités des cordes $A'C'$ soutendantes de l'angle en S , la courbe sur laquelle roulera l'angle ABC sera une parabole. Mais alors le sommet B de cet angle se meut sur une section conique, qui devient une

ligne droite quand l'angle équivaut à un quadrant; donc pareillement la corde $A'C'$ roule sur une autre section conique, qui se réduit à un point, quand l'angle $A'SC'$ est droit, et par conséquent les théorèmes des N^{os} 452. et 481. de l'ouvrage cité sont les réciproques de ceux énoncés art. 482.

114. Ces considérations peuvent s'étendre à l'espace.

En effet, trois plans quelconques, formant un angle solide, auront pour réciproques polaires à l'égard d'une sphère quelconque, trois points compris dans le plan qui a pour pôle le sommet de l'angle solide, et qui, étant joints par des droites au centre de cette sphère, donneront lieu à un nouvel angle solide supplémentaire (111.) du premier. Si donc l'un de ces angles se meut en demeurant constant, il en ira de même de l'autre; et, d'après la théorie des polaires réciproques (91. et 93.), si le premier a ses faces perpétuellement tangentes à une même surface du second degré, les points ou pôles qui déterminent les arêtes du second, demeureront continuellement sur une autre surface du second degré quelconque, et vice versa, de telle sorte que le lieu des sommets du premier angle solide sera remplacé (91.) par la surface enveloppe des plans qui contiennent les trois points. Or Monge a démontré, en particulier, que, „quand trois plans rectangulaires tangens à une surface du second degré, se meuvent autour de cette surface, le sommet de l'angle trièdre rectangulaire qu'ils forment, décrit en général une sphère; donc aussi:”

Quand un angle trièdre rectangulaire est mobile sur son sommet, le plan qui joint trois quelconques des points d'intersection de ses arêtes avec une surface du second degré quelconque, ou, si l'on veut, le plan du triangle qui soutend l'angle trièdre dans cette surface, roule et glisse sur une autre surface qui est du second degré comme la première.

Quand le point qui sert de sommet commun à tous les angles trièdres rectangulaires est sur la surface proposée, on démontre directement, avec Mr. Frégier, que les plans mobiles correspondans pivotent sur un point unique; mais alors, en se reportant à la figure primitive polaire réciproque de celle dont il s'agit, on reconnaît que la surface à laquelle est sans cesse circonscrit l'angle trièdre rectangulaire, a un plan tangent à l'infini (97.) polaire du centre de la sphère auxi-

liaire ou du point qui sert de sommet à tous les angles de l'autre système; donc cette surface est alors l'un des paraboloides, et le lieu des sommets des angles trièdres rectangulaires qui lui sont circonscrit, à la place d'être une sphère comme dans le cas ci-dessus, est simplement le *plan directeur* polaire du point fixe de l'autre système; de la même manière que, pour la parabole, le lieu des sommets des angles droits circonscrits est une droite unique, directrice ordinaire ou polaire locale de cette parabole etc.

115. Sans entrer dans de plus grands détails sur les propositions qui précèdent, et sans discuter en particulier les relations qui peuvent lier entr'eux les divers objets qu'elles concernent, nous nous contenterons de remarquer, d'une manière générale, que

1) La réciproque polaire d'une circonférence de cercle, à l'égard d'un cercle quelconque de son plan pris pour auxiliaire, est une section conique ayant *pour foyer* le centre de ce dernier cercle, et pour *directrice* la polaire du centre du premier; 2) la réciproque polaire d'une sphère, à l'égard d'une autre sphère quelconque prise pour auxiliaire, est pareillement une surface du second ordre de *révolution* ayant pour *foyer principal* le centre de cette dernière sphère, et pour *plan directeur* la polaire du centre de la première: théorème dont les réciproques sont également vrais; c'est-à-dire que:

La polaire d'une section conique ou d'une surface du second ordre de révolution quelconque, qui a pour foyer le centre d'un cercle ou d'une sphère pris pour auxiliaire, est une autre sphère ou un autre cercle ayant pour centre le pôle du plan directeur ou de la directrice.

C'est, en effet, ce qu'il est aisé de reconnoître en rapprochant, par exemple, les remarques du No. 112. de cette propriété très anciennement connue des sections coniques: „l'angle sous lequel on voit, du foyer d'une section conique, la partie d'une tangente quelconque terminée aux deux tangentes qui répondent aux extrémités du grand axe de la courbe, est toujours constant et égal à un quadrant.”

116. Il suit de là, en particulier, que les diverses propriétés angulaires et descriptives dont jouissent les cercles et les

sphères peuvent se traduire immédiatement en d'autres propriétés d'angles appartenant au foyer commun des sections coniques et des surfaces du second degré de révolution, ce dont nous avons déjà montré de beaux et de nombreux exemples, chap. 1. sect. IV. du *Traité des propriétés projectives*.

Remarquons, en outre, que puisqu'un système quelconque de cercles tracés dans un plan, ou un système quelconque de sphères dans l'espace, a toujours, à l'infini, soit une sécante, soit une section plane idéale commune (même ouvrage, sect. I. et supplément), les lignes et les surfaces du second ordre qui en sont les polaires réciproques par rapport à un autre cercle ou à une autre sphère pris pour auxiliaires, auront aussi idéalement (106.) pour points de concours des tangentes communes, ou pour sommet de cône enveloppe commun, le centre qui sert à la fois de foyer à tout leur système; de sorte qu'elles jouiront entr'elles, sous ce rapport, de propriétés descriptives analogues à celles qui appartiennent aux systèmes de cercles ou de sphères qui ont un centre de similitude commun ou plus généralement aux systèmes de lignes et de surfaces du second ordre, qui ont un centre d'homologie commun ou sont la projection, la perspective en relief, les uns des autres *).

De là résulteroit donc une foule de propositions et de rapprochemens curieux; mais nous ne saurions insister sur ces conséquences particulières et faciles, sans nous écarter du but général que nous cherchons à atteindre; c'est pourquoi nous allons passer à un dernier exemple relatif aux propriétés d'angles des figures dans l'espace.

117. MM. Hachette et J. Binet ont démontré, pag. 71. du II^e volume de la *Correspondance polytechnique*, que, „si, entre deux droites fixes quelconques, on fait mouvoir deux plans rectangulaires, la surface engendrée par la droite intersection de ces plans, est une hyperboloïde à une nappe ou surface gauche quelconque du second degré.” Appliquant donc à cet énoncé les principes exposés plus haut (109.), on sera immédiatement conduit à cet autre théorème qu'on peut regarder comme le réciproque du premier:

Deux droites étant situées à volonté dans l'espace, si,

*) *Traité des propriétés projectives*, [sect. III. chap. 1., sect. IV. chap. 1. et supplément.

entre ces droites on fait mouvoir un angle droit dont le sommet soit en un point fixe de l'espace, et dont les côtés s'appuient respectivement sur ces droites, la suite de celles qui appartiennent à la fois aux paires de points de rencontre des droites fixes et des côtés de l'angle mobile, sera une surface gauche (92.) du second ordre, ou une hyperboloïde à une nappe.

118. En général on voit qu'il n'est, en quelque sorte, aucune propriété concernant les angles constans d'une certaine figure située dans l'espace ou dans un plan, de laquelle on n'en puisse déduire, à l'aide des principes qui précèdent, une autre toute aussi générale, quoiqu'essentiellement distincte de la proposée.

Parmi les diverses relations d'angles qui peuvent appartenir aux figures, et qui sont remarquables autant par leur utilité propre que par leur généralité, je me contenterai de citer celles qui concernent les normales, les développées et les lignes de courbure des courbes et des surfaces, qu'il seroit aisé de transformer, à l'aide de la théorie des polaires réciproques, en d'autres également générales quoique, sans contredit, d'un bien moindre intérêt. Je citerai encore la description organique par le moyen d'angles constans, que Newton a donnée pour les lignes du second degré, enfin toute la Géométrie organique du célèbre Mac-Laurin, fondée sur ce théorème de Newton, aussi bien que les recherches postérieures du même géomètre, imprimées dans les Transactions philosophiques de la Société royale de Londres pour 1735. Ces diverses propositions nous conduiroient, sur le champ, à d'autres entièrement nouvelles, et où, au lieu de décrire les courbes par le mouvement de certains points mobiles, on les construiroit par l'enveloppe de leurs tangentes etc. etc. Mais encore une fois, nous ne saurions nous arrêter à ces corollaires faciles de la théorie des polaires réciproques, et il doit nous suffire d'avoir montré, par quelques exemples simples, la nature et l'étendue des applications qu'on en peut faire.

119. Au surplus, tout ce qui précède ne concerne uniquement que les relations d'angles d'ouverture donnée et constante, mais il est évident qu'on peut traduire, d'une manière semblable, celles qui concerneroient des angles variables quelconques et dont on connoîtroit la

loi en fonction des lignes trigonométriques; car, à l'aide des principes établis au No. 109. et suivans, on pourra toujours traduire ces relations en d'autres concernant des angles supplémens des premiers, et qui auront pour sommet commun un point quelconque de l'espace, pris pour centre du cercle ou de la sphère auxiliaire.

Par exemple, si, au lieu des normales d'une surface ou d'une courbe quelconque, on considère des systèmes de droites ou de plans formant entr'eux et avec une courbe ou une surface donnée, des angles quelconques dont les sinus seroient assujettis à une loi déterminée, les réciproques de ces droites, à l'égard d'un cercle ou d'une sphère auxiliaire choisis à volonté, seront comprises (109.) dans des plans passant par le centre de cette sphère, et formant respectivement des angles dont les sinus devront avoir entr'eux précisément la relation donnée entre les premiers. Ainsi par exemple, les propriétés générales des faisceaux de droites réfléchies ou réfractées pourront se traduire immédiatement en d'autres d'une espèce toute différente et qui, sans être par elles-mêmes d'une égale importance, n'en seront pas moins utiles à considérer. On conçoit en effet, que la recherche des relations qui appartiennent à ce système dérivé, pourra, dans certains cas particuliers, être plus simple et plus facile, que pour la figure primitive elle-même. Nous n'en dirons pas d'avantage sur ce sujet, attendu que nous aurons occasion, dans le paragraphe suivant, de considérer une classe très étendue de relations entre les sinus des angles, et de démontrer ainsi, d'une manière plus particulière, le parti avantageux que l'on peut tirer des principes qui viennent d'être mis en avant dans ce qui précède.

Des relations projectives entre les lignes trigonométriques et les distances des figures polaires réciproques dans un plan.

120. Nous avons vu (58.) qu'un faisceau quelconque de droites $VA, VB, VC, \dots VF$ (Fig. 24.) convergeant en un même point V sur un plan, et qu'on peut appeler simplement faisceau projetant, avoit pour réciproque, par rapport à une section conique quelconque (S) prise pour auxiliaire, un système pareil de points $A', B', C', \dots F'$, rangés sur une même droite, et vice versa; donc, si l'on suppose, en particu-

lier, que (S) soit un cercle, toute relation existante entre les sinus des angles projetans formés autour du point V , aura lieu également (110.) entre les sinus des angles formés par les droites ou rayons vecteurs qui, du centre S , projettent les pôles respectifs de ces droites, c'est-à-dire entre les angles projetans des distances, rangées sur $D'E'$, qui ont pour extrémités respectives les pôles des côtés des premiers angles; et réciproquement toute relation entre les sinus des angles au centre S , aura lieu pareillement entre ceux des angles correspondans formés autour du pôle V de $D'E'$.

Cela posé, admettons qu'entre les distances des points donnés A' , B' , C' , ... F' , il existe une ou plusieurs relations métriques projectives, de la nature de celles que nous avons définies art. 9. et suiv. du *Traité des propriétés projectives*, et qui ont été rappelées au No. 18. du précédent *Mémoire*; la même relation aura donc lieu entre les sinus des angles qui projetteroient ces distances du point quelconque S ; et, par suite de ce qui précède, elle aura lieu également entre les sinus des angles du faisceau V . Donc toute droite AF , prise pour transversale de ce faisceau, y déterminera des points A , B , C , ... F , qui auront entr'eux précisément la même relation projective que les points A' , B' , C' , ... F' qui leur correspondent. Et réciproquement, s'il existe entre les sinus des angles du faisceau V , ou entre les distances qui soutiennent ces angles sur la transversale arbitraire AF , une relation de la nature de celles qui précèdent, cette même relation aura lieu aussi entre les distances correspondantes des pôles A' , B' , C' , ... F' des côtés de ces angles.

121. Tout ce qui suit se rapportant essentiellement aux relations métriques qui sont de la nature de celles dont nous venons de rappeler le caractère particulier, nous nous contenterons, pour la simplicité du langage, de les designer par l'épithète générale de relations projectives; on devra se rappeler en conséquence, que, non seulement de telles propriétés subsistent à la fois pour la figure donnée et pour toutes ses projections centrales ou perspectives sur un plan quelconque; mais qu'encore ces mêmes relations devront satisfaire aux conditions prescrites dans les endroits cités; de sorte qu'elles auront lieu également entre les sinus des angles projetans des diverses distances qui y entrent, c'est-à-dire des angles dont les couples de côtés s'appuient respec-

tivement sur les extrémités de ces distances, et sur un point quelconque de l'espace, pris pour sommet ou pour centre de projection.

Pareillement, par relation projective entre les sinus d'angles d'un faisceau quelconque de droites convergeants en un même point, nous entendrons toujours parler d'une relation qui subsisteroit également entre les distances correspondantes d'une figure, sur les différens points de laquelle s'appuieroient les droites ou projetantes du faisceau, et qui seroit projective pour cette figure. Or il suit de cette définition, que, si l'on coupe un tel faisceau par un plan arbitraire, et que, dans la relation qui lui appartient, on remplace chaque sinus d'angle par la distance qui, sur le plan arbitraire, soutend cet angle, la nouvelle relation devra avoir lieu également entre toutes les distances pareilles, et sera d'ailleurs projective pour la figure à laquelle ces distances appartiennent.

En supposant qu'on voulût distinguer, de tous les autres, le faisceau de droites qui vient d'être défini en particulier, on pourroit le nommer faisceau projectif; il est visible en effet, qu'un pareil faisceau, mis en perspective, conservera toujours les mêmes propriétés (voyez le *Traité des propriétés projectives*, Nos 10. 576. et suiv.).

122. Soit maintenant une figure quelconque $AMBC \dots$ (Fig. 25.) donnée sur le plan d'un cercle (S) pris pour auxiliaire, et supposons qu'il existe entre les distances $AM, AB, BN, \dots$ de cette figure une relation métrique projective; ces propriétés seront donc telles que, si l'on mène d'un point quelconque V du plan de la figure, un faisceau de droites projetantes $VA, VM, VB, \dots$ vers les extrémités $A, M, B, \dots$ de ces diverses distances, il y aura entre les sinus des angles formés par ces droites, la même relation qu'entre les distances dont ils sont les angles projetans respectifs. Passant donc à la figure réciproque de la proposée à l'égard du cercle auxiliaire quelconque (S), et observant que les projetantes $VA, VM, VB, \dots$ ont pour pôles une suite de points $A', M', B', \dots$ rangés sur la polaire de V , et situés aux intersections respectives de cette polaire et de celles qui appartiennent aux extrémités $A, M, B, \dots$ des distances que l'on considère, on en conclura (120.) que la relation projective qui existe entre ces distances, a lieu également dans la figure réciproque, entre les distances des points ou pôles qui appartiennent à la polaire de V ; mais le point V est arbitraire; donc on peut énoncer ce théorème général, dont le réciproque est également vrai:

Une figure quelconque étant donnée sur un plan, s'il existe entre les diverses distances de ses points une relation métrique projective, la même relation existera aussi, dans la polaire réciproque de cette figure, prise par rapport à un cercle auxiliaire quelconque de son plan, entre les distances correspondantes formées sur une droite arbitraire par les intersections de cette droite avec les polaires des extrémités respectives des premières.

Et réciproquement:

S'il existe une relation pareille entre les distances des points d'intersections d'une transversale arbitraire et des diverses droites de l'une de ces figures, la même relation aura lieu aussi entre les distances de sa réciproque, qui ont pour extrémités respectives les pôles des droites dont il s'agit, pourvu toute fois qu'elle soit de la nature projective, quand on l'applique à cette réciproque.

123. Mais ce n'est pas tout encore, la relation métrique que nous supposons exister entre les droites $MA, MB, MN, \dots$ de la figure proposée ayant lieu aussi, d'après sa nature (121.), entre les sinus des angles projetans de ces distances, formés autour de S , pris en particulier pour centre de projection; et, d'un autre côté, chacun de ces angles, tel que DSC par exemple, ayant même sinus (109.) que l'angle $D'cC'$ formé par les polaires cD', cC' des extrémités D et C de la distance correspondante CD , on voit que, dans la figure réciproque de la proposée $AMBD \dots$, la relation ci-dessus entre les distances, se change en une relation pareille entre les sinus des angles formés par les polaires des extrémités de chacune d'elles; d'où ce nouveau théorème général:

S'il existe entre les distances d'une figure plane quelconque une relation métrique projective, la même relation aura lieu encore, dans la réciproque de cette figure prise par rapport à un cercle auxiliaire quelconque de son plan, entre les sinus des angles formés par les polaires des extrémités respectives de ces distances.

Et réciproquement:

S'il existe une certaine relation entre les sinus des angles de certaines droites de la figure primitive, la même

relation aura lieu aussi entre les distances de la réciproque dont les extrémités respectives sont les pôles de ces droites, pourvu que cette relation soit, de sa nature, projective quand on l'applique à cette réciproque.

124. On peut remarquer en passant, qu'attendu la nature particulière des relations que nous venons d'examiner, ces différens théorèmes auroient lieu, d'une manière analogue, dans le cas où, à la place d'un cercle, on prendroit une section conique quelconque pour directrice ou auxiliaire; car on peut toujours considérer l'un de ces systèmes comme la perspective ou projection centrale de l'autre, pourvu néanmoins que les figures auxquelles ils se rapportent, soient elles mêmes projectives de leur nature, et ne concernent par conséquent aucune grandeur constante et déterminée.

Au sur plus, je crois devoir le dire expressément, cette observation, qui s'applique également au cas de l'espace que nous aurons bientôt à examiner, n'ajoute rien à la généralité des conséquences qu'il est possible de déduire des théorèmes précédens (107.) quoique leur énoncé suppose que les figures polaires réciproques soient prises simplement par rapport à un cercle auxiliaire; les réflexions générales présentées art. 100. et suivans sont donc également applicables au cas particulier dont il s'agit.

125. Nous allons terminer l'exposition de ces principes relatifs aux figures planes, par quelques applications particulières à des propositions déjà connues, seulement pour en faire pressentir la fécondité et les rendre familiers à l'esprit du lecteur. Et d'abord nous ferons observer, d'une manière générale, que les propriétés nombreuses de la Géométrie de la règle et de la théorie des transversales peuvent toutes recevoir l'application de ces principes, de sorte qu'elles sont susceptibles d'être immédiatement traduites en d'autres également intéressantes, et dont la plupart sont encore peu connues ou même entièrement ignorées des géomètres. En effet, ces relations ou propriétés, comme nous l'avons montré ailleurs, se rapportent essentiellement à ce que nous venons d'appeler relations ou propriétés projectives; mais, pour n'en pas rester à ces assertions générales, nous allons examiner successivement quelques exemples fort simples, en abandonnant au lecteur le soin de faire de semblables applications aux autres relations de la théorie des transversales.

Soit un polygone plan quelconque coupé par une droite arbitraire prise pour transversale, chaque point d'intersection formera deux segmens sur le côté correspondant, et l'on sait que le produit de la moitié de ces segmens, qui n'ont pas d'extrémités communes, égale le produit de tous les autres segmens; or, en passant à la polaire réciproque de cette figure, on aura à considérer (61.) un nouveau polygone $ABCD...E$ (Fig. 26.), des sommets duquel on aurait mené des droites vers un point quelconque V de son plan, représentant le pôle de la transversale. Mais chaque segment du premier polygone doit être remplacé (123.) par le sinus de l'angle des polaires qui répondent à ses extrémités, c'est-à-dire (61.) par le sinus de l'angle de chaque nouveau côté AB avec l'un des rayons vecteurs AV ou BV , correspondans; donc le produit des sinus de la moitié de ces angles qui appartiennent à des sommets différens du polygone $ABCD...F$, égale le produit des sinus de tous les autres; c'est-à-dire qu'on a $\sin VAF. \sin VFE. \sin VED. \sin VDC.... \sin VBA = \sin VEA. \sin VEF. \sin VDE. \sin VCD.... \sin VAB$.

D'ailleurs le polygone dont il s'agit est quelconque, aussi bien que le polygone primitif ou son réciproque, et il en est de même encore du point V ; donc le principe qui précède est général et s'applique à toute espèce de polygones plans.

126. Le même principe a été établi, d'une autre manière, par Mr. Carnot, page 301. de la *Géométrie de position*; mais ce savant géomètre n'a pas remarqué que, si à travers le système de toutes les droites, formé tant par les côtés du polygone $ABCD...F$, que par les rayons ou projetantes qui joignent ses sommets au point V , on mène une nouvelle droite quelconque $b'e'$, prise pour transversale, la relation qui existe entre les sinus des angles ci-dessus avait également lieu entre les segmens $af', fe', ed', ...$ interceptés par ces mêmes angles ou leurs supplémens, sur cette transversale; or c'est ce qui résulte évidemment du principe de l'art. 122., appliqué au cas particulier dont il s'agit.

Cette nouvelle proposition est d'ailleurs une conséquence des remarques faites aux articles 174. et 175. du *Traité des propriétés projectives des figures*, puisque les segmens de la transversale $b'e'$ sont véritablement la projection faite, du point V , des paires de segmens formés sur les différens côtés du polygone $ABCD...F$, à compter de cette même transversale.

127. Considérons encore un triangle, des sommets duquel on auroit abaissé, par un point quelconque, des droites sur les côtés opposés; elles détermineront, sur chacun de ces derniers, deux segmens, et tous ces segmens auront entr'eux, comme on sait, une relation analogue à celle qui vient d'être définie précédemment. En passant donc à la figure réciproque, on conclura immédiatement des principes déjà cités, cette nouvelle proposition: „Un triangle ABC (Fig. 27.) étant coupé par une droite arbitraire $B'CA'$, si l'on joint chacun de ses sommets avec le point d'intersection du côté opposé, par une nouvelle droite, cette droite partagera en deux autres l'angle correspondant du triangle ou son supplément; or si l'on multiplie entr'eux les sinus de trois quelconques de ces angles qui n'appartiennent pas aux mêmes sommets, ce produit sera égal à celui des sinus des trois autres angles.”

On voit, en outre, que le système des trois droites ainsi tracées et des côtés du triangle, sera coupé par une nouvelle transversale rectiligne arbitraire ab , en six points, dont les distances auront entr'elles la même relation que les sinus des angles correspondans. Ces deux propositions s'étendraient aisément d'ailleurs à des polygones d'un nombre quelconque de côtés, au moyen du théorème de l'art. 159. du Traité des propriétés projectives.

128. Les mêmes principes, appliqués aux propositions qui font le sujet des articles 515. et 527. de cet ouvrage, et qui sont relatives aux polygones inscrits et circonscrits à des sections coniques quelconques, feroient voir que ces propositions sont réciproques entr'elles; de telle manière que, l'une d'elles étant supposée établie, l'autre s'ensuit immédiatement.

On s'assurera pareillement que les propositions des No. 29., 44. et 45. de notre précédent Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques, sont respectivement les réciproques de celles du No. 42., et des première et deuxième propositions du No. 49. etc. On pourroit même en énoncer plusieurs autres d'un genre analogue, et que nous avons négligé de faire connoître dans le Mémoire cité; mais nous nous contenterons d'indiquer ces diverses recherches comme des exercices propres à faciliter l'intelligence des principes de la théorie des polaires réciproques, et nous passerons de suite à quelques exemples entièrement neufs, concernant les sections coniques et les courbes géométriques en général.

129. Soit d'abord une section conique quelconque (Fig. 28.), coupée par un triangle abc , dont les directions (A) , (B) , (C) des côtés prolongés, sont prises pour transversales de la courbe; on aura, comme on sait, en nommant p et p' les intersections de ab avec cette courbe, q et q' celles de bc , enfin r et r' celles de ac , la relation projective suivante:

$$\frac{ap \cdot ap' \cdot bq \cdot bq' \cdot cr \cdot cr'}{bp \cdot bp' \cdot cq \cdot cq' \cdot ar \cdot ar'} = 1.$$

Si, de là, nous passons à la figure réciproque à l'égard d'un cercle pris pour auxiliaire, nous aurons à considérer (60. et 65.) un nouveau triangle ABC (Fig. 29.), dont les sommets seront les pôles respectifs des côtés du premier et vice versa, et une nouvelle section conique pour laquelle les paires de points p, p', q, q', r, r' , appartenans aux intersections de la première et des côtés du triangle abc , se seront changés en des paires de tangentes $(p), (p'); (q), (q'); (r), (r')$ issues des sommets respectifs C, A, B du triangle polaire ABC ; donc on aura (123.), d'après la relation ci-dessus, et en convenant d'exprimer par (a, p) , (a, p') etc. les angles formés respectivement par les droites (a) et (p) , (a) et (p') etc.

$$\frac{\sin(a, p) \cdot \sin(a, p') \cdot \sin(b, q) \cdot \sin(b, q') \cdot \sin(c, r) \cdot \sin(c, r')}{\sin(b, p) \cdot \sin(b, p') \cdot \sin(c, q) \cdot \sin(c, q') \cdot \sin(a, r) \cdot \sin(a, r')} = 1,$$

relation qu'on peut se contenter d'écrire ainsi pour plus de simplicité:

$$\frac{[\sin(a, p)] [\sin(b, q)] [\sin(c, r)]}{[\sin(b, p)] [\sin(c, q)] [\sin(a, r)]} = 1,$$

et qui donne lieu à cet énoncé:

Un triangle étant situé quelque part sur le plan d'une section conique quelconque, si, de ses différens sommets, on mène des paires de tangentes à la courbe, chacune d'elles divisera l'angle correspondant du triangle ou son supplément en deux autres; cela posé, si l'on forme les différens produits de sinus des paires d'angles compris entre chaque côté et les tangentes issues de l'un de ses sommets, puis qu'on multiplie entr'eux trois quelconques de ces produits relatifs à trois sommets différens du triangle, on obtiendra un résultat qui sera le même que celui qu'on auroit en multipliant entre-eux les trois autres produits restans.

Ajoutons (122.) que, si l'on trace à volonté une transversale rectiligne br' à travers le système de toutes ces tangentes et des trois côtés du triangle ABC , et qu'on nomme respectivement a, b, c ses intersections

avec les côtés (a) , (b) , (c) ; p , p' ses intersections avec les tangentes (p) , (p') , et ainsi de suite, on aura également la nouvelle relation,

$$\frac{ap \cdot ap'}{bp \cdot bp'} \cdot \frac{bq \cdot bq'}{cq \cdot cq'} \cdot \frac{cr \cdot cr'}{ar \cdot ar'} = 1,$$

entièrement analogue à celle d'où nous sommes partis, et qui est relative au triangle transversal abc de la figure 28.

130. Maintenant si l'on observe que cette dernière relation, mise pour abrégé sous la forme

$$\frac{(ap) \cdot (bq) \cdot (cr)}{(bq) \cdot (cq) \cdot (ar)} = 1,$$

s'applique ou s'étend à une courbe quelconque du degré m prise pour transversale du triangle abc (Fig. 28.), on en conclura facilement (101.), que les propositions inverses qui précèdent, auront lieu également pour un triangle quelconque ABC (Fig. 29.) tracé sur le plan d'une telle courbe, et pour les trois groupes de $m(m-1)$ tangentes issues des sommets de ce triangle; tout consistera simplement à étendre, d'une manière convenable, la signification des produits de segmens et de sinus compris dans chaque parenthèse tels que (ap) , $[\sin(a, p)]$, de la même manière qu'on l'a fait pour le cas simple d'une section conique.

Enfin, puisque la proposition du triangle transversal, d'où nous sommes partis précédemment, s'étend à un polygone d'un nombre de côtés quelconque, il en est de même aussi des propositions inverses que nous en avons déduites à l'aide de la théorie des polaires réciproques.

Nous terminerons ici ces exemples, qu'il seroit facile de multiplier, pour reprendre, dans le paragraphe suivant, la théorie que nous n'avons encore exposée que pour le cas où les figures sont dans un même plan.

Des relations projectives entre les lignes trigonométriques et les distances des figures polaires réciproques dans l'espace.

131. Prenons toujours une surface sphérique dont S (Fig. 24.) est le centre, pour servir d'auxiliaire ou de directrice aux pôles et polaires; et considérons, en premier lieu, une suite de plans VA , VB , VC , ... passant par une même droite V ; leurs pôles respectifs A' , B' , C' , ... seront, comme on sait (77.), situés sur une même droite $D'E'$ polaire de V ; et, si l'on joint chacun de ces pôles avec le centre S de

la sphère auxiliaire, par des droites ou rayons vecteurs, les angles appartenant à ce faisceau de droites, auront mêmes sinus (109.) que les angles correspondans du système de plans convergens $VA, VB, VC, \dots$; si donc (121.) il existe une certaine relation projective entre les sinus des premiers, elle aura lieu également entre ceux des seconds et vice versa. Mais d'après sa nature particulière, une telle relation ne sauroit avoir lieu entre les sinus des angles du faisceau $SA', SB', SC', \dots$, sans avoir lieu également entre les distances correspondantes qui séparent les points ou pôles $A', B', C', \dots$ de la droite $D'E'$, et vice versa, donc :

S'il existe une relation métrique projective entre les distances de points quelconques rangés en ligne droite, elle aura lieu, de même, entre les sinus des angles correspondans des plans polaires de ces points.

Et réciproquement :

S'il existe une pareille relation entre les sinus des angles d'un système de plans passant par une même droite, la même relation aura lieu aussi entre les distances correspondantes des pôles de ces plans rangés en ligne droite.

132. On remarquera à ce sujet que, d'après la nature particulière des propriétés métriques projectives (121.), „plusieurs points $A, B, C, \dots F$, rangés sur une même droite, ne sauroient avoir entr'eux une telle relation, sans que cette relation n'eût lieu également entre les sinus des angles correspondans formés par les plans $VA, VB, VC, \dots$ qui passeroient par ces points respectifs et par une droite quelconque V ,” et réciproquement que, „si elle a lieu pour les sinus de tels plans, elle aura lieu également pour les distances comprises, entre ces plans, sur une transversale quelconque AF .”

Plus généralement encore, „si une relation métrique projective a lieu entre les distances appartenants aux points d'une figure quelconque $ABMCN \dots$ (Fig. 25.) située dans l'espace, cette relation existera pareillement entre les sinus des angles dièdres dont les plans passeroient par leurs extrémités respectives et par une droite quelconque V .” En effet, si l'on fait la projection orthogonale de toute la figure sur un plan perpendiculaire à l'arête commune V , cette même relation aura lieu, soit entre les distances simples de la projection, soit entre les sinus des angles

qui mesurent, sur le nouveau plan, les angles du faisceau de plans que l'on considère dans l'espace.

Quant à la proposition réciproque, elle ne peut avoir lieu (121.) qu'autant que la relation qu'on supposeroit exister entre les sinus des plans convergens, transportée aux distances de la figure correspondante, rempliroit, pour cette figure, les conditions assignées aux relations métriques projectives que nous considérons en particulier.

D'après les raisons déjà spécifiées à la fin du No. 121., on pourra pour plus de simplicité, désigner un système de plans, tels que celui qui vient d'être défini, par l'épithète de faisceau projectif.

133. Concevons maintenant que les plans $VA, VB, VC, \dots$ (Fig. 24.), au lieu de passer par une même droite, comme précédemment, soient seulement assujettis à avoir un point commun V ; leurs pôles $A', B', C', \dots$ cesseront d'être en ligne droite et seront simplement (76.) placés dans le plan $D'E'$ polaire de V ; quant aux rayons ou projetantes $SA', SB', SC', \dots$, les sinus de leurs angles seront toujours égaux à ceux des plans qui passent par V et leur correspondent respectivement. Mais, lorsqu'il existe entre les distances d'une figure plane $A'B'C'D' \dots$ une relation projective de la nature de celle que nous avons envisagées jusqu'à présent, elle doit aussi avoir lieu (121.) entre les sinus des angles projetans de ces distances, formés autour d'un point quelconque S , pris pour centre de projection, et réciproquement; donc une semblable relation ne sauroit avoir lieu, soit entre les angles dièdres des plans V , soit entre les angles plans des rayons S qui joignent leurs pôles au centre S , soit enfin entre les distances correspondantes de ces différens pôles, sans qu'elle n'eût lieu, de la même manière, pour les deux autres systèmes; principe qu'on peut énoncer ainsi:

S'il existe entre les distances des points d'une figure plane quelconque $D'E'$, une relation métrique projective, la même relation aura lieu aussi entre les sinus des angles dièdres formés par les plans polaires respectifs de ces points, plans qui convergent en un même point V .

Et réciproquement:

S'il existe une certaine relation entre les sinus des angles dièdres d'un faisceau V de plans convergens en un même point, elle aura lieu également entre les distances

des paires de points qui sont les pôles de ces plans; pourvu toute fois qu'elle satisfasse aux conditions de projectibilité (121.) dans la nouvelle figure.

134. Supposons, en outre, que, d'une droite quelconque X , on dirige des plans vers tous les points $A', B', C', \dots$ du plan $D'E'$; la relation projective qui est censée avoir lieu entre les distances de ces points, aura lieu également entre les sinus des angles dièdres qui comprennent leurs extrémités respectives (132.); donc les pôles de ces plans, rangés sur une droite AF polaire de X , et situés à la rencontre de cette droite et des plans $VA, VB, \dots$, seront tels (131.) qu'il existera, entre leurs distances mutuelles, la même relation projective qu'entre les sinus des angles dièdres des plans qui en renferment les extrémités, ou qu'entre les distances de la figure plane $A', B', C', \dots$; c'est-à-dire que

Le système des plans qui convergent en V est tel que toute droite AF , prise pour transversale, y détermine des points dont les distances respectives ont, entr'elles, la même relation projective que celle qui existe entre les sinus des angles dièdres correspondans.

La réciproque de cette proposition s'établirait de la même manière: c'est-à-dire que,

Si un faisceau de plans, convergent en un même point V , est tel que toute droite, prise pour transversale, y détermine un système de points jouissant d'une relation projective, la même relation aura lieu aussi entre les sinus des angles dièdres correspondans.

N'oublions pas toute fois que cette dernière relation doit satisfaire aux conditions de projectibilité, dans la figure formée par le système des pôles des plans, ainsi qu'il a été spécifié expressément à la fin de l'art. 133.

Par les raisons déjà déduites également dans le No. 121., pour les simples faisceaux de lignes droites, on pourrait nommer le faisceau de plans dont il s'agit, faisceau projectif, et la relation de sinus qui lui appartient, relation projective.

Enfin, si l'on coupe un tel faisceau de plans par un dernier plan arbitraire, il en résultera un système de lignes droites jouissant évidemment de la même propriété que ce faisceau à l'égard d'une transversale rectiligne quelconque: or un tel système de droites est très remarquable

en général, et nous avons déjà eu l'occasion d'en étudier les propriétés réciproques aux Nos 122. et 123.

135. Au lieu d'un système de plans $VA, VB, VC, \dots$ (Fig. 24.), considérons maintenant un système de droites convergens en un point unique V de l'espace, et représentées par les mêmes lettres; les polaires réciproques $A', B', C, \dots$ de ces droites seront situées (78.) dans un plan unique $D'E'$, polaire de V . Cela posé, admettons que le faisceau des droites V soit un faisceau projectif (121.); en le coupant par un plan arbitraire AF , il en résultera un certain nombre des points dont les distances respectives auront entr'elles la relation métrique projective qui appartient aux sinus des angles de ce faisceau. Mais en passant à la figure $A', B', C', \dots$ polaire réciproque de celle dont il s'agit, à l'égard de la sphère (S), le plan AF sera remplacé par un point X pôle de ce plan, et ses différentes intersections $A, B, C, \dots$, avec les droites du faisceau, le seront par des plans passant par le point X et les différentes droites $A', B', C', \dots$ réciproques de celles VA, AB, VC du même faisceau; donc, d'après les théorèmes ci-dessus (133.), les relations projectives qui ont lieu entre les sinus des angles de ces dernières droites appartiendront aux angles dièdres correspondans des plans $XA', XB', XC', \dots$ qui, du point arbitraire X , projettent les droites réciproques $A', B', C, \dots$ de celles là.

Ainsi le faisceau X des plans projetans sera analogue à celui qui a été défini ci-dessus (134.); il devra donc aussi jouir des mêmes propriétés; et, par exemple, „si on le coupe par une droite transversale arbitraire, il existera entre les distances respectives des points d'intersection, les mêmes relations projectives qu'entre les sinus des angles dièdres qui comprennent ces distances par leurs extrémités;” c'est ce que, au surplus, on pourroit établir directement à l'aide de la théorie de polaires réciproques, et par l'examen de ce qui se passe dans le faisceau primitif des projetantes V . Remarquons seulement que si, dans le plan des droites $A', B', C', \dots$, on trace une autre transversale rectiligne, les points où elle ira rencontrer ces droites devront jouir de la propriété dont il s'agit: en effet tout revient évidemment à prouver (131. et 77.) que si, „d'une droite arbitraire passant par le sommet du faisceau V , on mène des plans vers les différentes droites de ce faisceau, les sinus des angles de ces plans auront entr'eux les mêmes relations projectives que ceux

des angles formés respectivement par ces droites;” „or c'est ce qui a nécessairement lieu (132.) puisque ces plans et ces droites s'appuient sur les différens points d'une figure $A, B, C, \dots$ dont les distances ont entr'elles, par hypothèse, les relations projectives dont il s'agit. Concluons donc de tout ce qui précède, que,

Etant donné, dans l'espace, un faisceau projectif de droites convergens en un même point, c'est-à-dire (121.) qui s'appuient sur les différens points d'une figure jouissant d'une certaine relation métrique projective, 1) la même relation aura lieu entre les sinus des angles correspondans des faisceaux; 2) le système *plan* des polaires réciproques des droites qui le composent, sera tel qu'en le coupant par une droite arbitraire, les distances respectives des intersections auront entr'elles la relation projective dont il s'agit; 3) si, d'un point quelconque de l'espace, on mène des plans vers ces mêmes polaires, les sinus de leurs angles auront encore entr'eux la même relation.

Il est d'ailleurs entendu que, dans ces diverses figures et relations, on a soin de prendre toujours les angles et les distances qui se correspondent directement. Quant à la proposition réciproque, elle est assez évidente par elle-même pour qu'il soit superflu de l'énoncer.

136. On tire, de ce qui précède, une nouvelle propriété du système de droites que nous avons considéré (art. 134.), laquelle peut s'énoncer ainsi:

Quand un système de droites quelconques $A', B', C', \dots$ situées dans un plan, est tel qu'en le projetant d'un certain point X de l'espace, par de nouveaux plans, les angles dièdres qu'ils forment ont entre leurs sinus une certaine relation métrique projective (134.). La même relation a lieu également pour tout autre faisceau de plans projetans, déterminés par un point quelconque de l'espace.

J'ajouterai pour dernière remarque que, quand les droites du faisceau V sont dans un même plan, non seulement il en est ainsi de leurs réciproques $A', B', C', \dots$, mais qu'encore celles-ci concourent également en un point unique, pôle du plan des premières; de plus, il est visible que les relations projectives de l'un de ces faisceaux appartiennent

dront aussi à l'autre, en sorte qu'ils seront parfaitement réciproques entr'eux.

137. Ces préliminaires nous mettent en état d'aborder directement le cas général où l'on a à considérer des relations métriques projectives appartenants à une figure quelconque dans l'espace, ou à la polaire réciproque à l'égard d'une sphère prise à volonté pour auxiliaire.

Soit en effet $A, M, B, N, C, \dots$ (Fig. 25.) le système des points proposés, S le centre de la sphère prise pour auxiliaire; supposons qu'il existe une certaine relation métrique projective entre les distances $AM, MB; \dots CP, PD$, appartenant à ces points; par un raisonnement analogue à celui du No. 123. et qu'il est inutile de reproduire, on conclura que la même relation devra avoir lieu entre les sinus des angles dièdres correspondans des plans $aA', aM', \dots cP', cC'$ polaires des extrémités de ces distances respectives. On pourra donc énoncer, pour le cas de l'espace, ce théorème entièrement analogue à celui de l'endroit cité:

S'il existe entre les diverses distances d'une figure donnée dans l'espace, une relation métrique projective, la même relation aura lieu également entre les sinus des angles dièdres formés par les plans polaires des extrémités respectives de ces distances, par rapport à une sphère auxiliaire quelconque.

Et réciproquement:

S'il existe une certaine relation entre les sinus des angles dièdres des plans d'une figure quelconque, la même relation aura lieu aussi entre les distances de la réciproque, dont les extrémités respectives sont les pôles de ces paires de plans; pourvu que cette relation soit, de sa nature, projective quand on l'applique à cette réciproque.

138. Supposons maintenant que, d'une droite quelconque V de l'espace, on mène des plans vers les différens points de la figure $AMBC \dots$ considérée ci-dessus, le faisceau de ces plans sera projectif (132.) puisque, par hypothèse, les distances de cette figure ont entr'elles une relation projective; donc on conclura immédiatement ce théorème du principe de l'art. 131., en observant que les plans $VA, VB, VM, \dots$ dont il s'agit et qui renferment les différens points de la figure proposée,

ont leurs pôles situés à la rencontre de la polaire de la droite quelconque V et des plans polaires des points respectifs $A, B, M, \dots$:

S'il existe, entre les diverses distances d'une figure donnée dans l'espace, une relation métrique projective, la même relation existera pareillement dans la figure réciproque, entre les distances correspondantes formées, sur une droite arbitraire, par les intersections de cette droite avec les plans polaires des extrémités respectives des premières distances.

Et réciproquement:

S'il existe une semblable relation entre les distances des points d'intersection d'une droite arbitraire et des divers plans d'une figure donnée dans l'espace, la même relation aura lieu aussi entre les distances de la figure réciproque, qui ont pour extrémités respectives les pôles des plans dont il s'agit; pourvu toute fois (132.) que cette relation soit, de sa nature, projective quand on l'applique à cette réciproque.

Autrement en effet, la relation auroit simplement lieu (131.) entre les sinus des angles dièdres formés par un faisceau de plans menés, d'une droite arbitraire, vers les différens points de cette même réciproque.

139. Les principes des N^{os} 133., 134. et suivans, concernant les faisceaux de droites et de plans, conduisent à plusieurs autres théorèmes analogues relatifs aux figures polaires dans l'espace; mais il seroit superflu de s'y arrêter, vu qu'ils sont faciles à deviner et à saisir, lorsqu'on s'est bien pénétré de ces principes, et en général de ceux qui appartiennent à la théorie des polaires réciproques dans l'espace.

Au surplus, dans les applications de ces divers principes à des figures données, il ne faudra pas dédaigner la remarque suivante, très propre à faciliter les moyens de traduire les énoncés des relations qui leurs sont applicables.

„Ayant marqué à l'ordinaire, par des lettres quelconques les différens points de la figure proposée, on en placera d'autres entièrement différentes sur les droites, les plans, les lignes et les surfaces qui y entrent, c'est-à-dire que chacune de ces lignes et surfaces se trouvera représentée par une lettre distincte dans la figure proposée.”

„Cela fait, on affectera des mêmes lettres les points, les plans, les droites, les lignes et les surfaces de la figure polaire, qui sont respectivement réciproques de ceux de la figure primitive; on n'aura plus alors qu'à remplacer, dans les relations métriques qui leur appartiennent respectivement, chaque distance qui y entre par le sinus de l'angle des deux droites ou des deux plans représentés par les lettres de ses extrémités; et réciproquement à remplacer chaque sinus d'angle par la distance des deux points représentés par les lettres qui désignent ses êdres ou côtés: par exemple, les distances ab , bc se changeront en $\sin(a, b)$, $\sin(b, c)$ et vice versa etc.” Du reste, pour éviter la confusion, on pourra mettre entre parenthèses les lettres qui appartiennent aux lignes et aux surfaces, en réservant les lettres simples pour les points.”

140. On a déjà eu occasion de voir, à la fin du paragraphe précédent (129.), l'usage que l'on peut faire de cette notation très simple, et les avantages qui en résultent pour la traduction des relations métriques des figures qui sont polaires réciproques sur le plan d'un cercle pris pour auxiliaire. Les considérations et les principes qui précèdent mettent en état d'étendre les conséquences auxquelles nous sommes parvenus alors, au cas où les figures que l'on considère sont situées dans l'espace, et où les courbes sont remplacées par des surfaces quelconques du même ordre: c'est à indiquer rapidement quelques unes de ces applications particulières, que je vais consacrer les dernières pages de ce Mémoire, afin de ne pas m'écarter de la marche que j'ai constamment suivie jusqu'à présent.

Sans m'occuper d'ailleurs du cas, en quelque sorte élémentaire, des figures rectilignes et polyédrales dans l'espace, coupées simplement par des droites ou de plans arbitraires, lequel conduiroit, sans peine, à plusieurs propositions intéressantes et que je dois me borner à recommander à l'attention des géomètres, je ferai de suite observer, d'après Carnot, que le principe (129.) du triangle et du polygone plan, coupés par une courbe géométrique du degré m , s'applique également à un polygone gauche coupé par une surface géométrique du même ordre, prise pour transversale de ce polygone. Or de là résulte, pour l'espace, un principe entièrement analogue à celui de l'art. 130. est qui est tout aussi général.

141. En effet, le polygone gauche dont il s'agit, aura pour réciproque à l'égard d'une sphère, un polyèdre indéfini (81.) dont les

arêtes seront réciproques des côtés de ce polygone; de sorte que les plans tangens, menés, de ces arêtes, à la surface polaire de la proposée, auront pour pôles respectifs (77. et 91.) les intersections de celle-ci avec les côtés correspondans du polygone gauche: tout consistera donc (101., 137. et 138.) à substituer, pour le cas actuel de l'espace, un polyèdre indéfini au triangle des théorèmes énoncés en particulier (129.), pour la section conique, une surface de l'ordre m à cette section conique, les arêtes du polyèdre aux sommets du triangle, les plans tangens passant par ces arêtes respectives aux tangentes relatives à ces sommets, enfin les angles dièdres formés par chaque plan tangent et l'une des faces correspondantes du polyèdre, à l'angle formé par chaque tangente et par l'un des côtés correspondans du triangle.

L'énoncé des deux théorèmes auxquels on arrive ainsi, se simplifie un peu dans le cas où le polygone primitif se réduit à un triangle, et dans celui où il se trouve compris tout entier dans un plan; car alors le polyèdre réciproque se réduit lui-même (81.) à un angle solide trièdre ou à un angle solide d'un nombre quelconque de faces ou d'arêtes passant par un même point.

Au surplus les principes des N^{os} 133. et suivans, appliqués de même à la proposition du polygone gauche coupé par une surface quelconque de l'ordre m , conduiroient à d'autres conséquences non moins intéressantes et non moins étendues que celles qui viennent de nous occuper; mais il nous suffit, pour le moment, d'indiquer, d'une manière générale, ces corollaires faciles de la théorie des polaires réciproques.

142. Pour terminer, nous considérerons encore une courbe à double courbure quelconque de l'ordre m ; l'enveloppe des plans polaires de ses points sera (82. et 84.) une surface développable de l'ordre $m(m-1)$, à laquelle le théorème du polygone transversal demeurera applicable directement en vertu de la loi de continuité. Or tout point d'intersection d'une certaine droite avec cette développable, sera remplacé (83.) par un plan tangent de la courbe primitive, passant par la réciproque de cette droite; donc le théorème qui précède, relatif à un polyèdre indéfini, des arêtes duquel on a mené des plans tangens à une surface géométrique, subsiste également pour le cas où l'on substitue une courbe à double courbure quelconque à cette surface.

Il seroit inutile d'étendre davantage ces exemples et ces applications de nos principes, et je crois en avoir assez dit pour montrer tout le parti qu'on en peut tirer dans le besoin et pour lever toute espèce de difficultés. Je crois, en outre, avoir prouvé que le nombre des propositions de la Théorie des transversales et de la Géométrie de la règle, ou pour m'exprimer plus généralement, le nombre des relations et des propriétés projectives des figures peut, dès à présent, être doublé et même triplé, sans qu'on éprouve d'autres embarras que de modifier leur énoncé d'après des règles bien connues et bien établies.

Dans la suite de ces recherches je m'occuperai uniquement des propriétés générales des courbes et des surfaces géométriques, et j'aurai souvent occasion d'employer les principes de la théorie des polaires réciproques, et d'en montrer ainsi l'utilité et la fécondité d'une manière plus positive. Je ne doute pas d'ailleurs que les géomètres ne s'empressent d'adopter une théorie qui offre autant de ressources, et dont les principes seroient, peut-être, difficilement supplées par d'autres, dans certaines recherches générales relatives aux figures.

Post-scriptum. Il n'a paru jusqu'ici, de ce Mémoire, que l'analyse que j'en ai adressée, à la fin de 1826, à M. le rédacteur des Annales de mathématiques, et le rapport de MM. les commissaires de l'Institut, inséré, en avril dernier, dans le Bulletin des sciences de M. le Baron de Férussac. Mais, comme la matière dont il traite a fait récemment l'objet des recherches de plusieurs géomètres, je crois devoir déclarer qu'il paraît ici conforme au manuscrit déposé, en 1824, à l'académie des sciences, et qui a été paraphé, dans toutes ses parties, par M. le Baron Fourier, secrétaire perpétuel. Je crois aussi devoir prévenir que lors de la lecture que je fis, au sujet de ce Mémoire, dans la séance du 12. avril de 1824, je développai et fis ressortir plusieurs des applications générales qui s'y trouvent simplement indiquées et qui ont été depuis mentionnées dans l'analyse ci-dessus. Telles sont, en particulier, les propriétés angulaires et descriptives concernant les lignes et surfaces du second ordre que je nommai homofocales ou confocales, parcequ'elles ont un foyer commun, propriétés qui sont, en général (166.), les polaires réciproques de celles qui appartiennent

ment à un système de cercles ou de sphères quelconques situés dans un plan ou dans l'espace, et qui deviennent les réciproques de celles des cercles ou des sphères concentriques (115.), quand les lignes et les surfaces ont même polaire ou même plan polaire focal, c'est-à-dire même directrice ou même plan directeur. Je montrai, par des exemples, comment ces propriétés sont, quant aux relations de situation, entièrement analogues à celles des lignes et surfaces du second degré qui, étant inscrites dans un même angle ou dans un même cône, peuvent être envisagées comme la perspective, dans un plan ou en relief, les unes des autres, propriétés développées dans mon grand ouvrage et qui, dans le cas actuel, résultent de ce que le foyer commun est, en effet, idéalement pour toutes les surfaces, le sommet d'un tel angle ou d'une tel cône circonscrit, ou plus généralement, ce que j'ai nommé un centre de projection, un centre d'homologie *).

Parmi les propriétés particulières du foyer général des surfaces du second degré, je signalai comme les plus importantes, celles des sections planes de ces surfaces, qui, d'un tel foyer, sont vues sous l'aspect de cercles qui appartiendraient tous à une sphère ayant ce foyer pour centre, et celles qu'ont les tangentes conjuguées de ces surfaces, d'être vues, de ce même foyer, sous un angle droit formé par les plans qui contiennent ces tangentes, propriétés qui ont servi à M. Dupin (*Applications de Géométrie*, 4^{me} Mémoire, pag. 210. et suiv.) pour établir sa belle théorie des faisceaux lumineux réfléchis à leur rencontre avec une surface quelconque. Je fis voir encore „qu'un système quelconque de surfaces du second ordre, confocales, lequel peut comprendre aussi des sphères ayant le foyer commun pour centre, s'entrecoupent, deux à deux, suivant des sections coniques dont les plans concourent trois à trois en une même

*) Dans le cas particulier où les lignes et surfaces ont, en outre, même directrice et même plan directeur, c'est-à-dire même droite ou même plan polaire focal, leur système a cette droite et ce plan pour corde idéale commune ou plan idéal commun de contact, ce qui entraîne, comme j'en ai déjà fait la remarque au No. 456. du *Traité des propriétés projectives*, une foule de propriétés dont celles qui concernent simplement les sections coniques, ont été étudiées spécialement dans le dernier chapitre de la sect. III. de ce *Traité*, et qui d'ailleurs sont tout à fait analogues à celles qui appartiennent aux cercles et aux sphères concentriques, l'un de ces systèmes étant la projection ou perspective de l'autre.

droite, et quatre à quatre en un même point; que les développables circonscrites à ces surfaces, prises deux à deux, sont des cônes du second degré qui s'entrecoupent suivant des courbes du même degré et dont les sommets sont, trois par trois, en ligne droite et quatre par quatre en un même plan; que les pôles de tout plan passant par le foyer commun, pris par rapport à ces surfaces respectives, sont situés sur un même rayon vecteur perpendiculaire à ce plan; que les cônes, circonscrits à ces surfaces suivant les sections déterminées par ce même plan, s'entrecoupent, deux à deux, suivant des lignes du second degré, dont les plans sont aussi les plans de section des surfaces auxquels ils appartiennent etc. etc.; qu'enfin ces diverses relations permettent de construire très simplement et sous des conditions données, toute surface du second degré dont le foyer général est assigné ou doit être commun à cette surface et à d'autres surfaces données, et qu'elles permettent aussi de construire les plans de section commune à un système de surfaces confocales etc. etc.;" ce à quoi revient en dernière analyse, comme on sait, la recherche du centre de la sphère tangente à quatre autres dans l'espace, puisque ce centre doit se trouver à l'intersection mutuelle de surfaces du second degré de révolution qui ont pour foyer commun le centre de l'une quelconque des sphères données.

Metz le 20. Août 1828.

Poncelet.

2.

Beobachtungen über die Schwere, welche in den Häfen von Europa, America und Asien, auf dem stillen Meere und in Neuhollland, während Malaspina's Weltumseglung, mit dem unveränderlichen Pendel angestellt worden sind.

(Mitgetheilt vom Herrn Professor *Oltmanns* zu Berlin.)

Seitdem man in Frankreich (so heisst es in dem Berichte) damit umgeht, ein System von Maafs und Gewicht auf die Länge des Pendels, welches unter dem 45sten Grade der Breite Secunden schlägt, zu gründen, hat der König für zweckdienlich gehalten, während Malaspina's Weltumseglung, auch Beobachtungen über diesen interessanten Gegenstand an schicklichen Puncten anstellen zu lassen, damit man aus ihrer Vergleichung die wahre Gestalt der Erde herleiten, und bestimmen könne, ob die südliche Halbkugel mehr abgeplattet sei, als die nördliche, auch wie groß dieser Unterschied sei.

Da diese verschiedenen Fragen bloß aufgelöst werden konnten durch Messung verschiedener Breitengrade in verschiedenen Gegenden, oder durch Pendelbeobachtungen, welche an verschiedenen Orten gemacht worden, so gab der König von Spanien Befehl, solche Beobachtungen durch die Schiffscapitaine Don Josef de Espinosa und Don Ciriaco Cevallos anstellen zu lassen.

Da ferner, um zur Kenntniß der Gestalt der Meridiane zu gelangen, Pendelbeobachtungen, welche an zwei schicklich gelegenen Orten gemacht worden, die besten Mittel darboten, so beschloß der König, unter dem 45sten Grade südlicher Breite diejenigen Beobachtungen anstellen zu lassen, welche die französischen Academiker unter gleicher nördlicher Breite machten.

Die Beobachtungen, welche die spanischen Officiere von Malaspina's Geschwader angestellt haben, sind, sammt den von ihnen daraus abgeleiteten Resultaten, folgende:

Tafel I.

Vergleichung der Pendelbeobachtungen mit der Rechnung; unter Voraussetzung einer Abplattung von $\frac{1}{338}$ und daß das unveränderliche Pendel 3607 Schwingungen in einer Stunde unter dem Aequator mache, so wie solche aus sechs ihm zunächst gelegenen Beobachtungen abgeleitet worden sind.

In der nördlichen Halbkugel

O e r t e r	Breite	berechnete	beobachtete	positive	negative
		Schwingungen		Unterschiede	
Mulgrave	59° 33'	3614,63	3614,85	0,22	. . .
Nutka	49° 53'	3612,05	3612,21	. . .	0,74
Monterey	36° 36'	3610,65	3609,75	. . .	0,90
Cadiz	36° 32'	3610,64	3610,24	. . .	0,40
Macao	23° 12'	3608,59	3607,58	. . .	1,01
Acapulco	16° 50'	3607,86	3607,83	. . .	0,03
Manila	14° 36'	3607,65	3608,06	0,41	. . .
Umatag	13° 18'	3607,54	3607,07	. . .	0,47
Zamboanga . . .	6° 55'	3607,15	3607,25	0,10	. . .
Equador	0° 0'	3607,00	3607,00	. . .	. . .

In der südlichen Halbkugel

Puerto Egmont .	51° 21'	3613,26	3612,73	. . .	0,53
Santa Elena . .	44° 30'	3612,04	3612,37	0,33	. . .
Concepcion . .	36° 42'	3610,66	3610,29	. . .	0,37
Montevideo . .	34° 55'	3610,30	3610,38	0,02	. . .
Puerto Jakson .	33° 51'	3610,18	3610,20	0,02	. . .
Isla Babao . . .	18° 39'	3608,05	3608,12	0,07	. . .
Lima	12° 5'	3607,45	3607,39	. . .	0,06
Equador	0° 0'	3607,00	3607,00	. . .	. . .

Tafel II.

Vergleichung der Pendelbeobachtungen mit der Rechnung, unter Voraussetzung einer Abplattung von $\frac{1}{321}$ und dafs das unveränderliche Pendel 3607 Schwingungen in einer Secunde unter dem Aequator mache, so wie solche aus sechs ihm zunächst gelegenen Beobachtungen abgeleitet worden sind.

In der nördlichen Halbkugel

O e r t e r	Breite	berechnete	beobachtete	positive	negative
		Schwingungen		Unterschiede	
Mulgrave	59° 33'	3614,47	3614,85	0,38	
Nutka	49° 35'	3612,83	3612,21		0,62
Monterey	36° 36'	3610,58	3609,75		0,83
Cadiz	36° 32'	3610,57	3610,24		0,33
Macao	23° 12'	3608,57	3607,58		0,99
Acapulco	16° 50'	3607,86	3607,83		0,03
Manila	14° 36'	3607,66	3608,06	0,40	
Umatag	13° 18'	3607,55	3607,07		0,48
Zamboanga	6° 5'	3607,17	3607,25	0,08	
Equador	0° 0'	3607,02	3607,02		

In der südlichen Halbkugel

Puerto Egmont	51° 21'	3613,13	3612,73		0,40
Santa Elena	44° 30'	3611,94	3612,37	0,43	
Concepcion	36° 42'	3610,60	3610,29		0,31
Montevideo	34° 55'	3610,30	3610,38	0,08	
Puerto Jakson	33° 51'	3610,13	3610,20	0,07	
Isla Babao	18° 39'	3608,04	3608,12	0,08	
Lima	12° 5'	3607,46	3607,39		0,07
Equador	0° 0'	3607,02	3607,02		

Tafel III.

Länge des einfachen Secundenpendels, so wie solche für die Abplattung von $\frac{1}{338}$ berechnet und nach den Beobachtungen mit dem unveränderlichen Pendel gefunden worden, unter der Annahme, daß die Länge des Secundenpendels am Aequator nach Bouguer's Beobachtungen 439,21 pariser Linien ist.

In der nördlichen Halbkugel

O e r t e r	Breite	berechnete	beobachtete	positive	negative
		Schwingungen		Unterschiede	
Mulgrave	59° 33'	441,07	441,12	0,05	
Nutka	49° 35'	440,66	440,48		0,18
Monterey	36° 36'	440,10	439,88		0,22
Cadiz	36° 32'	440,09	440,00		0,09
Macao	23° 12'	439,60	439,35		0,25
Acapulco	16° 50'	439,42	439,41		0,01
Manila	14° 36'	439,37	439,47	0,10	
Umatag	13° 18'	439,34	439,23		0,11
Zamboanga	6° 55'	439,25	439,27	0,02	
Equador	0° 0'	439,21	439,21		

In der südlichen Halbkugel

Puerto Egmont	51° 21'	440,74	440,61		0,13
Santa Elena	54° 30'	440,44	440,52	0,08	
Concepcion	36° 42'	440,10	440,01		0,09
Montevideo	34° 55'	440,03	440,03		
Puerto Jakson	33° 51'	439,98	439,99	0,01	
Isla Babao	18° 39'	439,47	439,48	0,01	
Lima	12° 5'	439,32	439,31		0,01
Equador	0° 0'	439,21	439,21		

Tafel IV.

Länge des einfachen Secundenpendels, so wie solche für die Abplattung von $\frac{1}{321}$ berechnet und nach den Beobachtungen mit dem unveränderlichen Pendel gefunden worden, in der Annahme, daß das Secundenpendel unter dem Aequator nach Bouguer's Beobachtungen 439,21 pariser Linien lang ist.

In der nördlichen Halbkugel

O e r t e r	Breite	berechnete	beobachtete	positive	negative
		Schwingungen		Unterschiede	
Mulgrave . . .	59° 33'	441,03	441,12	0,09	. . .
Nutka	49° 35'	440,63	440,47	. . .	0,16
Monterey . . .	36° 36'	440,08	439,88	. . .	0,20
Cadiz	36° 32'	440,08	439,99	. . .	0,09
Macao	23° 12'	439,59	439,35	. . .	0,24
Acapulco . . .	16° 50'	439,41	439,41	. . .	. . .
Manila	14° 36'	439,37	439,46	0,09	. . .
Umatag	13° 18'	439,34	439,22	. . .	0,12
Zamboanga . . .	6° 55'	439,25	439,27	0,02	. . .
Equador	0° 0'	439,21	439,21	. . .	. . .

In der südlichen Halbkugel

Puerto Egmont .	51° 21'	440,70	440,60	. . .	0,10
Santa Elena . .	44° 30'	440,41	440,51	0,10	. . .
Concepcion . . .	36° 42'	440,08	440,01	. . .	0,07
Montevideo . . .	34° 55'	440,01	440,03	0,02	. . .
Puerto Jakson .	33° 51'	439,97	439,99	0,02	. . .
Isla Babao . . .	18° 39'	439,46	439,48	0,02	. . .
Lima	12° 5'	439,32	439,30	. . .	0,02
Equador	0° 0'	439,21	439,21	. . .	. . .

Tafel V.

Vergleichung der Schwere, welche der berechneten Abplattung von $\frac{1}{236}$ entspricht, mit derjenigen, welche das unveränderliche Pendel angegeben hat, wenn man dabei die Länge zur Einheit annimmt, welche unter dem Äquator beobachtet worden ist.

In der nördlichen Halbkugel

O e r t e r	Breite	berechnete	beobachtete	positive	negative
		Schwingungen		Unterschiede	
Mulgrave . . .	59° 33'	1,00423	1,00436	0,00013	. . .
Nutka	49° 35'	1,00330	1,00289	. . .	0,00041
Monterey . . .	36° 36'	1,00203	1,00153	. . .	0,00050
Cadiz	36° 32'	1,00202	1,00180	. . .	0,00022
Macao	23° 12'	1,00088	1,00032	. . .	0,00056
Acapulco . . .	16° 50'	1,00048	1,00046	. . .	0,00002
Manila	14° 36'	1,00036	1,00059	0,00023	. . .
Umatag	13° 18'	1,00030	1,00004	. . .	0,00026
Zamboanga . .	6° 55'	1,00008	1,00014	0,00006	. . .
Equador	0° 0'	1,00000	1,00000	. . .	. . .

In der südlichen Halbkugel

Puerto Egmont .	51° 21'	1,00347	1,00318	. . .	0,00029
Santa Elena . .	44° 30'	1,00280	1,00298	0,00018	. . .
Concepcion . .	36° 42'	1,00203	1,00183	. . .	0,00020
Montevideo . .	34° 55'	1,00186	1,00188	0,00002	. . .
Puerto Jakson .	33° 51'	1,00176	1,00178	0,00002	. . .
Isla Babao . . .	18° 39'	1,00058	1,00062	0,00004	. . .
Lima	12° 5'	1,00025	1,00022	. . .	0,00003
Equador	0° 0'	1,00000	1,00000	. . .	. . .

Tafel VI.

Vergleichung der Schwere, welche der berechneten Abplattung $\frac{1}{321}$ entspricht, mit derjenigen, welche das unveränderliche Pendel angegeben hat, wenn dabei die unter dem Aequator beobachtete Länge als Einheit angenommen wird.

In der nördlichen Halbkugel

O e r t e r	Breite	berechnete beobachtete		positive	negative
		Schwingungen		Unterschiede	
Mulgrave	59° 33'	1,00414	1,00435	0,00021	
Nutka	49° 35'	1,00322	1,00288		0,00034
Monterey	36° 36'	1,00198	1,00151		0,00047
Cadiz	36° 32'	1,00197	1,00179		0,00018
Macao	23° 12'	1,00086	1,00031		0,00055
Acapulco	16° 50'	1,00047	1,00045		0,00002
Manila	14° 36'	1,00036	1,00058	0,00022	
Umatag	13° 18'	1,00029	1,00003		0,00026
Zamboanga	6° 55'	1,00008	1,00013	0,00005	
Equador	0° 0'	1,00000	1,00000		

In der südlichen Halbkugel

Puerto Egmont	51° 21'	1,00339	1,00317		0,00022
Santa Elena	44° 30'	1,00273	1,00297	0,00024	
Concepcion	36° 42'	1,00199	1,00181		0,00018
Montevideo	34° 55'	1,00182	1,00186	0,00004	
Puerto Jakson	33° 51'	1,00173	1,00176	0,00003	
Isla Babao	18° 39'	1,00057	1,00061	0,00004	
Lima	12° 5'	1,00024	1,00021		0,00003
Equador.	0° 0'	1,00000	1,00000		

Die letzten Columnen der ersten und zweiten Tafel zeigen, daß die verschiedenen Annahmen der Erdplattung einen nur geringen Einfluß auf die Bestimmung der Schwingungen des unveränderlichen Pendels unter dem Aequator gehabt haben. Vergleichen wir in beiden Tafeln die Beobachtung zu Umatag mit der zu Manila, die zu Nutka und Mulgrave und die von St. Helena mit der in Puerto Egmont angestellten, so finden wir Unterschiede von 10 Schwingungen in einem Tage, bei einem Systeme der Abplattung wie bei dem andern. Diese Unregelmäßigkeiten müssen der Heterogenität der Erde zugeschrieben werden. Die Beobachtungen, welche sich zur Bestimmung der Erdabplattung vorzüglich eignen, sind die unter dem Aequator und in hohen Breiten angestellten.

Wenden wir also zu diesem Endzwecke die in Mulgrave und Nutka angestellten Beobachtungen an, welche am weitesten vom Aequator in der nördlichen Halbkugel entfernt sind, so finden wir die Erdabplattung $\frac{1}{310}$.

Die zu Mulgrave, Nutka, Monterey und Cadiz angestellten Beobachtungen geben die Abplattung $\frac{1}{285}$. Die in Puerto Egmont und St. Helena angestellten, geben die Abplattung der südlichen Halbkugel $\frac{1}{323}$; Puerto Egmont, St. Helena, Concepcion, Montevideo und Puerto Jakson geben $\frac{1}{318}$. Die sechste Tafel zeigt bei Manila eine unregelmäßige Zunahme der Schwere.

Darstellung der Prinzipien, wonach die Beobachtungen mit dem unveränderlichen Pendel berechnet worden sind.

Die Länge des einfachen Pendels, welches unter dem Aequator Secunden schlägt, verhält sich zu der unter einer andern Breite, wie eine constante Gröfse z zu dieser $+$ einer andern constanten Gröfse y , multiplicirt mit dem Quadrat des Sinus der Breite, welche wir l nennen wollen.

Die Schwingungen verhalten sich wie die Quadratwurzeln dieser Zahlen.

Nennt man n die Zahl der Schwingungen eines Pendels unter dem Aequator, und x diejenige, welche einer andern Breite entspricht, so haben wir

$$z^{\frac{1}{2}} : (z + y \sin^2 l)^{\frac{1}{2}} = n : x, \text{ also } x = \frac{(z + y \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}} \cdot n.$$

Vermöge des binomischen Lehrsatzes ist

$$(z + y \sin^2 l)^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}} + \frac{y \sin^2 l}{2z^{\frac{1}{2}}},$$

wobei die folgenden Glieder der Reihe vernachlässigt werden durften, weil z viel größer ist als $y \sin^2 l$, woraus sich ergibt

$$x = \frac{z^{\frac{1}{2}} + \frac{y \sin^2 l}{2z^{\frac{1}{2}}}}{z^{\frac{1}{2}}} \cdot n = n + \frac{y}{2z} n \cdot \sin^2 l.$$

Diese Formel zeigt, daß man, wenn man den Logarithmus von y zum arithmetischen Complementary des Logarithmus von $2z$ hinzufügt, und dazu den Logarithmus von n und den doppelten Logarithmus des Sinus der Breite setzt, den Logarithmus der Zahl findet, welcher zu n hinzugefügt werden muß, um durch die Schwingungen unter dem Aequator die Zahl der Schwingungen unter einer andern Breite zu erhalten.

Dies vorausgesetzt ist nach Laplace *Mec. cel. Tom. II. p. 149.* für eine Abplattung von $\frac{1}{231}$, $z = 0,99687$, $y = 0,00554$, wenn man die zehn Millionen Theile vernachlässigt, und da nun $n = 3607,02$ angenommen wird, so rechnet man im gegenwärtigen Falle wie folgt:

$$\log. \text{compl. } 2z = 4,7003315$$

$$\log. y = 2,7435098$$

$$\log. n = \begin{cases} 3,5571461 \\ 24 \end{cases}$$

$$\text{also const. log.} \dots\dots 1,0009898.$$

$$\text{Beispiel 1. Const. log.} \dots\dots\dots 1,000990$$

$$\begin{array}{r} \text{Breite von Mulgrave } 59^\circ 33' \log \sin^2 \left\{ \begin{array}{l} 9,935543 \\ 9,935543 \end{array} \right. \\ \hline 0,872076. \end{array}$$

$$\text{Dazu gehörige Zahl} \dots\dots\dots 7,4486,$$

$$\text{Zahl der Schwingungen oder } n = \dots\dots\dots 3607,0200,$$

folglich Zahl der Schwingungen in Mulgrave 3614,47 nach der Rechnung.

$$\text{Beispiel 2. Const. log.} \dots\dots\dots 1,000990$$

$$\begin{array}{r} \text{Breite von Zamboanga } 6^\circ 55' \log \sin^2 \left\{ \begin{array}{l} 9,080719 \\ 9,080719 \end{array} \right. \\ \hline 9,162428. \end{array}$$

Zugehörige Zahl 0,1454,
 Zahl der Schwingungen unter dem Aequator . . 3607,0200,
 folglich Zahl der Schwingung in Zamboanga 3607,17 nach der
 Rechnung.

Die Schwingungen, welche das unveränderliche Pendel unter dem Aequator haben müßte, sind durch eine Art von Regula Falsi berechnet worden, um nemlich zu sehen, wie man sie annehmen müßte; damit aus der Vergleichung der sechs Beobachtungen mit der Rechnung, die Summe der positiven Unterschiede eben so groß als die Summe der negativen sei.

Für $\frac{1}{338}$ der Abplattung giebt Laplace auf der 150sten Seite seines Werkes die Werthe von $z = 0,996760$, $y = 0,005672$ und nach der Regula Falsi ergibt sich $n = 3607,00$. Hieraus finden wir ferner das logarithmische Complement von

$$\begin{aligned} 2z &= 3,7003794 \\ \log y &= 3,7537362 \\ \log n &= 3,5571461 \end{aligned}$$

Also constanter Logarithmus für $\frac{1}{338}$ der Abplattung . . 1,0112617

Breite von Mulgrave $59^{\circ} 33' \log \sin^2$ $\left. \begin{array}{l} 9,935543 \\ 9,935543 \end{array} \right\}$
 0,882348.

Zugehörige Zahl 7,6270,
 Zahl der Schwingungen unter dem Aequator . . 3607,0000
 folglich Zahl der Schwingungen in Mulgrave 3614,63 nach der
 Rechnung.

Berechnung der Schwere und der Länge des einfachen, Secunden schlagenden Pendels.

Wir haben gesehen, daß das Quadrat der Schwingungen des unveränderlichen Pendels unter dem Aequator sich verhält zur Einheit wie das Quadrat der Schwingungen unter jeglicher Breite zu der ihr entsprechenden Schwere.

Wir haben ferner gesehen, daß die Einheit sich verhält zur Länge des einfachen unter dem Aequator Secunden schlagenden Pendels, wie die jeglicher Breite entsprechende Schwere zur Länge des einfachen Pendels, welches unter dieser Breite Secunden schwingt. Nach diesen

Prinzipien ist die Schwere und die Länge des Pendels, welche den Beobachtungen entspricht, für jede Breite berechnet worden. Diese Rechnung läßt sich aber auf folgende Art sehr abkürzen: die Zahl der Schwingungen unter dem Aequator ist für die Abplattung $\frac{1}{321}$. . . 3607,02

deren Logarithmus $\left. \begin{array}{l} 3,5571485 \\ 3,5571485 \end{array} \right\}$

 7,1142990,

dessen arithmetische Ergänzung 2,8857030,

Pendellänge unter dem Aequator nach den Beobachtungen des

Herrn Bouguer 439,21, deren Logarithmus 2,6426722.

Beispiel für die Berechnung der Schwere und Pendellänge zu Mulgrave.

Erster constanter Logarithmus 2,8857030.

Berechnete Schwingungen 3614,47 $\left. \begin{array}{l} 3,5580362 \\ 3,5580362 \end{array} \right\}$

 168

Schwere 1,00414 0,0017922

zweiter constanter Logarithmus 2,6426722

Länge des einfachen Pendels 441,03 2,6444644.

Für $\frac{1}{328}$ Abplattung ist der Logarithmus von 3607 . . . $\left. \begin{array}{l} 3,5571461 \\ 3,5571461 \end{array} \right\}$

 7,1142922.

Arithmetische Ergänzung, oder der erste constante Logarithmus 2,8857078,

der zweite constante Logarithmus 2,6426722,

wie für $\frac{1}{321}$

Bestimmung der Abplattung, welche den Beobachtungen entspricht.

Man nenne A' , A'' , A''' etc. die Überschüsse der für die Breiten l' , l'' , l''' berechneten Schwingungen, in Beziehung auf diejenigen unter dem Aequator mit n bezeichneten, und a' , a'' , a''' etc. die correspondirenden, beobachteten Ueberschüsse.

Es bezeichne y die Constante, welche der angenommenen Erdabplattung entspricht, und y' , y'' , y''' etc. diejenigen, welche den Beobachtungen a' , a'' , a''' etc. Genüge leisten.

Wir haben im Eingang gesehen, daß

$$\frac{y}{2z} \cdot n \sin^2 l' = A', \text{ und } \frac{y}{2z} \cdot n \sin^2 l'' = A'' \text{ etc.}$$

Weil n und z sich wenig ändern, so kann man sie ohne merklichen Fehler für alle Abplattungen als beständig ansehen, wodurch

$$\frac{y'}{2z} \cdot n \sin^2 l' = a'; \quad \frac{y''}{2z} \cdot n \sin^2 l'' = a'' \text{ etc.}$$

Hieraus folgt

$$y = \frac{2z}{n \cdot \sin^2 l'} \cdot A',$$

$$y' = \frac{2z}{n \cdot \sin^2 l'} \cdot a'.$$

Ferner

$$y \cdot \frac{y - y'}{y} = y - y' = y \cdot \frac{A' - a'}{A'}.$$

Ueberhaupt:

$$y - y' = y \cdot \frac{A' - a'}{A'},$$

$$y - y'' = y \cdot \frac{A'' - a''}{A''},$$

$$y - y''' = y \cdot \frac{A''' - a'''}{A'''},$$

und aus diesen Gleichungen folgt.

$$\frac{y}{2z} \cdot n \sin^2 l' = A',$$

$$\frac{y}{2z} \cdot n \sin^2 l'' = A'',$$

$$\frac{y}{2z} \cdot n \sin^2 l''' = A'''. \quad \text{etc.}$$

Solchemnach verhalten sich die Größen A' , A'' , A''' wie die Quadrate der Sinusse der Breiten. Multiplicirt man also den Werth von $y' - y''$ mit A' , von $y - y''$ mit A'' und von $y - y'''$ mit A''' etc. und dividirt die Summe durch $A' + A'' + A'''$ etc., so erhält man den Werth von dy , welcher für die Unterschiede $y - y'$; $y - y''$ den Einfluß zeigt, der dem Quadrate der Breite des Beobachtungs-Ortes proportional ist.

Diesem zufolge ist

$$dy = y \cdot \frac{(A' - a') + (A'' - a'') + (A''' - a''') \text{ etc.}}{A' + A'' + A''' \text{ etc.}}$$

Da nun $A' - a'$, $A'' - a''$ etc. die Unterschiede zwischen den berechneten und beobachteten Schwingungen bezeichnen, welche wir d' , d'' ,

d''' nennen wollen, so ist überhaupt genommen, die Veränderung von y , welche wir dy nennen, $= \frac{d' + d'' + d''' \text{ etc.}}{A' + A'' + A''' \text{ etc.}} y$.

Ferner ist für $\frac{1}{321}$ Abplattung $y = 0,00554$. Für diesen Fall nehmen wir die Unterschiede a' , a'' , etc. aus der zweiten Tafel mit dem Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem sie positiv oder negativ sind, so folgt daraus

$$dy = 0,00554 \frac{d' + d'' + d''' \text{ etc.}}{A' + A'' + A''' \text{ etc.}}.$$

Nach Laplace *Mécan. céleste* ist die Abplattung $0,00865 - y$; die wahre Abplattung also

$$0,00865 - 0,00554 - dy = 0,00311 - 0,00554 \frac{d' + d'' + d''' \text{ etc.}}{A' + A'' + A''' \text{ etc.}}.$$

Hierbei muß aber bemerkt werden, daß wenn die neue Abplattung von der angenommenen stark abweicht, dann auch die Werthe von n und z sich ändern.

In solchen Fällen muß man eine kleine Verbesserung der durch die approximirte Formel gefundenen Abplattung anbringen. Wenn daher die neue Abplattung sich $\frac{1}{336}$, mehr als $\frac{1}{321}$ nähern sollte, so kann man besser die Unterschiede d' , d'' , d''' etc. und die Werthe von A' , A'' etc. aus der ersten Tafel nehmen und $y = 0,005672$ setzen, wodurch die Abplattung

$$= 0,002978 - 0,005672 \frac{d' + d'' + d''' \text{ etc.}}{A' + A'' + A''' \text{ etc.}}$$

wird.

Beispiel. In der zweiten Tafel haben wir für Mulgrave $A' = 7,45$; $d' = 0,38$, für Nutka $A'' = 5,81$, $d'' = 0,62$. Hieraus die Abplattung $0,00311 - 0,00554 \cdot \frac{-24}{1328} = 0,00311 + 0,00103 = 0,003213 = \frac{1}{311}$, welche vermöge der so eben angedeuteten kleinen Verbesserungen zu $\frac{1}{318}$ angenommen werden kann.

Die in der südlichen Hemisphäre angestellten Beobachtungen erfordern übrigens dieser Verbesserung nicht, weil die dort beobachteten Abplattungen nur sehr wenig von den angenommenen abweichen. Für diese Beobachtungen wird also die Abplattung

$$\begin{aligned} 0,00311 - 0,00554 \cdot \frac{-40 + 43 - 31 + 8 + 7}{611 + 492 + 358 + 328 + 311} &= 0,00311 + 0,00554 \cdot \frac{13}{2100} \\ &= 0,003144 = \frac{1}{318}. \end{aligned}$$

3.

Note sur quelques formules elliptiques.

(Par Mr. N. H. Abel.)

J'ai présenté dans le second tome de ce journal plusieurs formules qui tiennent au développement des fonctions elliptiques $\varphi\alpha$, $f\alpha$, $F\alpha$, dans le cas où les modules e et c sont réels. Il sera facile de tirer de ces formules d'autres formules analogues pour le cas où e^2 est une quantité négative. C'est ce que nous ferons voir.

Soit pour plus de simplicité $c = 1$. Cela posé, si l'on fait

$$1. \quad \lambda\alpha = f\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right), \quad \text{où } b = \frac{1}{\sqrt{1+e^2}},$$

on trouvera aisément, en vertu de la définition de la fonction f , que

$$2. \quad \alpha = \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}},$$

en faisant

$$x = \lambda\alpha \quad \text{et} \quad c = \frac{e}{\sqrt{1+e^2}}.$$

Donc le module c est plus petit que l'unité, et comme on a $b = \sqrt{1-c^2}$, b sera son complément.

On trouvera aussi

$$3. \quad \begin{cases} \frac{\omega}{2} = b \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \theta)}}, \\ \frac{\varpi}{2} = b \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-b^2x^2)}} = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-b^2 \sin^2 \theta)}}, \end{cases}$$

Si l'on fait

$$4. \quad \lambda'\alpha = \sqrt{1-\lambda^2\alpha}; \quad \lambda''\alpha = \sqrt{1-c^2\lambda^2\alpha},$$

on aura encore

$$5. \quad \lambda'\alpha = \varphi\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right); \quad \lambda''\alpha = bF\left(\frac{\omega}{2} - b\alpha\right),$$

et en faisant

$$6. \quad \frac{\omega'}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \theta)}}, \quad \frac{\varpi'}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-b^2 \sin^2 \theta)}}.$$

on a, en vertu de (3.)

$$7. \quad \frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\omega}{\varpi}, \quad \omega = b\omega', \quad \varpi = b\varpi'.$$

Considérons maintenant d'abord la formule (185.) pag. 176., qui donne la valeur de $f\alpha$. Pour en tirer celle de la fonction $\lambda\alpha$, il suffit de mettre $\frac{\omega}{2} - b.\alpha$ à la place de α . Faisons $\alpha = \frac{\omega}{2} - b.\theta$ et pour abréger,

$$8. \quad \varrho = e^{-\frac{\theta\pi}{\omega'}}, \quad r = e^{-\frac{\overline{\omega}'\pi}{\omega'}};$$

alors la formule (185.) donne sur le champ:

$$\lambda\theta = A. \prod_m^{\infty} \frac{(1-r^{2m+1})^2 - (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2}{(1+r^{2m+1})^2 + (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2},$$

où

$$7'. \quad A^{\frac{1}{2}} = \frac{(1+r)(1+r^3)\dots}{(1-r)(1-r^3)\dots}.$$

Or on a

$$(1-r^{2m+1})^2 - (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2 = (1-\varrho^2.r^{2m})(1-\varrho^{-2}.r^{2m+2})$$

et

$$(1+r^{2m+1})^2 + (\varrho r^m - \varrho^{-1}.r^{m+1})^2 = (1+\varrho^2.r^{2m})(1+\varrho^{-2}.r^{2m+2}),$$

par conséquent l'expression de $\lambda\theta$ deviendra en développant:

$$9. \quad \lambda\theta = A. \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2} \cdot \frac{1-\varrho^2.r^2}{1+\varrho^2.r^2} \cdot \frac{1-\varrho^{-2}.r^2}{1+\varrho^{-2}.r^2} \cdot \frac{1-\varrho^2.r^4}{1+\varrho^2.r^4} \cdot \frac{1-\varrho^{-2}.r^4}{1+\varrho^{-2}.r^4} \dots$$

Avec la même facilité on tirera des deux formules (184.) et (186.), en y faisant $\alpha = \frac{\omega}{2} - b.\theta$:

$$10. \quad \lambda'\theta = A'. \frac{2\varrho}{1+\varrho^2} \cdot \frac{(1-\varrho^2.r)(1-\varrho^{-2}.r^2)(1-\varrho^2.r^4)(1-\varrho^{-2}.r^6)\dots}{(1+\varrho^2.r^2)(1+\varrho^{-2}.r^2)(1+\varrho^2.r^4)(1+\varrho^{-2}.r^4)\dots}$$

$$11. \quad \lambda''\theta = A''. \frac{2\varrho}{1+\varrho^2} \cdot \frac{(1+\varrho^2.r)(1+\varrho^{-2}.r)(1+\varrho^2.r^3)(1+\varrho^{-2}.r^3)\dots}{(1+\varrho^2.r^2)(1+\varrho^{-2}.r^2)(1+\varrho^2.r^4)(1+\varrho^{-2}.r^4)\dots}$$

où A' , A'' sont données par les formules

$$12. \quad \sqrt{A'} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\dots},$$

$$13. \quad \sqrt{A''} = \frac{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\dots}.$$

On pourra trouver d'autres expressions pour A , A' , A'' encore beaucoup plus simples et qui donneront des formules très remarquables.

Si l'on fait dans la formule (9.):

$$\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\overline{\omega}'}{2}i,$$

on aura:

$$\lambda\theta = f\left(\frac{\overline{\omega}}{2}i\right) = \frac{\mathcal{V}(1+e^2)}{e} = \frac{1}{e}$$

et

$$\varrho^2 = e^{-\frac{\pi\omega'}{\omega} + \frac{\pi\overline{\omega}'}{\omega}i} = -r,$$

donc, en substituant,

$$\frac{1}{c} = A \cdot \left(\frac{1+r}{1-r} \cdot \frac{1+r^3}{1-r^3} \cdot \frac{1+r^5}{1-r^5} \cdot \dots \right),$$

c'est-à-dire, en vertu de la formule (7').

$$\frac{1}{c} = A^3,$$

d'où

$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}.$$

En faisant dans l'expression de $\lambda'\theta$:

$$\theta = \frac{\omega'}{2} + \frac{\overline{\omega}'}{2}i,$$

on a

$$\lambda'\theta = \varphi\left(\frac{\overline{\omega}i}{2}\right) = \frac{i}{e} = i \frac{\sqrt{(1-c^2)}}{c},$$

et

$$\varrho^2 = -r,$$

donc:

$$i \cdot \frac{b}{c} = 4A'i\sqrt{r} \left(\frac{1+r^2}{1-r} \cdot \frac{1+r^4}{1-r^3} \cdot \dots \right)^2,$$

d'où l'on tire en vertu de (12.):

$$A' = \frac{1}{2\sqrt[4]{r}} \cdot \sqrt{\frac{b}{c}}.$$

Enfin si l'on fait dans la formule (11.) $\theta = \frac{\omega'}{2}$, on trouvera:

$$\lambda''\theta = \sqrt{(1-c^2)} = b, \quad \varrho^2 = r,$$

donc

$$b = 4A'' \cdot \sqrt{r} \cdot \left(\frac{1+r^2}{1+r} \cdot \frac{1+r^4}{1+r^3} \cdot \dots \right)^2 = 4A'' \sqrt{r} \cdot A'',$$

et par suite

$$A'' = \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt[4]{r}}.$$

En comparant ces valeurs de A , A' , A'' à celles plus haut, on en déduira ces formules:

$$14. \quad \sqrt[4]{c} = \frac{1-r}{1+r} \cdot \frac{1-r^3}{1+r^3} \cdot \frac{1-r^5}{1+r^5} \cdot \dots,$$

$$15. \quad \sqrt{\frac{b}{c}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \frac{1+r^2}{1-r} \cdot \frac{1+r^4}{1-r^3} \cdot \frac{1+r^6}{1-r^5} \cdot \dots,$$

$$16. \quad \sqrt[4]{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \frac{1+r^2}{1+r} \cdot \frac{1+r^4}{1+r^3} \cdot \frac{1+r^6}{1+r^5} \cdot \dots,$$

dont l'une est une suite des deux autres.

Si dans l'expression de $\lambda\theta$, après avoir divisé les deux membres par

$$1 - \varrho^2 = 2 \cdot \frac{\theta \pi}{\varpi'} + \dots,$$

on fait $\theta = 0$, et qu'on remarque que

$$\frac{\lambda \theta}{\theta} = 1, \text{ pour } \theta = 0,$$

on obtiendra

$$17. \sqrt[4]{c} \cdot \sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = \frac{(1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\dots}{(1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots}.$$

De là on tire, en substituant la valeur de $\sqrt[4]{c}$:

$$18. \sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = \frac{(1+r)(1-r^2)(1+r^3)(1-r^4)\dots}{(1-r)(1+r^2)(1-r^3)(1+r^4)\dots} \\ = (1+r)^2(1+r^3)^2(1+r^5)^2\dots \times (1-r^2)(1-r^4)(1-r^6)\dots \\ = [(1+r)(1+r^3)\dots(1+r^5)\dots]^2 \cdot (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\dots$$

A l'aide des formules (16., 14., 18.) il est facile de trouver l'expression des produits infinis

$$(1+r)(1+r^2)(1+r^3)\dots, (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\dots$$

En effet, si pour abréger on fait

$$19. \begin{cases} P = (1+r)(1+r^3)(1+r^5)\dots \\ P' = (1+r^2)(1+r^4)(1+r^6)\dots \end{cases}$$

et qu'on ait égard à la formule

$$\frac{1}{(1-r)(1-r^3)(1-r^5)\dots} = (1+r)(1+r^2)(1+r^3)\dots = P \cdot P',$$

les formules (14., 16.) donneront sur le champ:

$$\sqrt[4]{c} = \frac{1}{P^2 \cdot P'}, \quad \sqrt[4]{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[8]{r} \cdot \frac{P^2}{P'},$$

d'où l'on tire:

$$20. P = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[24]{\left(\frac{r}{b^2 c^2}\right)}, \quad P' = \frac{\sqrt[6]{b} \cdot \sqrt[24]{r}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[12]{c} \cdot \sqrt[8]{r}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{r}}.$$

Cela donne les produits P et P' . En les multipliant entre eux, il viendra:

$$21. (1+r)(1+r^2)(1+r^3)(1+r^4)\dots = \frac{\sqrt[12]{b}}{\sqrt[6]{2c} \cdot \sqrt[24]{r}}.$$

De même la formule (18.) donne, en substituant les valeurs de P , P' :

$$\sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}} = P^3 \cdot P' \cdot (1-r)(1-r^2)(1-r^3)\dots,$$

et de là:

$$22. (1-r)(1-r^2)(1-r^4)\dots = \frac{\sqrt[12]{b} \cdot \sqrt[3]{c}}{\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[24]{r}} \cdot \sqrt{\frac{\varpi'}{\pi}},$$

formule due à M. Jacobi (Tome III. pag. 193., où ce géomètre en présente plusieurs autres très remarquables et très élégantes).

Des formules démontrés précédemment on peut tirer aisément un grand nombre d'autres.

En voici quelques unes de plus remarquables.

Si l'on fait pour abréger

$$23. \quad q = e^{-\frac{\overline{\omega}'}{\omega'}\pi},$$

on aura

$$24. \quad \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{2}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt[4]{q} \cdot \sin x \cdot \frac{1-2q^2 \cos 2x + q^4}{1-2q \cos 2x + q^2} \cdot \frac{1-2q^4 \cos 2x + q^8}{1-2q^3 \cos 2x + q^6} \dots$$

$$25. \quad \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = 2\sqrt{\frac{b}{c}} \cdot \sqrt[4]{q} \cdot \cos x \cdot \frac{1+2q^2 \cos 2x + q^4}{1-2q \cos 2x + q^2} \cdot \frac{1+2q^4 \cos 2x + q^8}{1-2q^3 \cos 2x + q^6} \dots$$

$$26. \quad \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \sqrt{b} \cdot \frac{1+2q \cos 2x + q^2}{1-2q \cos 2x + q^2} \cdot \frac{1+2q^3 \cos 2x + q^6}{1-2q^3 \cos 2x + q^6} \dots$$

Ces formules ont été déduites respectivement des formules 10., 9., 11., en changeant c en b , et en faisant ensuite

$$\theta = \frac{\overline{\omega}'}{2} + \frac{\omega'}{2} \cdot \sqrt{-1} + \frac{\omega'}{\pi} x \sqrt{-1}.$$

En comparant ces valeurs avec celles que M. Jacobi a données pour les mêmes fonctions à l'endroit cité, on parviendra à des résultats remarquables. Savoir, en faisant dans la formule (3.) de M. Jacobi, $k=c$, on aura:

$$27. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1+2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \dots}{1-2q \cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + \dots} \\ = \frac{(1+2q \cos 2x + q^2)(1+2q^3 \cos 2x + q^6)(1+2q^5 \cos 2x + q^{10}) \dots}{(1-2q \cos 2x + q^2)(1-2q^3 \cos 2x + q^6)(1-2q^5 \cos 2x + q^{10}) \dots} \end{array} \right.$$

formule qui doit avoir lieu pour des valeurs quelconques réelles de x et q , en supposant q moindre que l'unité.

En prenant les logarithmes des valeurs de $\lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right)$ etc., on trouvera quelques réductions faciles:

$$28. \quad \log \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \log 2 - \frac{1}{2} \log c - \frac{1}{4} \cdot \frac{\overline{\omega}'}{\omega'} \pi + \log \sin x$$

$$+ 2 \left\{ \cos 2x \cdot \frac{q}{1-q} + \frac{1}{2} \cos 4x \cdot \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cos 6x \cdot \frac{q^3}{1-q^3} + \dots \right\},$$

$$29. \quad \log \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \log 2 + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{2} \log c - \frac{1}{4} \frac{\overline{\omega}'}{\omega'} \pi + \log \cos x$$

$$+ 2 \left\{ \cos 2x \cdot \frac{q}{1+q} + \frac{1}{2} \cos 4x \cdot \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cos 6x \cdot \frac{q^3}{1+q^3} + \dots \right\},$$

$$30. \quad \log \lambda''\left(\frac{\omega'}{\pi}x\right) = \frac{1}{2} \log b + 4 \cdot \left\{ \cos 2x \cdot \frac{q}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cos 6x \cdot \frac{q^3}{1-q^6} + \dots \right\}.$$

En faisant $x = 0$, on trouvera :

$$31. \log\left(\frac{1}{b}\right) = 8. \left\{ \frac{q}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{q^5}{1-q^{10}} + \dots \right\},$$

$$32. \log\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi'}{\omega'} \pi - 2 \log 2 + 2 \left\{ \frac{q}{1-q} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{q^3}{1-q^3} + \dots \right\} \\ = 8. \left\{ \frac{r}{1-r^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{r^3}{1-r^6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{r^5}{1-r^{10}} + \dots \right\}.$$

En posant dans les formules (206.) et (207.) Tome II. p. 180. : $x = 1 - \frac{2x}{\pi}$, on trouvera les expressions suivantes :

$$33. \lambda\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \frac{4\pi}{c\omega'} \cdot \sqrt{q} \cdot \left\{ \sin x \cdot \frac{1}{1-q} + \sin 3x \cdot \frac{q}{1-q^3} + \sin 5x \cdot \frac{q^2}{1-q^5} + \dots \right\},$$

$$34. \lambda'\left(\frac{\omega'}{\pi} x\right) = \frac{4\pi}{c\omega'} \cdot \sqrt{q} \cdot \left\{ \cos x \cdot \frac{1}{1+q} + \cos 3x \cdot \frac{q}{1+q^3} + \cos 5x \cdot \frac{q^2}{1+q^5} + \dots \right\}.$$

Ces formules offrent peut-être les plus simples expressions des fonctions elliptiques en quantités connues.

Voici encore deux autres formules, qu'on déduira des équations (204.) et (206.) Tome II. pag. 179., en y faisant $\alpha = \frac{\omega}{2} - \omega x$:

$$35. \lambda'(\omega' x) = \frac{2\pi}{c\omega'} \cdot \left\{ \frac{r^x - r^{1-x}}{1+r} - \frac{r^{3x} - r^{3-3x}}{1+r^3} + \frac{r^{5x} - r^{5-5x}}{1+r^5} - \dots \right\},$$

$$36. \lambda''(\omega' x) = \frac{2\pi}{c\omega'} \cdot \left\{ \frac{r^x + r^{1-x}}{1-r} - \frac{r^{3x} + r^{3-3x}}{1-r^3} + \frac{r^{5x} + r^{5-5x}}{1-r^5} - \dots \right\}.$$

où r signifie la même chose que précédemment.

Il y a à remarquer que les quantités r et q sont liées entre elles par l'équation :

$$37. \log r \cdot \log q = \pi^2.$$

A l'aide des expressions des modules c et b données plus haut, on pourra trouver une relation générale entre les modules de deux fonctions elliptiques qui sont réductibles l'une à l'autre. En effet on pourra démontrer, comme je l'ai fait dans un des derniers numéros des „*Astronomische Nachrichten*,” que si deux fonctions elliptiques réelles :

$$83. F(c, \theta) = \int_0^\theta \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \theta)}}; \quad F(c', \theta') = \int_0^{\theta'} \frac{\partial \theta'}{\sqrt{(1-c'^2 \sin^2 \theta')}},$$

dont les modules c et c' sont moindres que l'unité, peuvent être réduites l'une à l'autre à l'aide d'une relation algébrique entre $\sin \theta$ et $\sin \theta'$, on peut trouver deux nombres entiers m et n , tels que l'équation

$$39. \quad n \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \theta)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-b'^2 \sin^2 \theta)}} \\ = m \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-b^2 \sin^2 \theta)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \theta}{\sqrt{(1-c'^2 \sin^2 \theta)}}$$

soit satisfaite. b' est le complément de c' , savoir $b' = \sqrt{1-c'^2}$.

Si cette condition est satisfaite on pourra toujours déterminer $\sin \theta'$ algébriquement en $\sin \theta$ de manière que

$$40. \quad F(c', \theta') = a \cdot F(c, \theta),$$

où a est un coefficient constant.

Cela posé, désignons par $\omega'', \varpi'', r', q'$, les valeurs de ω', ϖ', r, q , qui répondent au module c' , on aura en vertu de la formule (14.):

$$\sqrt[4]{c'} = \frac{(1-r')(1-r'^3)(1-r'^5) \dots}{(1+r')(1+r'^3)(1+r'^5) \dots},$$

où $r' = e^{-\frac{\omega''}{\varpi''}\pi}$. Mais l'équation (39.) donne:

$$\frac{\omega''}{\varpi''} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\omega'}{\varpi'},$$

donc

$$r' = e^{-\frac{n}{m} \cdot \frac{\omega'}{\varpi'} \pi},$$

c'est-à-dire:

$$r' = r^{\frac{n}{m}}.$$

Donc on a ce théorème:

Une fonction elliptique réelle étant proposée, si son module c est donné par la formule:

$$41. \quad \sqrt[4]{c} = \frac{(1-r)(1-r^3)(1-r^5) \dots}{(1+r)(1+r^3)(1+r^5) \dots},$$

on aura le module de toute autre fonction elliptique réelle, réductible à la première, en mettant au lieu de r la puis-

sance $r^{\frac{n}{m}}$, où n et m sont deux nombres entiers et positifs quelconques, c'est-à-dire, on aura, en désignant par c' le module de la nouvelle fonction:

$$42. \quad \sqrt[4]{c'} = \frac{(1-r^{\frac{n}{m}})(1-r^{\frac{3n}{m}})(1-r^{\frac{5n}{m}}) \dots}{(1+r^{\frac{n}{m}})(1+r^{\frac{3n}{m}})(1+r^{\frac{5n}{m}}) \dots}.$$

En faisant

$$43. \quad \sqrt[4]{c} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{q} \cdot \frac{1+q^2}{1+q} \cdot \frac{1+q^4}{1+q^3} \cdot \frac{1+q^6}{1+q^5} \dots$$

on aura encore la formule suivante:

$$44. \sqrt[n]{c'} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[n]{q^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1+q^{\frac{2m}{n}}}{1+q^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1+q^{\frac{4m}{n}}}{1+q^{\frac{3m}{n}}} \cdot \frac{1+q^{\frac{6m}{n}}}{1+q^{\frac{5m}{n}}} \dots$$

Dans le cas particulier où le module c est $\sqrt{\frac{1}{2}}$, on a $\varpi' = \omega'$, donc:

$$r = e^{-\pi} = q.$$

De là il suit

que le module c de toute fonction elliptique réelle, qui est réductible à la fonction $\int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)}}$, est donné par la formule:

$$45. \sqrt[n]{c} = \frac{1-e^{-\mu\pi}}{1+e^{-\mu\pi}} \cdot \frac{1-e^{-3\mu\pi}}{1+e^{-3\mu\pi}} \cdot \frac{1-e^{-5\mu\pi}}{1+e^{-5\mu\pi}} \dots$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{8\mu}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{2\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\mu}}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{4\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\mu}}} \cdot \frac{1+e^{-\frac{6\pi}{\mu}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\mu}}} \dots$$

où μ est un nombre *rationnel* quelconque.

Au reste c pourra toujours être exprimé dans ce cas en termes finis à l'aide de radicaux.

Si l'on suppose $b' = c$, on a $c' = b$, $\omega'' = \varpi'$, $\varpi'' = \omega'$, mais:

$$\frac{\omega''}{\varpi''} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\omega'}{\varpi'} = \frac{\varpi'}{\omega'},$$

donc:

$$\frac{\omega'}{\varpi'} = \sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\mu}.$$

De là nous concluons:

Si deux fonctions elliptiques réelles, dont les modules sont leurs complémens réciproques, peuvent être réduites l'une à l'autre le module sera donné par la formule:

$$46. \sqrt[n]{c} = \frac{1-e^{-\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-\pi\sqrt{\mu}}} \cdot \frac{1-e^{-3\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-3\pi\sqrt{\mu}}} \cdot \frac{1-e^{-5\pi\sqrt{\mu}}}{1+e^{-5\pi\sqrt{\mu}}} \dots$$

et son complément b par celle-ci:

$$47. \sqrt[n]{b} = \frac{1-e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{3\pi}{\sqrt{\mu}}}} \cdot \frac{1-e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}}{1+e^{-\frac{5\pi}{\sqrt{\mu}}}} \dots;$$

où μ est un nombre rationnel quelconque.

Nous ajouterons qu'on a en même tems:

$$48. F(b, \theta') = k\sqrt{\mu} \cdot F(c, \theta),$$

où k est un autre nombre rationnel.

Cela donne immédiatement le théorème suivant:

Si l'équation différentielle

$$49. \frac{\partial y}{\sqrt{(A - By^2 + Cy^4)}} = a \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{(A + Bx^2 + Cx^4)}}$$

est intégrable algébriquement, il faut nécessairement que le coefficient a soit égal à la racine carrée d'un nombre rationnel et positif, en supposant que les quantités A, B, C , et a soient réelles; et si a a cette forme, on pourra trouver une infinité de valeurs convenables pour A, B, C .

Nous terminerons ces remarques par la démonstration d'une formule curieuse, qu'on tire de l'équation (20.): savoir de la formule

$$(1+r)(1+r^3)(1+r^5)\dots = \sqrt[6]{2} \cdot \frac{\sqrt[24]{r}}{\sqrt[12]{(bc)}}.$$

En y changeant c en b , b se changera en c , et r en q , donc:

$$(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots = \sqrt[6]{2} \cdot \frac{\sqrt[24]{q}}{\sqrt[12]{(bc)}}.$$

En comparant ces formules, on voit que l'équation

$$50. \frac{1}{\sqrt[24]{r}} \cdot (1+r)(1+r^3)(1+r^5)\dots = \frac{1}{\sqrt[24]{q}} (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots,$$

a lieu toutes les fois que les quantités r et q sont moindres que l'unité et qu'elles sont liées entre elles par l'équation

$$\log r \cdot \log q = \pi^2.$$

Il existe un grand nombre de relations semblables entre q et r , par exemple la suivante:

$$\sqrt[4]{\left[\log\left(\frac{1}{r}\right)\right]} \cdot \left(\frac{1}{2} + r + r^2 + r^9 + r^{16} \dots\right) = \sqrt[4]{\left[\log\left(\frac{1}{q}\right)\right]} \cdot \left(\frac{1}{2} + q + q^2 + q^9 + q^{16} \dots\right),$$

qui est due à Mr. Cauchy (*Exercices des mathématiques*). On pourra la déduire de la formule

$$\sqrt[4]{\frac{\omega'}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^2 + 2q^9 + \dots,$$

donnée par Mr. Jacobi, en y changeant c en b .

4.

Note sur les intégrales définies.

(Par Mr. Lejeune-Dirichlet, prof. de mathém.)

Quoique les intégrales qui font l'objet de cette note, soient comprises en grande partie parmi celles dont Mrs. Poisson et Cauchy et d'autres savans ont déterminé les valeurs dans ces derniers temps, je me flatte que cette nouvelle manière d'y parvenir pourra intéresser les géomètres par son extrême simplicité. Le procédé dont je fais usage, est fondé sur la propriété connue des intégrales doubles, d'être indépendantes de l'ordre dans lequel les deux intégrations sont effectuées. C'est une extension de la méthode dont Mrs. Laplace et Poisson ont fait un emploi si heureux dans la théorie des intégrales définies. Mais si l'on doit convenir que la méthode dont il s'agit a acquis son importance principale par les applications ingénieuses que les géomètres cités en ont faites, la justice exige aussi d'attribuer à Euler la première idée de faire servir la propriété énoncée des intégrales doubles à l'évaluation des intégrales définies simples *).

Si l'on désigne par k et m deux constantes positives, et que l'on adopte la notation de Mr. Legendre, on aura par le simple changement de ky en y ,

$$(1.) \int e^{-ky} y^{m-1} dy = \frac{\int e^{-y} y^{m-1} dy}{k^m} = \frac{\Gamma(m)}{k^m},$$

les limites étant zéro et l'infini positif. Euler a été conduit par l'induction à remplacer la constante réelle k par une quantité de la forme $k + \theta\sqrt{-1}$, la partie réelle étant toujours positive, sans quoi l'intégrale deviendrait infinie. Il a obtenu de cette manière l'équation suivante

$$\int_0^\infty e^{-(k+\theta\sqrt{-1})y} y^{m-1} dy = \frac{\Gamma(m)}{(k+\theta\sqrt{-1})^m},$$

qui a été vérifiée depuis par M. Poisson **). L'équation précédente a

*) *Novi Comment. acad. Petrop. tom. XVI.*

**) Pour éviter toute ambiguïté, il convient de fixer le sens de quelques signes. Les lettres k et θ désignent deux quantités réelles et la première de plus positive, la notation $l(k + \theta\sqrt{-1})$ servira à remplacer l'expression $l(r) + \varphi\sqrt{-1}$, r étant la quantité positive $\sqrt{k^2 + \theta^2}$ et φ l'arc

non seulement lieu pour des valeurs réelles et positives de m , mais elle subsiste encore quand même m serait imaginaire, pourvu qu'alors la partie réelle de m fût toujours positive. C'est ce qu'on peut démontrer facilement par le même procédé qui a servi à la vérifier dans le cas de m réelle. Si donc nous désignons par p une quantité soumise à la seule restriction d'avoir sa partie réelle positive, nous avons

$$(2.) \int_0^\infty e^{-(k+\theta\sqrt{-1})y} y^{p-1} \partial y = \frac{\Gamma(p)}{(k+\theta\sqrt{-1})^p}.$$

Si l'on remplace dans cette dernière formule la quantité réelle quelconque θ par $x + l$, x et l étant des quantités réelles quelconques, et qu'on écrive ensuite simplement k à la place de $k + l\sqrt{-1}$, il viendra celle-ci

$$(3.) \int_0^\infty e^{-(k+x\sqrt{-1})y} y^{p-1} \partial y = \frac{\Gamma(p)}{(k+x\sqrt{-1})^p},$$

où x désigne une quantité réelle et k et p sont deux quantités soumises à la restriction d'avoir leurs parties réelles positives.

Outre la formule précédente, nous aurons encore besoin d'une autre formule dont on est redevable à Mr. Laplace. La constante a étant réelle et positive et b désignant une quantité soumise à la restriction d'avoir sa partie réelle positive, la formule dont nous parlons, est celle-ci:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{b^2 + x^2} \partial x = \frac{\pi}{b} e^{-ab}.$$

Nous l'écrirons d'une manière un peu différente, en remplaçant $\cos ax$ par $e^{-ax\sqrt{-1}}$, ce qui est permis, l'intégrale $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax}{b^2 + x^2} \partial x$, qui est composée d'éléments égaux deux à deux, mais de signes opposés, étant évidemment nulle. Nous avons donc

$$(4.) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ax\sqrt{-1}}}{b^2 + x^2} \partial x = \frac{\pi}{b} e^{-ba}.$$

L'équation (3.) subsistant pour toutes les valeurs réelles de x , on peut intégrer ses deux membres par rapport à cette quantité entre des limites quelconques, après les avoir multipliés par ∂x et par une fonction quelconque de x .

compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ déterminé par l'équation $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\theta}{k}$. Les suppositions précédentes étant conservées, et q désignant une quantité quelconque réelle ou imaginaire, $(k+\theta\sqrt{-1})^q$ indiquera la quantité $e^{q\log(k+\theta\sqrt{-1})} = e^{q\log(r)+q\varphi\sqrt{-1}}$. En vérifiant l'équation (2.), on trouve que cette équation n'a lieu qu'autant qu'on attache à la notation $(k+\theta\sqrt{-1})^{-m}$ le sens que je vais de définir.

Si l'on multiplie les deux membres par $\frac{e^{-cx}\sqrt{-1}}{b^2+x^2} \partial x$ (c étant réelle et positive et b conservant sa signification précédente) et qu'on intègre ensuite depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, on aura :

$$\int_0^\infty e^{-ky} y^{p-1} \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-(c+y)x}\sqrt{-1}}{b^2+x^2} \partial x \right) \partial y = \Gamma(p) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-cx}\sqrt{-1}}{(k+x\sqrt{-1})^p} \cdot \frac{\partial x}{b^2+x^2}.$$

Comme $c+y$ est positive (y ne devant recevoir que des valeurs positives dans l'intégration relative à cette variable), on aura en vertu de la formule (4.) :

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-(c+y)x}\sqrt{-1}}{b^2+x^2} \partial x = \frac{\pi}{b} e^{-bc} e^{-by}.$$

La substitution de cette valeur dans le premier membre le réduira à cette quantité :

$$\frac{\pi e^{-bc}}{b} \int_0^\infty e^{-(b+k)y} y^{p-1} \partial y,$$

ou ce qui est la même chose d'après l'équation (2.), la partie réelle de $b+k$ étant évidemment positive :

$$\frac{\pi \Gamma(p) e^{-bc}}{b(b+k)^p}.$$

Egalant cette quantité au second membre et effaçant le facteur $\Gamma(p)$ qui se trouvera commun aux deux membres l'on aura définitivement

$$(5.) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-cx}\sqrt{-1}}{(k+x\sqrt{-1})^p} \cdot \frac{\partial x}{b^2+x^2} = \frac{\pi e^{-bc}}{b(b+k)^p}.$$

En particulierisant les constantes de cette formule, on obtiendra toutes celles dont il est question dans le Mémoire sur les intégrales définies que M. Poisson a inséré dans le 18^{ième} cahier du journal de l'école polytechnique.

J'accentue maintenant les lettres k et p dans l'équation (3.), je multiplie ses deux membres par la quantité qui se trouve sous le signe somme dans la formule (5.) et je les intègre ensuite depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$.

On effectuera la double intégration comme on l'a fait pour obtenir l'équation (5.) avec la seule différence qu'au lieu de s'appuyer sur la formule (4.), il faudra s'appuyer sur l'équation (5.).

Tout calcul fait, on trouvera

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-cx}\sqrt{-1}}{b^2+x^2} \cdot \frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p} \cdot \frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}} \partial x = \frac{\pi e^{-bc}}{b} \cdot \frac{1}{(b+k)^p} \cdot \frac{1}{(b+k')^{p'}}.$$

En continuant de procéder ainsi, on arrivera à cette formule

$$(6.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cx}\sqrt{-1}}{b^2+x^2} \cdot \frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p} \cdot \frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}} \cdot \frac{1}{(k''+x\sqrt{-1})^{p''}} \cdots \partial x$$

$$= \frac{\pi e^{-bc}}{b} \cdot \frac{1}{(b+k)^p} \cdot \frac{1}{(b+k')^{p'}} \cdot \frac{1}{(b+k'')^{p''}} \cdots$$

dans laquelle les facteurs de la forme $\frac{1}{(k'''+x\sqrt{-1})^{p'''}}$ sont en nombre quelconque. Il faut se rappeler, que c désigne une quantité positive et que $b, k, p, k', p', k'', p'', \dots$ ou du moins les parties réelles de ces quantités sont également positives.

La formule (6.) fournit un grand nombre de conséquences; je me contenterai d'en indiquer une seule.

Si l'on désigne par h une quantité positive supérieure à l'unité, ou une quantité imaginaire ayant pour partie réelle une telle quantité, et par x une quantité réelle quelconque, la partie réelle de la quantité

$$l(h+x\sqrt{-1})$$

sera positive *).

On pourra par conséquent mettre cette expression à la place de $k+\theta\sqrt{-1}$ dans la formule (2.). On aura ainsi, en remplaçant de plus p par q (q étant une quantité du même genre, c'est-à-dire soumise aux mêmes restrictions que p)

$$(7.) \int_0^{\infty} e^{-y l(h+x\sqrt{-1})} y^{q-1} \partial y = \frac{\Gamma(q)}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q},$$

ou si l'on écrit simplement $\frac{1}{(h+x\sqrt{-1})^y}$ à la place de $e^{-y l(h+x\sqrt{-1})}$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^{q-1}}{(h+x\sqrt{-1})^y} \partial y = \frac{\Gamma(q)}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q}.$$

Je multiplie les deux membres de cette dernière équation par la quantité qui se trouve sous le signe somme dans l'équation (9.) et je les intègre ensuite depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$

$$\int_0^{\infty} y^{q-1} \partial y \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cx}\sqrt{-1}}{b^2+x^2} \cdot \frac{1}{(h+x\sqrt{-1})^y} \cdot \frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p} \cdot \frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}} \cdots \partial x \right)$$

$$= \Gamma(q) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-cx}\sqrt{-1}}{b^2+x^2} \left(\frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p} \cdot \frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}} \cdots \right) \frac{\partial x}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q}$$

l'intégrale relative à x du premier membre s'obtient au moyen de la formule (6.), y étant positive. En l'effectuant, le premier membre se réduira à

*) Soit $h = m+n\sqrt{-1}$, m et n étant réelles et m de plus positive et >1 , la partie réelle de $l(h+x\sqrt{-1})$ ou ce qui revient au même, de $l[m+(n+x)\sqrt{-1}]$ sera $\frac{1}{2} l[m^2+(n+x)^2]$, valeur qui sera toujours positive, attendu que la quantité $m^2+(n+x)^2$ ne pourra jamais s'abaisser ou dessous de la quantité positive m^2 , et à fortiori pas au dessous de l'unité, m étant >1 .

$$\frac{\pi e^{-bc}}{b} \cdot \frac{1}{(b+k)^p} \cdot \frac{1}{(b+k')^{p'}} \cdot \frac{1}{(b+k'')^{p''}} \cdots \int_0^\infty \frac{y^{q-1}}{(b+h)^q} dy.$$

Si l'on met dans cette quantité à la place de l'intégrale, qui y entre, sa valeur $\frac{\Gamma(q)}{[l(b+h)]^q}$, qu'on l'égalé au second membre de l'équation précédente et qu'on efface le facteur commun $\Gamma(q)$, on aura

$$(8.) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2} \left(\frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p} \cdot \frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}} \cdots \right) \frac{\partial x}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q} \\ = \frac{\pi e^{-bc}}{b} \left(\frac{1}{(b+k)^p} \cdot \frac{1}{(b+k')^{p'}} \cdots \right) \frac{1}{[l(b+h)]^q}.$$

Si l'on accentue les lettres h et q dans la formule (7.), qu'on multiplie les deux membres par la quantité qui se trouve sous le signe somme dans l'équation (8.) et qu'on les intègre ensuite depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, on arrivera à une formule semblable à la formule (8.), dans laquelle il y aura sous le signe $\int$ deux facteurs de la forme

$$\frac{1}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q}, \quad \frac{1}{[l(k'+x\sqrt{-1})]^{q'}}.$$

On pourra introduire de cette manière un nombre quelconque de ces facteurs, ce qui donnera la formule

$$(9.) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-cx\sqrt{-1}}}{b^2+x^2} \left(\frac{1}{(k+x\sqrt{-1})^p} \cdot \frac{1}{(k'+x\sqrt{-1})^{p'}} \cdots \right) \left(\frac{1}{[l(h+x\sqrt{-1})]^q} \cdot \frac{1}{[l(h'+x\sqrt{-1})]^{q'}} \cdots \right) dx \\ = \frac{\pi e^{-bc}}{b} \left(\frac{1}{(b+k)^p} \cdot \frac{1}{(b+k')^{p'}} \cdots \right) \left(\frac{1}{[l(b+h)]^q} \cdot \frac{1}{[l(b+h')]^{q'}} \cdots \right)$$

dans laquelle on suppose c positive, les parties réelles des quantités b ; k , k' , k'' , ...; p , p' , p'' , ...; q , q' , q'' , ...; h , h' , h'' , ... également positives, et les parties réelles des quantités de la dernière série h , h' , h'' , ... de plus supérieures à l'unité.

5.

Auflösung einer analytischen Aufgabe.

(In Folge der Aufgabe 7. S. 99. des dritten Bandes dieses Journals.)

(Von Herrn Th. Clausen zu Altona.)

Die Gleichung einer krummen Fläche zwischen rechtwinkligen Coordinaten sei gegeben:

$$1. \quad p \partial x + q \partial y + r \partial z = 0,$$

man soll in der Fläche eine Curve so ziehn, daß die z für gleich lange Bogenstücke der Curve, gleich viel von einander verschieden sind, oder daß

$$2. \quad \int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)} = z + \lambda z,$$

wo κ und λ Constanten bedeuten, und λ nicht größer als 1 ist.

Erhebt man die erste dieser Gleichungen und das Differential der zweiten ins Quadrat, so hat man folgende:

$$\begin{aligned} p^2 \partial x^2 + 2pq \partial x \partial y + q^2 \partial y^2 &= r^2 \partial z^2, \\ \partial x^2 &+ \partial y^2 = (\lambda^2 - 1) \partial z^2, \end{aligned}$$

die letztere mit $p^2 + q^2$ multiplicirt und von dem Producte die erste abgezogen giebt:

$$q^2 \partial x^2 - 2pq \partial x \partial y + p^2 \partial y^2 = (\lambda^2 - 1)(p^2 + q^2) \partial z^2,$$

oder

$$3. \quad q \partial x - p \partial y - \sqrt{(\lambda^2 - 1)(p^2 + q^2)} \partial z = 0.$$

Eliminirt man nun zwischen den Gleichungen 1. und 3. ∂z und substituirt in die daraus entspringende den aus dem Integral der Gleichung 1. folgenden Werth von z , so erhält man eine Differentialgleichung zwischen x und y , deren Integral die Gleichung der auf der Ebene der x und y projecirten Curve giebt.

6.

Lehrsatz (zu beweisen).

(Vom Herrn Prof. Gudermann zu Cleve.)

Sind zwei eckige Körper (Polyëder) K, K' (die Anzahl der Ecken eines jeden sei e) symmetrisch (symmetrisch gleich), so kann jeder in eine Menge m von kleineren Körpern so getheilt werden, daß die des einen einzeln congruent sind denen des andern. Die Menge m , die beliebig vergrößert werden kann, ist z. B.

$$m = 24(e - 2).$$

Bezeichnet ferner ε die Menge der an einem solchen Körper um irgend einer Ecke E herum, ihr zunächst liegenden Ecken (jede von ihnen muß mit der Ecke E immer zu einer und derselben Grenzfläche gehören), so ist auch

$$m = 12(2e - \varepsilon - 4).$$

Dieser Ausdruck ist offenbar ein Minimum, wenn die Ecke E unter allen Ecken des Körpers K eine solche ist, für welche ε nicht größer sein kann. Für eine Pyramide ist z. B. $\varepsilon = e - 1$ und also $m = 12(e - 3)$. Ist K ein prismatischer Körper mit nicht parallelen Kanten, so ist $\varepsilon = \frac{1}{2}e + 2$ und also $m = 18(e - 4)$. Das vorhin bezeichnete Minimum ist indessen nicht immer ein solches. Es leidet Ausnahmen bei Körpern von besonderer Beschaffenheit.

7.

Von den metrischen Relationen im Gebiete der Lineal-Geometrie.

(Vom Herrn Prof. Möbius zu Leipzig.)

Die Geometrie der geraden Linie oder die Lineal-Geometrie, ein Ausdruck, dessen sich zuerst der scharfsinnige Lambert *) bedient zu haben scheint, enthält alle diejenigen geometrischen Aufgaben, die sich bloß mit Hülfe des Lineals, ohne Anwendung des Zirkels, lösen lassen, und beschränkt sich eben so nur auf diejenigen Eigenschaften einer Figur, welche aus den Bedingungen hervorgehen, daß drei oder mehrere gewisse Punkte der Figur in Einer Geraden liegen, oder daß drei oder mehrere gewisse Gerade sich in Einem Punkte schneiden; auf Eigenschaften also, welche eine Figur unverändert beibehält, wie auch ihre Theile die Lage gegen einander ändern mögen, nur daß jede drei oder mehrere Punkte, welche Anfangs in einer Geraden lagen, auch fortwährend in einer Geraden bleiben. Die Beziehung, welche zwischen der so geänderten Figur und der anfänglichen statt findet, habe ich in meinem *Barycentrischen Calcul Collineations-Verwandtschaft* genannt und von ihr im 2ten Abschnitt, 5. — 8. Cap. gehandelt.

Es ist diese Beziehung oder Verwandtschaft, so lange nur von ebenen Figuren die Rede ist, einerlei mit derjenigen, welche zwischen einer ebenen Figur und ihrer perspectivischen Projection auf eine andere Ebene obwaltet. Liegen nemlich drei Punkte der erstern Figur in einer Geraden, so sind immer auch ihre Projectionen in einer Geraden enthalten, in derjenigen, worin die letztere Ebene von einer durch das Auge und die erstere Grade gelegten Ebene geschnitten wird. Und umgekehrt läßt sich zeigen, daß von zwei ebenen Figuren, welche in jener Verwandtschaft zu einander stehen, die eine immer als perspectivische Projection der andern angesehen werden kann (*Bar. Calc.* §. 230. Anmerk.). Doch habe ich von dieser an sich sehr fruchtbaren Ansicht in genannter Schrift

*) Lamberts freie Perspective. Anmerkungen und Zusätze S. 162.
Crelle's Journal. IV. Bd. 2. Hft.

keinen Gebrauch gemacht, da mir theils der Hilfsbegriff des Augenpunctes zu fremdartig schien, theils diese Ansicht bei Figuren im Raume nicht füglich mehr anwendbar ist. Ich bin daher a. a. O. von der gegenseitigen Beziehung der Figuren nach der geraden Linie unmittelbar ausgegangen, habe damit die hierhergehörigen Relationen, die graphischen, so wie die metrischen, entwickelt, und habe, was insbesondere die metrischen anlangt, den allgemeinen Character derselben, ihre verschiedenen Formen und gegenseitige Abhängigkeit zu bestimmen gesucht.

Da ich mich aber bei diesen Entwicklungen der barycentrischen Rechnung bedient habe, und hierdurch, so wie durch die neuen dabei gebrauchten Ausdrücke, Mancher von einem näheren Eingehen in meine Untersuchungen zurückgehalten werden mag, gleichwohl aber die gefundenen Resultate für die Geometrie nicht ohne einigen Werth sein dürften, so hat es mir zweckmässig geschienen, die gedachten Gegenstände im Vorliegenden mittelst der gewöhnlichen Coordinatenmethode, und somit allgemein verständlich, von Neuem zu behandeln, und dieses um so mehr, da die linealgeometrischen Untersuchungen in neuester Zeit, besonders von französischen Mathematikern, mit einer Art Vorliebe betrieben zu werden scheinen.

Außerdem aber, daß hier nur die gewöhnliche Coordinatenmethode zum Grunde gelegt ist, unterscheidet sich gegenwärtiger Aufsatz von dem, was oben erwähnte Schrift über diese Gegenstände enthält, durch mehrere neu hinzugekommene Bemerkungen, besonders aber durch die am Schlusse aufgestellten metrischen Relationen bei Kegelschnitten, die ich erst neuerdings gefunden habe. Um übrigens diesem Aufsatze einen nicht zu großen Umfang zu geben, habe ich mich bloß auf ebene Figuren beschränkt. — Die citirten §§. beziehen sich auf den *Baryc. Calcul.*

1) Von zwei Ebenen, deren gegenseitige Lage hierbei nicht in Rücksicht kommt, entspreche jedem Puncte der einen Ebene ein Punct in der andern so, daß für jede drei Puncte der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, die entsprechenden drei Puncte der andern ebenfalls in einer Geraden enthalten sind; daß folglich, wenn man in der einen Ebene eine Gerade zieht, die den Puncten dieser Geraden in der andern Ebene entsprechenden Puncte gleichfalls eine Gerade bilden; oder kürzer, daß jeder Geraden in der einen eine Gerade in der andern (folglich auch jeder krummen Linie in der einen eine krumme, nicht gerade Linie in der anderen) entspricht.

2) Um dieses gegenseitige Entsprechen der Punkte beider Ebenen analytisch auszudrücken, ziehe man in jeder derselben zwei sich unter beliebigem Winkel schneidende Coordinatenachsen, und nenne x, y die Coordinaten irgend eines Punktes der einen Ebene; t, u die Coordinaten des entsprechenden Punktes der andern. Hiernach müssen t sowohl als u Functionen von x und y sein:

$$t = F(x, y), \quad u = G(x, y).$$

Um die Formen dieser Functionen auszumitteln, nehme man an, es sei in der Ebene der t, u irgend eine gerade Linie gezogen, deren Gleichung:

$$\alpha t + \beta u + \gamma = 0.$$

Die Gleichung für die entsprechende Linie in der Ebene der x, y wird sein:

$$(1.) \quad \alpha F(x, y) + \beta G(x, y) + \gamma = 0.$$

Da nun diese Linie ebenfalls gerade sein soll, so muß die Gleichung (1.), so wie sie nach α, β, γ linear ist, auch nach x und y linear sein. Die allgemeinste Form einer solchen Gleichung ist aber:

(2.) $\alpha(ax + by + c) + \beta(fx + gy + h) + \gamma(x + my + n) = 0$,
wo in dem letzten Gliede der Coefficient von x weggelassen ist, indem man sich mit demselben alle übrigen Coefficienten $a, b, \dots m, n$ dividirt vorstellen kann. Aus der Identität der Gleichungen (1.) und (2.) für alle Werthe, welche man den Constanten α, β, γ ertheilen mag, folgt aber:

$$(3.) \quad F(x, y) = t = \frac{ax + by + c}{x + my + n}, \quad G(x, y) = u = \frac{x + gy + h}{x + my + n},$$

und hiermit sind die Formen der Functionen, welche t und u von x, y sein müssen, vollkommen bestimmt.

3) Drückt man mittelst der Gleichungen (3.) umgekehrt x und y durch t, u aus, so wird man Ausdrücke von derselben Form wie die vorigen erhalten, nemlich Brüche, deren Zähler und Nenner lineare Functionen von t und u , und deren Nenner überdies einander gleich sind; woraus zu schliessen, daß wenn jeder Geraden in der Ebene der t, u eine Gerade in der Ebene der x, y entspricht, auch umgekehrt jede Gerade der letztern Ebene eine Gerade in der erstern zur entsprechenden Linie hat.

Eben so erhellet, daß die Gleichungen (3.) ihre Form nicht ändern, wenn statt x und y oder statt t und u Ausdrücke von der Form $\delta x + \varepsilon y + \zeta$ oder $\lambda t + \mu u + \nu$ gesetzt werden, d. h. wenn man statt der an-

fänglichen Coordinatenaxen beliebige andere Linien zu Axen wählt; wie dies auch schon aus der Natur der Sache folgt.

Aus der Gleichung (3.) geht weiter hervor, daß einem in endlicher Entfernung vom Anfangspuncte der Coordinaten gelegenen Puncte der einen Ebene, in der andern auch ein unendlich entfernter Punct entsprechen kann, und daß einem unendlich entfernten Puncte der einen Ebene im Allgemeinen ein endlich gelegener in der andern entspricht. Ueberhaupt nemlich werden alle unendlich entfernten Puncte der Ebene der t, u , in der Ebene der x, y durch die Puncte der Geraden vorgestellt, deren Gleichung $x + my + n = 0$ ist; und eben so giebt es eine gewisse Gerade in der Ebene der t, u von der Beschaffenheit, daß jeder Punct der Ebene der x, y , welcher einem Puncte dieser Geraden entspricht, unendlich entfernt ist. — Bei der perspectivischen Projection ist diese Gerade einerlei mit derjenigen, in welcher eine durch das Auge, parallel mit der abzubildenden Ebene, gelegte Ebene die Tafelebene schneidet.

Von zwei oder mehreren Linien, welche mit einander parallel laufen, sind daher die entsprechenden Linien nicht ebenfalls einander parallel, sondern schneiden sich in einem Puncte. Jedem Systeme paralleler Linien in der einen Ebene gehört daher in der andern Ebene ein Punct zu: der Durchschnittspunct der den Parallelen des jedesmaligen Systems entsprechenden Geraden. Alle diese Puncte aber sind in einer und derselben Geraden enthalten, in der Geraden, deren Puncte den unendlich entfernten Puncten der erstern Ebene entsprechen.

4) In den zwei Gleichungen (3.) kommen acht von einander unabhängige Constanten a, b, c, f, g, h, m, n vor. Sie lassen sich bestimmen, wenn man von vier Puncten in der einen und den vier ihnen entsprechenden Puncten in der andern Ebene die Coordinaten kennt. Substituirt man diese der Reihe nach für x, y, t, u in den Gleichungen (3.), so erhält man 4 solcher Paare von Gleichungen, woraus sich die 8 Constanten, durch die Coordinaten der vier Paare sich entsprechender Puncte ausgedrückt, ableiten lassen. Auch können nunmehr für jeden fünften durch seine Coordinaten gegebenen Punct der einen Ebene die Coordinaten des entsprechenden Punctes in der andern gefunden werden. Man bemerke nur noch, daß, wenn jene Bestimmung der 8 Constanten ausführbar sein soll, von den anfänglichen vier Puncten in der einen, und folglich auch von den

vier ihnen entsprechenden in der andern Ebene, keine drei in gerader Linie liegen dürfen.

Wenn daher die Punkte zweier Ebenen in die jetzt in Rede stehende lineare Beziehung zu einander gesetzt werden sollen, so nehme man irgend 4 Punkte A, B, C, D in der einen und beliebige 4 Punkte A', B', C', D' in der andern Ebene, — nur dafs weder von den 4 erstern, noch von den 4 letztern irgend 3 in einer Geraden sind, — und setze sie einander entsprechend: A' dem A , . . . D' dem D . Hiermit ist für jeden fünften Punkt E der einen Ebene der Ort des entsprechenden fünften E' in der andern vollkommen bestimmt. Zwischen je vier Punkten, — dies folgt daraus schlüsslich, — und den ihnen entsprechenden, wo weder von jenen noch von diesen vier Punkten irgend drei in einer Geraden sind, kann daher keine hierhergehörige metrische Relation noch nicht statt finden, wohl aber wenn ein fünftes oder noch mehrere Paare sich entsprechender Punkte hinzu kommen.

5) Um jetzt diese Relationen zu entwickeln, wollen wir von dem speciellen Falle ausgehen, wo die in Betracht zu ziehenden Punkte der einen, und folglich auch die entsprechenden in der andern Ebene, in gerader Linie liegen. Heifsen $X, X', X'', \dots$ die Punkte in der Ebene der x, y , und $T, T', T'', \dots$ die ihnen entsprechenden in der Ebene der t, u . Weil in jeder der beiden Ebenen die Coordinatenachsen nach Willkühr gelegt werden können, so werde die Axe der x durch die Punkte $X, X', \dots$ und die Axe der t durch die Punkte $T, T', \dots$ gezogen. Seien hiernach die Abscissen von $X, X', \dots$ resp. $= x, x', \dots$; und von $T, T', \dots$ resp. $= t, t', \dots$, so hat man, weil die Ordinaten (y und u) für die einen sowohl als die andern Punkte null sind, folgende Gleichungen:

$$t = \frac{ax+c}{x+n}, \quad t' = \frac{ax'+c}{x'+n}, \quad t'' = \frac{ax''+c}{x''+n}, \quad \text{etc.}$$

Da in jeder derselben von den obigen acht Constanten nur drei noch vorkommen, so wird man durch Verbindung irgend vier solcher Gleichungen eine Gleichung zwischen den Abscissen von vier Paaren sich entsprechender Punkte allein erhalten können. Da ferner durch Annahme anderer Anfangspunkte in den Axen der x und t jene Gleichungen zwischen t und x ihrer Form nach offenbar unverändert bleiben und nur die darin vorkommenden Constanten a, c, n andere Werthe erhalten, so

wird auch die durch Elimination dieser Constanten hervorgehende Gleichung von den Anfangspuncten der Abscissen unabhängig sein und nur solche Gröſsen enthalten, wodurch die gegenseitige Lage der Puncte $X, X', \dots$ und $T, T', \dots$ selbst bestimmt wird.

Liegen daher die in Betracht gezogenen Puncte der einen und folglich auch die entsprechenden Puncte der andern Ebene in gerader Linie, so wird zwischen je vier Paaren derselben eine metrische Relation obwalten. Die zu ihrer Herleitung erforderliche Elimination von a, c, n läßt sich durch folgende Rechnung bewerkstelligen.

Zuerst hat man:

$$t' - t = \frac{(an - c)(x' - x)}{(x + n)(x' + n)}, \quad t'' - t' = \frac{(an - c)(x'' - x')}{(x' + n)(x'' + n)},$$

und daher

$$\frac{t' - t}{t'' - t'} = \frac{x'' + n}{x + n} \cdot \frac{x' - x}{x'' - x'},$$

und eben so

$$\frac{t''' - t}{t'' - t'''} = \frac{x''' + n}{x + n} \cdot \frac{x'' - x}{x'' - x'''},$$

folglich

$$\frac{t' - t}{t'' - t'} : \frac{t''' - t}{t'' - t'''} = \frac{x' - x}{x'' - x'} : \frac{x''' - x}{x'' - x'''}.$$

Ist nun M der Anfangspunct in der Axe der t , so hat man $t = MT$, $t' = MT'$, $t'' = MT''$, etc., von welchen Linien je zwei, wie MT und MT' , einerlei oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem die Puncte T und T' auf einerlei oder verschiedenen Seiten von M liegen. Hierdurch wird $t' - t = TT'$, $t'' - t' = T'T''$, etc., von denen man daher wiederum je zwei, wie TT' und $T'T''$, mit einerlei oder verschiedenen Zeichen zu nehmen hat, je nachdem die durch die Stellung der Buchstaben zugleich angedeuteten Richtungen, von T nach T' und von T' nach T'' , in der Axe der t einerlei oder einander entgegengesetzt sind. Auf gleiche Art ist $x' - x = XX'$, etc. in der Axe der x ; die gefundene Proportion aber erhält die Gestalt:

$$\frac{TT'}{T'T''} : \frac{TT''}{T''T'''} = \frac{XX'}{X'X''} : \frac{XX''}{X''X'''}.$$

6) Für drei Puncte A, B, C der einen Ebene, welche in einer Geraden liegen, können daher, — so lange noch keine andere Paare sich entsprechender Puncte angenommen worden, — die entsprechenden Puncte A', B', C' in der andern Ebene nach Belieben gewählt werden, nur daß

sie ebenfalls in einer Geraden sind. Für jeden vierten Punkt D in der Geraden ABC ist alsdann der entsprechende Punkt D' in der Geraden $A'B'C'$ durch die Proportion bestimmt:

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'D'}{D'C'},$$

wo nur die vorigen T, T', X, X' , mit $A, B, \dots A', B', \dots$ vertauscht sind.

Das erste Glied $\frac{AB}{BC}$ ist, wie aus dem vorhin Gesagten erhellet, positiv oder negativ, nachdem B zwischen oder auferhalb A und C liegt, und drückt das Verhältniß aus, nach welchem die Linie AC im Punkte B geschnitten wird. Dasselbe ist auch auf die drei übrigen Glieder der Proportion anzuwenden.

Das Verhältniß $\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC}$ ist daher nichts anderes, als das Verhältniß zwischen den Verhältnissen, nach welchen die Gerade AC das eine Mal in B und das andere Mal in D geschnitten wird. Ein solches aus vier Punkten in einer Geraden sich bildende Verhältniß habe ich (§. 182.) Doppelschnitts-Verhältniß genannt.

Da, wie die Folge zeigen wird, alle bei der Lineal-Geometrie vorkommenden metrischen Relationen aus D .Verhältnissen (Doppelschnitts-Verhältnissen) zusammengesetzt sind, oder sich doch auf solche zurückführen lassen, so sah ich mich zur Einführung einer abgekürzten Schreibart veranlaßt. Zu dem Ende drückte ich ein D .Verhältniß bloß dadurch aus, daß ich die vier Punkte, als den ersten und zweiten Grenzpunkt der geschnittenen Linie, den ersten und zweiten Schneidepunkt in der genannten Ordnung neben einander setzte, sie durch Commata unterschied und mit Haken einschloß (§. 183.) und hiernach das vorige D .Verhältniß also darstellte: (A, C, B, D) .

Das einfachste Beispiel eines D .Verhältnisses giebt die bekannte harmonische Theilung. Eine Linie AB wird in C und D harmonisch getheilt, wenn sie in C und D nach gleichen Verhältnissen getheilt wird, nur daß die Exponenten dieser Verhältnisse entgegengesetzte Zeichen haben, daß mithin von den zwei Punkten C und D der eine innerhalb, der andere auferhalb A und B liegt; also in Zeichen, wenn

$$AC : CB = -(AD : DB), \text{ d. i. } \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1;$$

oder, nach der kürzeren Schreibart, wenn

$$(A, B, C, D) = -1.$$

7) Das in Nr. 5. erhaltene Resultat können wir jetzt kürzlich so ausdrücken: Jedes *D.*Verhältniß zwischen vier Punkten einer Geraden in der einen Ebene ist dem aus den entsprechenden Punkten der andern gebildeten *D.*Verhältnisse gleich. Haben daher $A, B, \dots, A', B', \dots$ dieselbe Bedeutung wie in Nr. 6., so ist:

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D').$$

Hiemit kann, wie schon dort bemerkt wurde, wenn von diesen 8 Punkten 7 gegeben sind, der 8te gefunden werden. Auf eben die Art muß nun auch sein:

$(A, C, B, D) = (A', C', B', D')$, $(B, A, C, D) = (B', A', C', D')$ etc., wie auch die Buchstaben in jedem der zwei einander gleichen *D.*Verhältnisse mit einander vertauscht werden, wenn es nur in beiden auf gleiche Art geschieht. Da aber hierdurch keine neuen Bestimmungen für den achten Punkt hervorgehen können, so müssen die *D.*Verhältnisse (A, C, B, D) , (B, A, C, D) etc., und wie auch sonst noch die vier Elemente $A, \dots, D$ permutirt werden mögen, insgesamt Functionen von (A, B, C, D) , also auch von einander abhängig sein. Und in der That findet sich leicht, daß wenn man $(A, B, C, D) = a$ setzt:

$$\text{I. } (B, A, C, D) = \frac{1}{a}, \quad \text{II. } (A, C, B, D) = 1 - a, \quad \text{III. } (A, B, D, C) = \frac{1}{a}$$

ist, woraus man alle übrigen Permutationen berechnen kann. Denn von irgend einer der 24 Permutationen, welche aus 4 Elementen sich bilden lassen, kann man schrittweise zu jeder andern von ihnen gelangen, indem man nach und nach bald die zwei ersten, bald die zwei mittleren, bald die zwei letzten Elemente mit einander vertauscht. Durch Vertauschung der zwei ersten (I.) oder der zwei letzten (III.) erhält man aber den reciproken Werth des vorhergehenden, und durch Vertauschung der zwei mittleren Elemente (II.) die Ergänzung des vorhergehenden Werthes zur Einheit. Auf diese Weise ergibt sich, daß jedes der 24 *D.*Verhältnisse, welche sich aus den 4 Punkten bilden lassen, einen der 6 Werthe hat:

$$1) a, \quad 2) \frac{1}{a}, \quad 3) \frac{a-1}{a}, \quad 4) \frac{a}{a-1}, \quad 5) \frac{1}{1-a}, \quad 6) 1-a. \quad (\S. 184.)$$

NB. Setzt man diese 6 Werthe in ihrer Folge $= a, b, c, d, e, f$, so ist: $ab = cd = ef = 1$ und $b + c = d + e = f + a = 1$. Eine unend-

liche Reihe, deren erstes Glied $= \alpha$, und wo das Product aus jedem ungeraden Gliede in das nächstfolgende gerade $= 1$, so wie die Summe jedes geraden Gliedes und des nächstfolgenden ungeraden $= 1$ sein sollte, würde daher nichts anderes, als eine continuirliche Wiederholung jener 6 Werthe $\alpha, \frac{1}{\alpha}, \dots 1 - \alpha$ sein.

8) Um, wenn die Punkte A, B, C, D einer Geraden a , und von den entsprechenden Punkten $A', B', \dots$ der entsprechenden Geraden a' drei Punkte A', B', C' gegeben sind, den vierten D' zu finden, kann man sich folgender einfachen Construction bedienen.

Man setze die Linien a und a' (Fig. 1. Taf. II.) unter einem beliebigen Winkel an einander, so daß die Punkte A und A' zusammenfallen. Hierauf ziehe man BB' und CC' , welche sich in O schneiden, so ist dieser Durchschnitt von OD mit a' der gesuchte Punkt D' .

Um die Richtigkeit dieses Verfahrens zu beweisen, ist nur darzuthun, daß $(A, B', C', D') = (A, B, C, D)$. Man denke sich zu dem Ende eine der eben construirten Figur entsprechende gezeichnet; die den Punkten $A, B, \dots B', \dots O$ entsprechenden seien darin $\alpha, \beta, \dots \beta', \dots o$, und daher $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D)$, $(\alpha, \beta', \gamma', \delta') = (A, B', C', D')$. Werde nun, was immer geschehen kann (Nr. 3.), der Punkt O unendlich entfernt angenommen, so sind $\beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ mit einander parallel, und es verhält sich $\alpha\gamma:\gamma\beta = \alpha\gamma':\gamma'\beta'$, $\alpha\delta:\delta\beta = \alpha\delta':\delta'\beta'$. Mithin ist

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha, \beta', \gamma', \delta'),$$

also auch

$$(A, B, C, D) = (A, B', C', D').$$

9) Seien jetzt in der Geraden AB außer den 4 Punkten $A, \dots D$ noch mehrere andere $E, F, G, \dots$ gegeben. Die ihnen entsprechenden in der Geraden $A'B'$ heißen $E', F', G', \dots$. So wie nun nach willkürlicher Annahme von A', B', C' , der Punkt D' durch die Gleichheit der D . Verhältnisse

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D') = d$$

bestimmt wurde (Nr. 6.), so werden auch die übrigen Punkte $E', F', G', \dots$ mittelst der Gleichungen

$$(A, B, C, E) = (A', B', C', E') = e,$$

$$(A, B, C, F) = (A', B', C', F') = f,$$

u. s. w.

u. s. w.

sich finden lassen, und es werden nach verrichteter Construction auch

je zwei andere D .Verhältnisse zwischen sich entsprechenden Puncten, z. B.

$$(B, C, E, F) \text{ und } (B', C', E', F')$$

einander gleich sein, jedes derselben $= x$. Da nun zur Construction des Systems der Puncte $A', B', \dots E', F', \dots$, wegen der willkürlichen Bestimmung der drei ersten, auch schon die Kenntniß der Exponenten $d, e, f, \dots$ hinreicht, und sich alsdann aus der Construction der Werth von x selbst ergibt, so muß x eine Function von $d, e, f, \dots$ sein. Hat man also ein System von m Puncten $A, B, C, D, \dots$ in einer geraden Linie, so ist von den $m-3$ D .Verhältnissen $(d, e, f, \dots)$, welche die drei ersten Puncte A, B, C mit jedem der $m-3$ übrigen bilden, jedes andere D .Verhältniß (x) des Systems eine Function. Denkt man sich daher alle möglichen D .Verhältnisse zwischen den m Puncten als Functionen dieser $m-3$ Größen $d, e, f, \dots$ ausgedrückt, so kann man, wenn irgend $m-3$ von einander unabhängige dieser D .Verhältnisse gegeben sind, daraus die Werthe von $d, e, f, \dots$ und somit den Werth jedes andern D .Verhältnisses finden. Also:

Aus irgend $m-3$ von einander unabhängigen D .Verhältnissen eines Systems von m Puncten in einer geraden Linie kann jedes andere D .Verhältniß dieses Systems gefunden werden. (§. 187.)

So findet sich, wenn bei den 5 Puncten $A, \dots E$ die zwei D .Verhältnisse $(A, B, C, D) = p$ und $(B, C, D, E) = q$ gegeben sind, jedes dritte als Function von p und q , z. B. $(A, E, B, D) = (1-p)(1-q)$.

10) Die durch die Gleichheit der D .Verhältnisse ausgedrückte Relation zwischen zwei Systemen von Puncten in geraden Linien läßt sich auch noch auf eine andere merkwürdige Art darstellen. — Man hat:

$$d = (A, B, C, D) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

und daher

$$AD \cdot CB \cdot d = AC \cdot DB,$$

oder

$$AD(AB - AC)d = AC(AB - AD),$$

und wenn man mit $AB \cdot AC \cdot AD$ dividirt:

$$\frac{1-d}{AB} + \frac{d}{AC} = \frac{1}{AD},$$

und wenn man noch $1-d : d = \beta : \gamma$ setzt:

$$(a.) \quad \frac{\beta}{AB} + \frac{\gamma}{AC} = \frac{\beta + \gamma}{AD},$$

so wie umgekehrt hieraus die Gleichung:

$$(A, B, C, D) = d = \frac{\gamma}{\beta + \gamma},$$

und hieraus weiter die Gleichung:

$$(A', B', C', D') = \frac{\gamma}{\beta + \gamma}$$

folgt. Besteht daher zwischen den Abschnitten AB, AC, AD die Relation (α), so muß auch für die entsprechenden Abschnitte $A'B', etc.$

$$(\alpha') \quad \frac{\beta}{A'B'} + \frac{\gamma}{A'C'} = \frac{\beta + \gamma}{A'D'}$$

sein; d. h. ist AD das harmonische Mittel von AB und AC für die Coefficienten β und γ , so ist es auch $A'D'$ von $A'B'$ und $A'C'$ für dieselben Coefficienten.

Daß diese Relation auf jede grössere Zahl von Paaren sich entsprechender Punkte in geraden Linien ausgedehnt werden kann, so daß, wenn

$$\frac{\beta}{AB} + \frac{\gamma}{AC} + \frac{\delta}{AD} + \dots = \frac{\beta + \gamma + \delta + \dots}{AM}$$

ist, dieselbe Gleichung noch besteht, wenn man für $A, B, \dots M$ die entsprechenden Punkte $A', B', \dots M'$ setzt, dies zeigt Poncelet in seinem *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* im 3ten Hefte des 3ten Bandes dieses Journals, Seite 240.

Um diese Erweiterung des vorigen Satzes mit Hülfe der Lehre von den D -Verhältnissen zu beweisen, so folgt aus der angenommenen Gleichung:

$$\beta \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AM} \right) + \gamma \left(\frac{1}{AC} - \frac{1}{AM} \right) + \delta \left(\frac{1}{AD} - \frac{1}{AM} \right) + \dots = 0,$$

d. i.

$$\beta \cdot \frac{BM}{AB \cdot AM} + \gamma \cdot \frac{CM}{AC \cdot AM} + \delta \cdot \frac{DM}{AD \cdot AM} + \dots = 0,$$

also auch

$$\beta \cdot \frac{BM}{AB} : \frac{PM}{AP} + \gamma \cdot \frac{CM}{AC} : \frac{PM}{AP} + \delta \cdot \frac{DM}{AD} : \frac{PM}{AP} + \dots = 0,$$

wo P einen beliebigen Punkt der Geraden $AB \dots$ bezeichnet; und weil

$$\frac{BM}{AB} : \frac{PM}{AP} = \frac{AP}{PM} : \frac{AB}{BM} = (A, M, P, B), \text{ etc.},$$

so kommt:

$$\beta(A, M, P, B) + \gamma(A, M, P, C) + \delta(A, M, P, D) + \dots = 0.$$

Wegen der Unveränderlichkeit der D -Verhältnisse von dem einen Systeme zum andern ist daher auch:

$$\beta(A', M', P', B') + \gamma(A', M', P', C') + \dots = 0,$$

woraus sich auf umgekehrtem Wege

$$\frac{\beta}{A'B'} + \frac{\gamma}{A'C'} + \dots = \frac{\beta + \gamma + \dots}{A'M'}$$

ergiebt.

11) Wir gehen nunmehr zu den Relationen zwischen zwei Systemen von Punkten über, wo die Punkte jedes Systems für sich nicht mehr, wie bisher, bloß in einer Geraden, sondern in einer Ebene überhaupt liegen. Seien demnach A, B, C, D (Fig. 2.) irgend vier Punkte der einen Ebene, von denen keine drei in einer Geraden sind, und A', B', C', D' die ihnen entsprechenden Punkte in der andern, von denen ebenfalls keine drei in einer Geraden liegen. Ausser diesen negativen Bedingungen finden zwischen beiden Systemen keine weiteren statt, und die erstern vier Punkte sowohl, als die vier letztern, können ganz nach Willkür genommen werden. Mit jedem fünften Punkte E aber, der zu den vier erstern hinzukommt, wird auch der entsprechende Punkt E' in der Ebene der vier letztern bestimmt sein (Nr. 4.).

Um nun E' zu finden, wenn E gegeben ist, hat man auch hier bloß das Prinzip von der Gleichheit der D .Verhältnisse in Anwendung zu bringen.

Man ziehe zu dem Ende BD, BE , welche AC in M, P treffen, und AD, AE , welche BC in N, Q schneiden. Auf dieselbe Art werden M', P', N', Q' in der andern Ebene bestimmt, wo E' , und damit P', Q' , einstweilen als schon bekannt vorausgesetzt werden. Da nun B, B' und D, D' zwei Paare sich entsprechender Punkte sind, so wird auch jedem andern Punkte der Linie BD ein Punkt in $B'D'$, und eben so jedem Punkte in AC ein Punkt in $A'C'$, folglich dem Punkte M , als dem gemeinschaftlichen Punkte der BD und AC , der Durchschnittspunkt M' von $B'D'$ und $A'C'$ entsprechen. Auf gleiche Art sind auch N und N', P und P', Q und Q' Paare sich entsprechender Punkte. Es liegen aber A, C, M, P und die ihnen entsprechenden Punkte A', C', M', P' in geraden Linien. Mithin muß sein:

$$\text{I. } \frac{AM}{MC} : \frac{AP}{PC} = \frac{A'M'}{M'C'} : \frac{A'P'}{P'C'},$$

woraus sich P finden läßt, da alle übrigen in dieser Proportion vorkommenden Punkte gegeben sind. — Eben so wird Q' durch die Gleichheit

der D -Verhältnisse (B, C, N, Q) und (B', C', N', Q') gefunden. Hiermit ergibt sich endlich E' als der gegenseitige Durchschnitt von $B'P'$ und $A'Q'$.

12) So wie der Punct E' , so kann auch für jeden andern Punct in der ersten Ebene der entsprechende Punct in der zweiten durch zwei Gleichungen zwischen D -Verhältnissen gefunden werden, woraus nothwendig folgt, daß alle metrischen Relationen zwischen beiden Systemen auf die Gleichheit ihrer D -Verhältnisse hinauskommen, und daß eine solche Relation im allgemeinen Falle, wo von den in Betracht kommenden Puncten keine drei in einer Geraden liegen, zwischen nicht weniger als fünf Paaren sich entsprechender Puncte bestehen kann.

Die zur Aufstellung einer solchen Relation im Vorigen angewendeten Hülfpuncte M, P oder N, Q und die ihnen entsprechenden M', P' , etc. können folgendergestalt beseitigt werden. Es ist ein bekannter Satz, daß wenn eine Gerade AC von einer andern BD im Puncte M geschnitten wird, das Verhältniß, nach welchem dieses geschieht,

$$AM:CM = \text{dem Verhältnisse der Dreiecke } ABD:CBD$$

ist. Auf gleiche Art hat man, weil BE die AC in P schneidet,

$$AP:CP = ABE:CBE$$

und eben so in der andern Figur:

$$A'M':C'M' = A'B'D':C'B'D', \quad A'P':C'P' = \text{etc.}$$

Hierdurch aber verwandelt sich die obige Proportion I. in:

$$\text{II. } \frac{ABD}{CBD} : \frac{ABE}{CBE} = \frac{A'B'D'}{C'B'D'} : \frac{A'B'E'}{C'B'E'}.$$

Sind demnach $A, \dots E$ irgend fünf Puncte der einen Ebene, und $A', \dots E'$ die ihnen entsprechenden in der andern, so findet zwischen den durch ihre Verbindung gebildeten Dreiecken immer die Proportion II. statt.

Da die fünf Paare sich entsprechender Puncte ganz nach Belieben zu nehmen sind, so können auch die in II. sie bezeichnenden Buchstaben willkürlich, nur in beiden Systemen auf einerlei Weise, mit einander vertauscht werden. So folgt z. B. durch Verwechselung des A mit B und des A' mit B' :

$$\frac{BAD}{CAD} : \frac{BAE}{CAE} = \frac{B'A'D'}{C'A'D'} : \frac{B'A'E'}{C'A'E'},$$

eine Proportion, welche auch geradezu aus der Gleichung der D -Verhältnisse (B, C, N, Q) und (B', C', N', Q') (Nr. 11.) entspringt.

13) Wenn es nicht darauf ankommt, bei Angabe der von der einen Ebene zur andern constant bleibenden Verhältnisse nur die möglich kleinste Anzahl ($= 5$) willkürlich genommener Punkte zuzulassen, so kann man diesen Verhältnissen noch mehrere andere Formen geben, die ihrer symmetrischen Bildung wegen angeführt zu werden verdienen. — Werde die Linie AB (Fig. 3.) von den Linien CD und EF in den Punkten M und N geschnitten, so ist, wie in Nr. 12.:

$$AM:BM = ACD:BCD,$$

$$AN:BN = AEF:BEF,$$

und folglich das Verhältniß

$$\text{II.}^* (ACD:BCD):(AEF:BEF)$$

dem D . Verhältnisse $(AM:MB):(AN:NB)$ gleich, und daher das eben so aus den 6 entsprechenden Punkten $A', \dots F'$ gebildete von gleichem Werthe; wobei man noch bemerke, daß von den 4 Dreiecken des Verhältnisses II.^* die zwei ersten und die zwei letzten einerlei Grundlinien (CD und EF), das erste und dritte aber, so wie das zweite und vierte einerlei Spitzen (A und B) haben.

Kürzer noch kann man daher dieses Verhältniß ausdrücken durch

$$(Aa:Ba):(Ab:Bb) = \frac{Aa}{Ba}:\frac{Bb}{Ab},$$

wo a, b für die Linien CD, EF gesetzt sind, und somit Aa das Dreieck bezeichnet, welches A zur Spitze und a zur Grundlinie hat, etc.

14) Seien jetzt $A, B, C, \dots$ mehrere Punkte und $a, b, c, \dots$ mehrere gerade Linien von bestimmter Länge in der einen Ebene, so ist, wie wir eben gesehen haben, von dieser Ebene zur andern das Verhältniß

$$\frac{Aa}{Ba}:\frac{Bb}{Ab} = \alpha$$

constant; und eben so müssen es auch die Verhältnisse

$$\frac{Ab}{Cb} \cdot \frac{Cc}{Ac} = \beta, \quad \frac{Ac}{Dc} \cdot \frac{Dd}{Ad} = \gamma, \quad \frac{Ad}{Ed} \cdot \frac{Ee}{Ae} = \delta, \quad \text{etc.}$$

sein. Bildet man aus ihnen die Producte $\alpha\beta, \alpha\beta\gamma, \alpha\beta\gamma\delta$, etc., so bekommt man:

$$\text{III.} \quad \frac{Aa}{Ba} \cdot \frac{Bb}{Cb} \cdot \frac{Cc}{Ac},$$

$$\text{IV.} \quad \frac{Aa}{Ba} \cdot \frac{Bb}{Cb} \cdot \frac{Cc}{Dc} \cdot \frac{Dd}{Ad},$$

$$\text{V.} \quad \frac{Aa}{Ba} \cdot \frac{Bb}{Cb} \cdot \frac{Cc}{Dc} \cdot \frac{Dd}{Ed} \cdot \frac{Ee}{Ae}, \quad \text{etc.,}$$

zusammengesetzte Verhältnisse, die daher gleichfalls von der einen Ebene zur andern constant sein müssen.

Es lassen sich aber diese Verhältnisse noch anschaulicher darstellen, wenn man statt der Linien $a, b, c, \dots$ ihre Durchschnitte mit den, die Punkte $A, B, C, \dots$ unter einander verbindenden Linien einführt. Werde nemlich die Linie AB von a im Punkte M , BC von b in N , CA und CD von c in O und P , DA und DE von d in Q und R , EA von e in S , etc. geschnitten, so ist, nach dem in Nr. 12. angeführten Satze:

$$\frac{Aa}{Ba} = \frac{AM}{BM}, \quad \frac{Bb}{Cb} = \frac{BN}{CN}, \quad \frac{Cc}{Ac} = \frac{CO}{AO}, \quad \frac{Cc}{Dc} = \frac{CP}{DP}, \quad \frac{Dd}{Ad} = \frac{DQ}{AQ}, \text{ etc.}$$

und die Verhältnisse III., IV., V., etc. werden damit:

$$\text{III.*} \quad \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CO}{OA},$$

$$\text{IV.*} \quad \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA},$$

$$\text{V.*} \quad \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DR}{RE} \cdot \frac{ES}{SA}, \text{ etc. *)},$$

wobei jeder einzelne Factor, wie $\frac{AM}{BM}$, das Verhältniß ausdrückt, nach welchem der zweimal gesetzte Punkt M die Linie schneidet, welche die zwei andern Punkte A und B verbindet, und wo daher die drei in jedem Factor vorkommenden Punkte immer in einer Geraden liegen.

Hiernach ist das Verhältniß III.* zusammengesetzt aus den drei Verhältnissen, nach welchen die drei Seiten AB, BC, CA des Dreiecks ABC von den resp. in ihnen liegenden Punkten M, N, O getheilt werden. Eben so ist IV.* das Verhältniß, nach welchem die vier Seiten $AB, \dots DA$ des Vierecks $ABCD$ resp. in M, N, P, Q geschnitten werden; u. s. w. Ich habe daher die solcher Gestalt gebildeten Verhältnisse III.*, IV.*, V.* u. s. w. Dreieck-, Viereck-, Fünfeckschnitts-Verhältnisse u. s. w. und überhaupt Vieleckschnitts-Verhältnisse genannt (§. 215.).

15) Jedes Vieleckschnitts-Verhältniß ist daher von der einen Ebene zur andern constant; d. h. sind A und A', B und $B', \dots I$ und I' mehrere Paare sich entsprechender Punkte, also

*) Dafs hierbei die Buchstaben in den Nennern der einzelnen Factoren in umgekehrter Folge geschrieben worden, MB statt des vorigen BM , etc., ist deshalb geschehen, um diese Formeln mit denen im *Baryc. Calcul* übereinstimmend darzustellen. Die absoluten Werthe derselben ändern sich dadurch nicht, sondern nur von III., V., VII. etc. die Vorzeichen.

$AB, \dots I$ und $A'B', \dots I'$ zwei sich entsprechende Vielecke, sind ferner $M, N, \dots X$ resp. in den Seiten $AB, BC, \dots IA$ der erstern Vielecks nach Belieben genommene Punkte, und $M', N', \dots X'$ die entsprechenden Punkte, die daher resp. in den Seiten $A'B', B'C', \dots I'A'$ des andern Vielecks liegen werden, so ist das Product aus den Verhältnissen $AM:MB, BN:NC$, etc. $IX:XA$, nach welchen die Seiten $AB, BC, \dots IA$ des einen Vielecks von den in ihnen gewählten Punkten $M, N, \dots X$ getheilt werden, von derselben Grösse, als das Product, welches aus den entsprechenden Verhältnissen $A'M':M'B', B'N':N'C'$, etc. $I'X':X'A'$ des andern Vielecks zusammengesetzt wird.

Dieser Satz gilt immer, wie auch die Punkte $A, B, \dots I$ oder die Spitzen des Vielecks liegen mögen, selbst wenn sie alle, und folglich auch die Schneidepunkte $M, N, \dots X$, in einer und derselben Geraden enthalten sind; er gilt immer, welches auch die Zahl der Spitzen sein mag, selbst wenn deren nur zwei sind, und mithin das Vieleck zum Zweieck wird. Denn seien A, B die beiden Spitzen und folglich AB, BA die beiden Seiten, M, N ihre Schneidepunkte, so reducirt sich das Vielecksverhältniss auf $(AM:MB)(BN:NA)$, welches einerlei mit dem D . Verhältniss $(AM:MB):(AN:NB)$, und mithin von der einen Ebene zur andern ebenfalls constant ist. Ein D . Verhältniss lässt sich daher auch als das einfachste Vielecksverhältniss, nemlich als ein Zweieckschnittsverhältniss, betrachten.

Der Begriff des Vielecks ist demnach hier in ganz allgemeiner Bedeutung zu nehmen und darunter eine Figur zu verstehen, die von einer in sich zurückkehrenden, gebrochenen geraden Linie gebildet wird. Die Rückkehr in sich selbst, welche daran erkannt wird, dass bei jeder der Formeln III.*, IV.*, V.*, etc. die Vielecksspitze im Zähler des ersten Factors zugleich im Nenner des letzten vorkommt, und das überhaupt von je zwei nebeneinander stehenden Factors die Spitzen im Nenner des vorangehenden und im Zähler des nachfolgenden einerlei sind, — diese Rückkehr ist etwas wesentlich Nothwendiges, indem mit Weglassung irgend eines der Factors, als wodurch die Schliessung des Vielecks unterbrochen würde, auch die Unveränderlichkeit des Verhältnisses von der einen Ebene zur andern nicht mehr statt finden würde.

16. Sind in einer Ebene m Punkte gegeben, und sollen in einer andern Ebene die ihnen entsprechenden Punkte gefunden werden, so kann

man von letzteren irgend 4 nach Willkühr nehmen, worauf jeder der $m - 4$ übrigen Punkte dadurch gefunden wird, daß man zwei die Lage des Punktes in der ersten Ebene bestimmende D .Verhältnisse in der andern Ebene von gleicher GröÙe macht (Nr. 11.). Zur Construction des ganzen Systems in der andern Ebene sind daher nicht mehr als $2(m - 4)$ D .Verhältnisse überzutragen nöthig, und es werden sodann auch je zwei andere D .Verhältnisse zwischen sich entsprechenden Punkten beider Ebenen einander gleich sein. — Es folgt hieraus, wie in Nr. 9., daß von den gedachten $2(m - 4)$ D .Verhältnissen alle andern in den Figuren noch vorkommenden D .Verhältnisse abhängig sind, und überhaupt, weil jedes Vielecksverhältniß als eine Function von D .Verhältnissen, und jedes D .Verhältniß zugleich als Vielecksverhältniß betrachtet werden kann (Nr. 15.):

Sind bei einem Systeme von m Punkten in einer Ebene von den aus der gegenseitigen Verbindung der Punkte durch gerade Linien entstehenden Vielecksverhältnissen irgend $2m - 8$ von einander unabhängige gegeben, so kann daraus jedes andere Vielecksverhältniß der Figur gefunden werden (§. 233.). Oder mit andern Worten:

Zwischen je $2m - 7$ Vielecksverhältnissen, welche durch geradlinige Verbindung von m Punkten in einer Ebene entstehen, findet immer wenigstens eine Gleichung statt.

Uebrigens ist diese geradlinige Verbindung keinesweges bloß auf die $\frac{1}{2}m(m - 1)$ Linien zu beschränken, welche die m Punkte zu zweien mit einander verknüpfen. Denn die hierdurch in beiden Ebenen entstehenden Durchschnittspunkte entsprechen sich wiederum (Nr. 11.); die durch je zwei derselben, die noch nicht durch eine Gerade verbunden waren, von Neuem gezogenen Geraden sind daher gleichfalls sich entsprechende Linien, und folglich die neuen durch sie gebildeten D .- und Vielecks-Verhältnisse von der einen Ebene zur andern einander gleich. Wie weit man daher auch die Verbindung der m Punkte fortsetzen mag, so daß immer die entstehenden Durchschnitte von Neuem unter sich und mit den anfänglichen m Punkten oder den schon vorhandenen Durchschnitten verbunden werden, so können doch alle hiermit sich bildenden Viel-

ecksverhältnisse aus irgend $2m - 8$ derselben, die von einander unabhängig sind, gefunden werden.

17) Eine ganz besondere Aufmerksamkeit verdient der so eben erhaltene Satz für den Fall, wo m seinen möglich kleinsten Werth $= 4$ hat, und daher $2m - 8 = 0$ wird. Bei einem Systeme von 4 Punkten in einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, werden daher alle durch fortgesetzte Verbindung dieser Punkte entstehenden *D.*- und Vielecks-Verhältnisse sich finden lassen, ohne daß ein einziges von ihnen gegeben zu sein braucht. Dieses merkwürdige Resultat erhellet auch schon daraus, daß bei der Construction eines entsprechenden Systems die ersten vier, also gegenwärtig alle Punkte nach Willkühr genommen werden können, und daß dann alle durch geradlinige Verbindung der Punkte in beiden Systemen auf gleiche Art sich bildenden Vielecksverhältnisse von gleicher Größe sind; daß also diese Verhältnisse, oder vielmehr die Exponenten derselben, keinesweges von der gegenseitigen Lage der anfänglichen 4 Punkte, sondern bloß von der Art und Weise abhängen, wie die 4 Punkte nach und nach mit einander verbunden worden sind.

Aber noch mehr: diese Exponenten müssen immer rational sein. Denn sind die vier Punkte gegeben und außerdem noch die Art ihrer Verbindung durch gerade Linien, wodurch man zu den irgend ein Vielecksverhältniß bildenden Punkten gelangt, so kann man damit die letztern Punkte immer ohne Zweideutigkeit finden. Der Exponent des Vielecksverhältnisses, der nach dem Vorigen nicht von der gegenseitigen Lage der erstern vier Punkte, sondern bloß von ihrer Verbindungsart durch gerade Linien abhängt, kann daher ebenfalls keine zwei- oder mehrdeutigen Ausdrücke, also keine Wurzelgrößen enthalten, und noch weniger irrationale Zahlen, die aus transcendenten Operationen entspringen; er muß folglich eine ganze Zahl oder ein rationaler Bruch sein.

18) Die Figur, welche hervorgeht, wenn man vier Punkte einer Ebene, von denen keine drei in einer Geraden liegen, durch Gerade verbindet, die drei damit entstehenden Durchschnitte abermals zu zweien durch Gerade zusammenzieht, und diese geradlinige Verbindung der immer neu entstehenden Durchschnitte unter sich und mit den schon vorhandenen, so weit als man will, fortsetzt, diese Figur habe ich ein Netz genannt (§. 200.), die Linien selbst und ihre gegenseitigen Durchschnitte-

puncte, die Linien und Puncte des Netzes, und die vier Puncte, von denen die Construction ausgeht, die Hauptpuncte des Netzes.

Das in dem Vorhergehenden erhaltene Resultat läßt sich hiermit einfach so ausdrücken:

Jedes in dem Netze sich bildende Vielecksverhältniß hat einen rationalen, bloß von der Constructionsart und nicht zugleich von der gegenseitigen Lage der vier Hauptpuncte abhängigen Werth (§. 202. und §. 215.).

Sind daher A, B, C, D die vier Hauptpuncte, P irgend ein Netzpunct, so sind auch die Durchschnitte von PD mit AB und BC , welche M und N heißen, Netzpuncte, und folglich das D . Verhältniß:

$$(PM:MD):(PN:ND),$$

also auch das ihm gleiche Verhältniß zwischen Dreiecken:

$$(PAB:ABD):(PBC:BCD)$$

rational, und dieses letztere, wie man auch die vier Hauptpuncte darin mit einander vertauschen mag. Die Rationalität dieses Verhältnisses kann als die charakteristische Eigenschaft eines Netzpunctes P in Bezug auf die vier Hauptpuncte betrachtet werden, indem sich zeigen läßt (§. 203.), daß umgekehrt jeder Punct der Ebene, für welchen jene Verhältnisse von Dreiecken zwischen ihm und den Hauptpuncten rational sind, ein Punct des Netzes ist, und mithin durch fortgesetzte Verbindung der Hauptpuncte gefunden werden kann.

Hieraus läßt sich weiter die nicht weniger merkwürdige Eigenschaft eines Netzes folgern (§. 205.), daß, wenn nächst den vier Hauptpuncten noch irgend ein fünfter Punct der Ebene gegeben ist, man durch fortgesetzte Verbindung der vier ersteren einen Punct finden kann, der mit dem fünften entweder zusammenfällt, oder von ihm um einen Abstand entfernt ist, der kleiner ist, als jeder gegebene; — daß folglich, wenn das Weben des Netzes ohne Aufhören fortgesetzt wird, die Ebene in allen ihren Theilen und nach allen Richtungen mit Puncten und Linien des Netzes angefüllt wird.

19) Wir wollen jetzt die in Nr. 17. erwiesene Rationalität der Vielecksverhältnisse im Netze durch einige Beispiele erläutern.

1. Man verbinde die vier Puncte A, B, C, D (Fig. 4.) zu zweien, durch gerade Linien, und nenne die Durchschnitte von AD mit BC , von BD mit CA , von CD mit AB resp. F, G, H , so gehören diese Puncte dem

aus A, B, C, D entstehenden Netze an. Ohne daher noch den Exponenten des Dreieckschnitts-Verhältnisses

$$(BF:FC)(CG:GA)(AH:HB)$$

zu kennen, kann man doch schon im Voraus behaupten, daß er eine rationale Zahl sein werde. Nun weiß man aus den ersten Elementen, daß, wenn ABC ein gleichseitiges Dreieck, und D der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten sind, und folglich der Exponent jenes Verhältnisses $= 1$ ist. Mithin muß er auch für jede andere Lage der vier Punkte $A \dots D, = 1$ sein.

2. Ein anderes bei dieser Figur vorkommendes Dreiecksverhältniß ist

$$(BC:CF)(FD:DA)(AH:HB),$$

nach welchem die Seiten BF, FA, AB des Dreiecks ABF in C, D, H geschnitten werden. Auch dieses Verhältniß muß daher einen constanten, rationalen Werth haben. Es ist aber in dem vorhin zu Hülfe genommenen speciellen Falle $FD = DH$, und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $AHD, AFB: DH:DA = BF:BA = 1:2$, also auch $FD:DA = \frac{1}{2}$; ferner $BC:CF = -2$ und $AH:HB = 1$. Hierdurch wird der Werth jenes Dreiecksverhältnisses bei dieser und folglich auch bei jeder andern Lage von $A, \dots D, = \frac{1}{2} \cdot -2 \cdot 1 = -1$; d. h.

Das Product aus den drei Verhältnissen, nach welchen die Seiten eines Dreiecks von einer Transversale geschnitten werden, ist immer der negativen Einheit gleich.

Anmerkung. Daraus, daß dieses Product immer negativ sein soll, erkennt man, daß von den drei Factoren desselben entweder einer oder alle drei negativ sein müssen; daß folglich die Transversale entweder zwei Seiten selbst und die dritte in ihrer Verlängerung, oder alle drei Seiten in ihren Verlängerungen schneidet. Vergl. Nr. 5. — Ebenso ist bei dem vorhergehenden Dreiecksverhältnisse

$$(BF:FC)(CG:GA)(AH:HB),$$

weil es der positiven Einheit gleich gefunden wurde, entweder jeder der drei Factoren, oder nur einer positiv, und daher sind entweder alle drei Punkte F, G, H in ihren resp. Seiten selbst, oder nur einer derselben in seiner Seite, die beiden andern in den Verlängerungen der ihrigen enthalten, und außerdem kein dritter Fall möglich. — Wiewohl sich nun dieses auch aus höchst einfachen geometrischen Betrachtungen ergibt, so

ist doch eine solche, bis jetzt wohl noch nicht angestellte Vergleichung der Formel mit der Figur schon an sich bemerkenswerth, und kann bei weniger einfachen Figuren selbst Nutzen bringen, indem man dadurch zu Resultaten über die gegenseitige Lage der Theile geführt wird, die man auf anderem Wege nicht eben so leicht erhalten haben würde.

So findet sich z. B. (§. 199. c.), daß jedes Vielecksverhältniß, bei welchem die Schneidepunkte in einer Geraden liegen, der Einheit gleich ist, und zwar der positiven oder negativen, nachdem die Seitenzahl des Vielecks gerade oder ungerade ist. Hieraus folgt auf ähnliche Weise, daß, wenn ein Vieleck, dieses in der allgemeinen Bedeutung wie Nr. 15. genommen, von einer Transversale geschnitten wird, die Anzahl der in ihren Verlängerungen geschnittenen Seiten beim Vieleck mit gerader Seitenzahl gerade, mit ungerader ungerade ist; daß folglich, welches auch die Seitenzahl sein mag, die Anzahl der innerhalb ihrer Endpunkte geschnittenen Seiten immer gerade ist. — Läßt man die Seiten des Vielecks unendlich klein werden, so entsteht eine in sich zurücklaufende Curve, die daher von einer Geraden immer in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten wird. Auch gilt dieses noch, wenn man statt der Geraden eine zweite Curve setzt, die sich entweder über alle Grenzen ausdehnt, oder ebenfalls in sich zurückläuft.

3. Man ziehe GH , welche BC in K schneide. Um den Werth des damit entstehenden nothwendig rationalen D . Verhältnisses

$$(BF:FC):(BK:KC)$$

zu finden, so ist, unter der in 1. gemachten Annahme, $BF:FC = 1$, HG mit BC parallel, und daher BK der CK gleich zu achten, also $BK:KC = -1$, wodurch der Werth jenes D . Verhältnisses $= -1$ wird; d. h. BC wird in F und K harmonisch getheilt (Nr. 6.).

4. Schneide GH die AD in L .

Man ziehe noch FG , welche AB , CD in M , N treffe, und werde der Exponent des Viereckschnitts-Verhältnisses:

$$(AM:MB)(BK:KC)(CN:ND)(DL:LA)$$

verlangt, nach welchem die Seiten des Vierecks $ABCD$ in M , K , N , L geschnitten werden. Am einfachsten gelangt man dazu, wenn man sich A , B , C , D als die Spitzen eines Parallelogramms vorstellt. Denn alsdann werden, wie man bald aus (Fig. 5.) wahrnimmt, M , K , N , L die Mittelpunkte der Seiten desselben, und mithin der gesuchte Exponent $= 1$.

Dafs übrigens, und wie mit Hülfe dieser neuen Ansicht der Figur die Werthe der vorigen Doppel- und Dreiecksverhältnisse hätten gefunden werden können, bedarf keiner Erörterung.

5. Sei O der Durchschnitt von AC mit BL , so findet sich das Dreiecksverhältnifs:

$$(BL:LO)(OC:CG)(GD:DB) = -2.$$

Zeichnet man nemlich $ABCD$ als Parallelogramm und nennt Z den Durchschnitt von BL mit GM , so verhält sich:

$LO:OZ = AO:OG = LA:GZ = KB:GZ = LK:LG = 2:1$.
Da ferner $LZ = ZB$, so ist $LO = 2OZ = \frac{2}{3}LZ = \frac{1}{3}LB$; $OG = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{3}AG = \frac{1}{3}GC$; $OC = \frac{2}{3}GC$; und endlich $GD = \frac{1}{2}BD$, woraus der angegebene Werth des Dreiecksverhältnisses hervorgeht.

6. Sei P der Durchschnitt von FH mit BL , so hat man:

$$(BL:LO)(OP:PB) = 3.$$

Denn beim Parallelogramm ist $LB = 3LO$ und $OP = BP$, weil F und H , also auch P , unendlich entfernte Punkte sind.

7. Dividirt man das Zweiecksverhältnifs 6. in das Dreiecksverhältnifs 5., so kommt das Dreiecksverhältnifs:

$$(OC:CG)(GD:DB)(BP:PO) = -\frac{2}{3}.$$

20) Werden fünf willkürlich in einer Ebene genommene Punkte durch Gerade verbunden, oder was dasselbe ist: construirt man ein Netz, indem man von diesen 5 Punkten, als Hauptpunkten ausgeht, so sind nicht mehr alle damit sich bildenden Vielecksverhältnisse blofs von der Art der Verbindung abhängig; wohl aber wird jedes von ihnen sich bestimmen lassen, wenn man irgend $2 \cdot 5 - 8 = 2$ von einander unabhängige derselben kennt (Nr. 16.).

Beispiel. Seien A, B, C, D, E (Fig. 6.) fünf beliebige Punkte in einer Ebene. Man ziehe die 5 Geraden AB, BC, CD, DE, EA , welche sich in F, G, H, I, K schneiden, wie die Figur zeigt. Zwischen den 4 Punkten, in denen jede der 5 Geraden von den jedesmal 4 übrigen geschnitten wird, bilden sich mehrere D .Verhältnisse, die aber, in jeder Geraden für sich, von einander abhängig sind (Nr. 8.). Werde daher verlangt: aus einem der D .Verhältnisse in BC und aus einem in DE ein D .Verhältnifs in CD zu finden.

Weil die Seiten FC, CD, DF des Dreiecks CDF von EA in I, G, E und von AB in B, K, H geschnitten werden, so hat man (Nr. 19. 2.):

$$(FI:IC)(CG:GD)(DE:EF) = -1,$$

$$(FB:BC)(CK:KD)(DH:HF) = -1,$$

und wenn man die letztere Gleichung in die erstere dividirt:

$$\left(\frac{FI}{IC} \cdot \frac{FB}{BC}\right) \left(\frac{FH}{HD} \cdot \frac{FE}{ED}\right) = \left(\frac{CK}{KD} \cdot \frac{CG}{GD}\right).$$

Setzt man daher die D . Verhältnisse:

$$(F, C, I, B) = p, \quad (F, D, H, E) = q,$$

so ist

$$(C, D, K, G) = pq;$$

und eben so muß jedes andere D .- und Vielecksverhältniß dieser Figur durch p und q ausgedrückt werden können. So finde ich mittelst baryc. Rechnung, daß die beiden Fünfeckschnitt-Verhältnisse:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HE} \cdot \frac{EI}{IA} \quad \text{und} \quad \frac{AG}{GE} \cdot \frac{EF}{FD} \cdot \frac{DK}{KC} \cdot \frac{CI}{IB} \cdot \frac{BH}{HA}$$

einander gleich sind, jedes von ihnen

$$= \frac{pq-1}{pq(p-1)(q-1)}.$$

21) Hat man ein System von 6, 7, 8, ... willkürlich in einer Ebene genommenen Punkten, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ein System von eben so vielen in der Ebene beliebig gezogenen Linien, so müssen 4, 6, 8, ... von einander unabhängige Vielecksverhältnisse gegeben sein, um die Werthe aller übrigen finden zu können. Indessen sind die hierher gehörigen Aufgaben zu complicirt, als daß ein Beispiel an diesem Ort gegeben werden könnte. Auch möchten die Hilfsmittel, welche man in der Geometrie gewöhnlich in Anwendung zu bringen pflegt, bei Aufgaben solcher Art nur mühsam zum Ziele führen. Die Vortheile, welche der barycentrische Calcul hierbei gewährt, der sich zu diesem Zweck noch besonders vereinfachen läßt, habe ich in dem 8ten Capitel des 2ten Abschnitts auseinander gesetzt, worauf ich daher Diejenigen, welche sich mit diesem Gegenstande näher beschäftigen wollen, verweise. — Hat man es bloß mit einem Systeme beliebig gezogener Geraden zu thun, deren Durchschnittspunkte nicht wiederum durch Gerade verbunden werden, so reicht auch diejenige Methode aus, die im 5ten Capitel desselben Abschnitts erklärt worden, und welche in einem besondern Algorithmus mit D . Verhältnissen besteht.

22) Den Beschluß dieses Aufsatzes mögen einige Sätze über die metrischen Relationen machen, welche in der Lineal-Geometrie bei Kegelschnitten vorkommen.

Ist in der einen der beiden oft gedachten Ebenen eine Curve verzeichnet, und die Gleichung derselben zwischen den recht- oder schiefwinkligen Coordinaten t und u gegeben, so erhält man die Gleichung für die entsprechende Curve zwischen den Coordinaten x, y in der andern Ebene, wenn man in der Gleichung zwischen t und u ,

$$t = \frac{ax+by+c}{x+my+n}, \quad u = \frac{fx+gy+h}{x+my+n}$$

setzt (Nr. 2.). Da die Nenner in diesen Ausdrücken für t und u einander gleich sind, so ersieht man leicht, daß die solchergestalt sich ergebende Gleichung zwischen x und y mit der Gleichung zwischen t und u von demselben Grade ist, daß also je zwei sich entsprechende Curven immer zu derselben Ordnung gehören. So wie daher einer Geraden immer eine Gerade entspricht, so entspricht auch jedem Kegelschnitte ein Kegelschnitt, u. s. w.

Sind ferner A und A' zwei, in sich entsprechenden Curven liegende, sich entsprechende Punkte, so werden auch die in A und A' an die Curven gezogenen Tangenten zwei sich entsprechende Geraden sein. Denn ist B ein dem A unendlich nahe liegender Punkt der einen Curve, so wird der ihm entsprechende B' in der andern Curve dem A' unendlich nahe sein, weil unendlich kleine Aenderungen von t und u auch nur unendlich kleine Aenderungen von x und y , im Allgemeinen wenigstens, zur Folge haben. Die Geraden AB und $A'B'$, so weit man will, verlängert gedacht, d. i. die an A und A' gezogenen Tangenten, werden sich daher gleichfalls entsprechen.

Werde nur noch erinnert, daß einer Asymptote der einen Curve im Allgemeinen nicht auch eine Asymptote, sondern eine Tangente der andern entspricht, weil, wenn t, u unendlich groß sind, deshalb nicht auch x, y unendlich sein müssen.

23) Ist in der einen Ebene ein Kegelschnitt gegeben, so kann man diesem, so lange noch keine andern Paare sich entsprechender Punkte bestimmt sind, nicht nur irgend einen beliebig in der andern Ebene verzeichneten Kegelschnitt entsprechend setzen, sondern noch irgend drei Punkten des einen Kegelschnitts drei willkürlich in dem andern genomme Punkte sich entsprechen lassen.

Seien, um dieses zu beweisen, k und k' (Fig. 7.) zwei beliebige Kegelschnitte, k in der einen, k' in der andern Ebene; A, B, C irgend

drei Punkte in k ; A', B', C' in k' , die man den ersteren A, B, C resp. entsprechend setze. Man ziehe noch an k in A und B zwei Tangenten, welche sich in D schneiden, und an k' in A' und B' zwei Tangenten, welche sich in D' schneiden, und setze D und D' sich entsprechend, so hat man jetzt vier Paare sich entsprechender Punkte: A und A' , ... D und D' , und es ist damit für jeden fünften Punkt der einen Ebene der entsprechende in der andern bestimmt (Nr. 4.). Ich behaupte nun, daß nach Voraussetzung dieser vier Paare sich entsprechender Punkte jedem Punkte in k ein Punkt in k' entsprechen wird, oder kürzer, daß k und k' sich entsprechende Curven sein werden. Denn entspräche dem Kegelschnitte k nicht k' , sondern die Curve l , so müßte diese erstlich nach Nr. 22. wieder ein Kegelschnitt sein.

Da ferner k durch A, B, C geht und von AD und BD berührt wird, so müssen auch A', B', C' in l liegen und $A'D', B'D'$ Tangenten von l sein. Diese Eigenschaften von l kommen aber auch dem Kegelschnitte k' zu.

Da nun ein Kegelschnitt durch drei in ihm liegende Punkte und durch die an zwei derselben gezogene Tangenten immer und ohne Zweideutigkeit bestimmt ist, so kann l von k' nicht verschieden sein.

Hat man daher zwei Kegelschnitte k und k' , und setzt drei Punkte A, B, C des ersten, dreien Punkten A', B', C' des letztern entsprechend, so wird auch jedem andern Punkte in k ein Punkt in k' entsprechen, d. h. k und k' werden sich entsprechende Curven sein, wenn man noch als viertes Paar sich entsprechender Punkte die Durchschnitte D und D' der in A, B und A', B' an k und k' gezogenen Tangenten hinzufügt. Je zwei Kegelschnitte k und k' lassen sich daher immer als sich entsprechende Curven betrachten, und überdies noch irgend dreien Punkten A, B, C des einen beliebige drei Punkte A', B', C' des andern entsprechend annehmen.

24) Man ziehe noch an C, C' Tangenten, welche $AB, A'B'$ in E, E' schneiden, ziehe $CD, C'D'$, welche $AB, A'B'$ in F, F' treffen, so sind E, E' und F, F' zwei neue Paare sich entsprechender Punkte, und folglich die D . Verhältnisse (A, B, E, F) und (A', B', E', F') einander gleich. Wie daher auch in einem Kegelschnitte die drei Punkte A, B, C genommen werden mögen, so muß immer, wenn E und F auf die besagte Weise daraus abgeleitet worden, der Exponent des D . Verhältnisses

$$(AE:EB):(AF:FB)$$

denselben Werth haben, also eine bestimmte und zwar rationale Zahl sein, weil E und F aus A, B, C nur auf eine Weise gefunden werden können. Es ist aber, wenn man für den Kegelschnitt einen Kreis und C zum Mittelpuncte des Bogens AB nimmt, E in der Geraden AB unendlich entfernt, und F der Mittelpunct dieser Geraden; folglich $AE:EB = -1$, $AF:FB = 1$, und daher der Exponent des D .Verhältnisses in diesem speciellen Falle, also auch in allen andern Fällen, $= -1$; d. h. AB wird in E und F harmonisch getheilt. —

Schneide ferner AC die BD in G , GF den Kegelschnitt in H , DH die AB in K , so muß, nach derselben Art wie vorhin zu schliessen, der Exponent des dadurch sich bildenden D .Verhältnisses (A, B, F, K) eine bestimmte Zahl sein, die aber nicht mehr rational ist, sondern eine Quadratwurzel enthält, weil die Gerade FG den Kegelschnitt nothwendig zweimal trifft, wodurch der Punct H , und somit auch der Punct K , zweideutig wird. In der That findet sich

$(A, B, F, K) = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ und folglich $(A, B, F, K_1) = \frac{1}{2}(3 \mp \sqrt{5})$, wenn FG dem Kegelschnitt zum zweiten Male in H_1 begegnet, und DH_1 , die AB in K_1 schneidet.

Um sich hiervon auf das Einfachste zu überzeugen, nehme man für den Kegelschnitt einen Kreis, A, B als Endpunkte eines Durchmessers und C als Mittelpunct des Halbkreises ACB . Alsdann sind FC, KH, BG auf AB normal, F ist der Mittelpunct des Kreises, und $AF = FB = FC = FH =$ dem Halbmesser, den man $= 1$ setze.

Hieraus folgt weiter $BG = 2$, $FG = \sqrt{5}$, und es verhält sich

$$FB:FK = FG:FH = \sqrt{5}:1,$$

also

$$FB + FK:FB - FK = \sqrt{5} + 1:\sqrt{5} - 1,$$

d. i.

$$AK:KB = 5 - 1:(\sqrt{5} - 1)^2 = 2:3 - \sqrt{5}.$$

Da ferner $AF:FB = 1:1$, so hat man

$$(AF:FB):(AK:KB) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

wie zu erweisen war.

Auf eben die Art wird nun auch jedes andere durch ferneres Ziehen gerader Linien in unserer Figur entstehende D .- oder Vieleckschnitts-Verhältniß einen bestimmten Werth haben, und wir erhalten somit folgenden merkwürdigen Satz:

„Verbindet man drei in einem Kegelschnitte liegende Punkte durch gerade Linien, und zieht in denselben Punkten Tangenten an den Kegelschnitt; erweitert man hierauf die Figur, indem man immer die schon vorhandenen Durchschnitte, welche die Geraden mit einander und mit dem Kegelschnitte machen, durch neue Geraden verbindet und von den außerhalb des Kegelschnitts fallenden Durchschnitten Tangenten an denselben zieht, deren Berührungspunkte man wiederum unter sich und mit jenen Durchschnitten verbindet: so ist, wie weit man auch diese Construction fortsetzen mag, der Werth jedes somit sich bildenden Vieleckschnitts-Verhältnisses weder von den Parametern des Kegelschnittes noch von der Lage der anfänglichen drei Punkte in denselben, sondern bloß von der Art und Weise abhängig, auf welche man, von jenen drei Punkten ausgehend, zu den Punkten des Vieleckschnitts-Verhältnisses gelangt ist. Der Werth eines solchen ist daher immer eine bestimmte Zahl. Weil aber jede durch einen Punkt innerhalb des Kegelschnittes geführte Gerade denselben in zwei Punkten schneidet, und weil von jedem Punkte außerhalb des Kegelschnitts zwei Tangenten an ihn gezogen werden können, so wird diese Zahl im Allgemeinen nicht rational sein, sondern Quadratwurzeln enthalten.“

25) Die so eben beschriebene Figur kann, analog dem Obigen (Nr. 18.), ein Netz heißen, dessen Construction von einem Kegelschnitte und drei in demselben enthaltenen Punkten A, B, C ausgeht. Wir wollen jetzt dieser Construction noch einen vierten, willkürlich in dem Kegelschnitte anzunehmenden Punkt M zum Grunde legen. Um den entsprechenden Punkt M' in der andern Ebene zu finden, ziehe man DM , welche AB in N schneide; bestimme hierauf in $A'B'$ den Punkt N' so, daß $(A', B', E', N') = (A, B, E, N)$, und ziehe $D'N'$, welche den Kegelschnitt $A'B'C'$ in zwei Punkten schneiden wird. Um zu entscheiden, welcher von ihnen der dem M entsprechende M' ist, denke man sich den Kegelschnitt ABC von einem Punkte so durchlaufen, daß dieser, von A ausgehend, nach B kommt, ohne dem C zu begegnen, wo er dann, nach derselben Richtung von B fortgehend, nach C kommen wird, ohne A zu treffen, und von C nach A zurück, ohne B zu treffen *).

*) Wie dieser Forderung bei der Ellipse immer Genüge geschehen kann, sieht man ohne Weiteres. — Eine Parabel hat man sich hierbei als eine sich in das Unendliche erstreckende Ellipse zu denken, so daß der beschreibende Punkt, nachdem er unendlich weit in dem einen Schenkel fortgegangen ist, in den andern Schenkel aus dem Unendlichen zurückkehrt. — Bei einer

Man bezeichne die drei somit durchlaufenen Theile durch $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, so sind ihnen die auf gleiche Art in dem andern Kegelschnitte bestimmten und durch $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'A'}$ zu bezeichnenden Theile resp. entsprechend; und wenn daher M z. B. in $\overline{BC}$ liegt, wie dies in unserer Figur der Fall ist, so muß auch M' in $\overline{B'C'}$ begriffen sein.

Irgend zwei *VL.* Verhältnisse, die in beiden Ebenen aus den Kegelschnitten und aus den in jedem derselben liegenden 4 Punkten durch Construction von Netzen 'auf gleiche Art sich bilden, werden nunmehr einander gleich sein, woraus wir zunächst schliessen, daß mit dem *D.* Verhältnisse (A, B, E, N) des einen Netzes auch alle übrigen in demselben vorkommenden *D.*- und *VL.* Verhältnisse gegeben sind; und überhaupt:

Alle *VL.* Verhältnisse eines Netzes, das aus einem Kegelschnitte und vier in ihm liegenden Punkten construirt ist, lassen sich finden, wenn irgend eines derselben, das von allen vier Punkten zugleich abhängt, gegeben ist.

26) So wie der Punkt M , so wird auch jeder andere willkürliche Punkt des Kegelschnitts, in Bezug auf die drei ersten A, B, C , durch ein *D.* Verhältniß bestimmt. Für jeden neu hinzukommenden willkürlichen Punkt des Kegelschnitts muß daher 'ein *D.*- oder *VL.* Verhältniß mehr gegeben sein. Da nun bei vier Punkten ein *VL.* Verhältniß nöthig war, so ziehen wir die allgemeine Folgerung:

Hat man einen Kegelschnitt und beliebige m in demselben liegende Punkte, so müssen in dem daraus construirten Netze irgend $m - 3$ von einander unabhängige *VL.* Verhältnisse gegeben sein, um alle übrigen finden zu können.

Es ist dieser Satz als Verallgemeinerung des Satzes in Nr. 9. zu betrachten, wo bei einem Systeme von m Punkten in einer geraden Linie, ebenfalls $m - 3$ *VL.* Verhältnisse gegeben sein mußten. — Man bemerke noch, daß bei einem Kegelschnitte und 5 Punkten desselben $5 - 3 = 2$ *VL.* Verhältnisse erfordert werden, eben so, als wenn man ein System von 5 Punkten in einer Ebene überhaupt hat (Nr. 20.). Der Grund davon liegt in dem bekannten Satze, daß durch 5 Punkte einer Ebene immer ein Kegelschnitt und nur einer beschrieben werden kann,

Hyperbel muß der Punkt beide Male, wenn er sich unendlich weit nach der Richtung einer Asymptote entfernt hat, nach dem entgegengesetzten, unendlich entfernten Ende derselben Asymptote überspringen und in das Endliche zurückkehren.

dafs folglich mit irgend 5 Puncten der Ebene immer auch schon der Kegelschnitt, in welchem sie liegen, vollkommen bestimmt ist. Sechs Puncte einer Ebene liegen im Allgemeinen nicht in einem Kegelschnitte. Soll daher auch der sechste Punct in dem Kegelschnitte enthalten sein, welcher durch die 5 ersten geht, so ist eben damit eine Bedingung für die Lage des sechsten in der Ebene gegeben, und da zur vollkommenen Bestimmung eines Punctes in einer Ebene zwei Bedingungen erfordert werden, so bedarf es noch einer zweiten Bedingung für den sechsten, und so für jeden andern Punct des Kegelschnitts. Diese zweite Bedingung ist aber das für jeden sechsten Punct hinzuzufügende *VI.* Verhältnifs.

27) Man habe in einer Ebene einen Kegelschnitt und ausserhalb desselben m beliebig genommene Puncte, wo $m > 1$. Von jedem derselben ziehe man an den Kegelschnitt zwei Tangenten, so erhält man $2m$ Berührungspuncte, die ebenfalls von einander unabhängig sein werden, und aus denen man hinwiederum die ersten m Puncte finden kann. Construiert man nun aus den letztern $2m$ Puncten in Verbindung mit dem Kegelschnitte ein Netz, so sind nach dem Vorigen alle *VI.* Verhältnisse desselben bekannt, wenn $2m - 3$ derselben gegeben sind. Dieselbe Anzahl von *VI.* Verhältnissen muß daher auch gegeben sein, wenn man aus dem Kegelschnitte und den erstern m Puncten ein Netz construiert, in dem dieses Netz mit dem vorigen aus $2m$ Puncten construirten identisch ist.

Man denke sich jetzt in der Ebene eines Kegelschnitts n beliebige Puncte innerhalb desselben, wo $n > 2$. Man nehme diese Puncte in einer gewissen Ordnung und verbinde hiernach den ersten mit dem zweiten, den zweiten mit dem dritten u. s. w., den n ten mit dem ersten durch gerade Linien, deren jede den Kegelschnitt in zwei Puncten schneiden wird. Dies giebt ein System von n von einander unabhängigen Geraden und von $2n$ sich gegenseitig nicht bestimmenden Puncten im Kegelschnitte, aus welchen letzteren man umgekehrt die n Geraden und aus diesen die n anfänglichen Puncte finden kann. Das aus dem Kegelschnitte und den n anfänglichen Puncten construierte Netz ist daher einerlei mit demjenigen, welchem der Kegelschnitt und die darin enthaltenen $2n$ Puncte zum Grunde liegen, und ist folglich seinen *VI.* Verhältnissen nach vollkommen bestimmt, wenn $2n - 3$ derselben gegeben sind.

Hat man also endlich in der Ebene eines Kegelschnitts $m + n$ Puncte, von denen m ausserhalb, n innerhalb der Curve liegen, so erhält

man auf die eben besagte Weise ein System von $2m + 2n$ von einander unabhängigen Punkten im Kegelschnitte selbst, aus denen sich hinwiederum die anfänglichen $m + n$ Punkte finden lassen; — und damit ein System von $2(m + n) - 3$ von einander unabhängigen *VL.* Verhältnissen. Daß dieses gilt, auch wenn, gegen die vorhin gemachte Annahme, in $m + n$ entweder $m = 1$ oder $n = 1$ oder 2 ist (nur muß $m + n > 1$ sein) davon überzeugt man sich leicht selbst, und kann somit den Satz folgendergestalt ganz allgemein ausdrücken:

Wird aus einem Kegelschnitte und irgend m in seiner Ebene, nicht in ihm selbst, liegenden Punkten ein Netz construirt, so müssen $2m - 3$ von einander unabhängige *VL.* Verhältnisse gegeben sein, um alle übrigen finden zu können, — also fünf *VL.* Verhältnisse mehr, als wenn die m Punkte bloß unter sich, nicht auch mit dem Kegelschnitte, in Verbindung gesetzt werden.

Beispiel. A, B (Fig. 8.) sind zwei Punkte innerhalb eines Kegelschnitts; die Gerade AB schneide ihn in C und D . Man ziehe in diesen Punkten Tangenten, welche sich in E treffen; ziehe EA, EB , welche dem Kegelschnitte in F, G begegnen; ziehe endlich DF, CG , welche CE, DE in H, I schneiden.

Hier ist also die Zahl der anfänglichen Punkte, $m = 2$. Damit wird $2m - 3 = 1$, und es braucht daher bei dieser Figur nur ein *VL.* Verhältniß gegeben zu sein, um die Werthe aller übrigen zu kennen; d. h. zwischen je zwei *VL.* Verhältnissen wird eine Gleichung obwalten.

So ist z. B. die zwischen den zwei Dreieckschnitts-Verhältnissen

$$\begin{aligned} (CA:AD)(DI:IE)(EH:HC) &= p, \\ (CB:BD)(DI:IE)(EH:HC) &= q \end{aligned}$$

statt findende Gleichung: $pq = 1$,

ein Resultat, welches sich auch durch die Proportion darstellen läßt:

$$\frac{CA}{AD} \cdot \frac{DB}{BC} = \left(\frac{CH}{HE}\right)^2 : \left(\frac{DI}{IE}\right)^2.$$

Eben so muß jedes andere *VL.* Verhältniß durch p oder q ausgedrückt werden können, wie das *D.* Verhältniß

$$(CA:AD):(CB:BD) = p:q = p^2$$

und das ihm gleiche *Vr.* Verhältniß:

$$(CE:EH)(HF:FD)(DE:EI)(IG:GC) = p^2.$$

Druckfehler. In dieser Abhandlung steht einigemahl „Dreieck-Verhältniß, Vieleck-Verhältniß etc.“
Man lese statt dessen „Dreieckschnitts-Verhältniß, Vieleckschnitts-Verhältniß etc.“

8.

Mémoire sur une classe particulière d'équations
résolubles algébriquement.

(Par Mr. N. H. Abel.)

Il est vrai que les équations algébriques ne sont pas résolubles généralement; mais il y en a une classe particulière de tous les degrés dont la résolution algébrique est possible. Telles sont p. ex. les équations de la forme $x^n - 1 = 0$. La résolution de ces équations est fondée sur certaines relations qui existent entre les racines. J'ai essayé à généraliser cette remarque en supposant que deux racines d'une équation donnée soient tellement liées entre elles, qu'on puisse exprimer rationnellement l'une par l'autre, et j'ai trouvé, qu'une telle équation peut toujours être résolue à l'aide d'un certain nombre d'équations moins élevées. Il y a même des cas où l'on peut résoudre algébriquement l'équation donnée elle-même. Cela arrive p. ex. toutes les fois que, l'équation donnée étant irréductible, son degré est un nombre premier. La même chose a lieu encore si toutes les racines d'une équation peuvent être exprimées par

$$x, \theta x, \theta^2 x, \theta^3 x, \dots \theta^{n-1} x, \text{ où } \theta^n x = x,$$

θx étant une fonction rationnelle de x , et $\theta^2 x, \theta^3 x, \dots$ des fonctions de la même forme de θx , prise deux fois, trois fois, etc. . . .

L'équation $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, si n est un nombre premier, est dans ce cas; car en désignant par x une racine primitive pour le module n , on peut, comme on sait, exprimer les $n - 1$ racines par:

$$x, x^\alpha, x^{\alpha^2}, x^{\alpha^3}, \dots x^{\alpha^{n-2}}, \text{ où } x^{\alpha^{n-1}} = x,$$

c'est-à-dire en faisant $x^\alpha = \theta x$, par:

$$x, \theta x, \theta^2 x, \theta^3 x, \dots \theta^{n-2} x, \text{ où } \theta^{n-1} x = x.$$

La même propriété convient à une certaine classe d'équations qu'offre la théorie des fonctions elliptiques.

En général je suis parvenu à démontrer le théorème suivant:

„Si les racines d'une équation d'un degré quelconque sont liées entre-elles de sorte, que toutes ces racines peuvent être exprimées rationnellement au moyen de l'une d'elles, que nous désignerons par x ; si de plus, en dé-

signant par θx , $\theta_1 x$ deux autres quelconques des racines en question, on a

$$\theta\theta_1 x = \theta_1\theta x:$$

l'équation, dont il s'agit sera toujours résoluble algébriquement. De même si l'on suppose l'équation irréductible et son degré exprimé par

$$\alpha_1^{v_1} \cdot \alpha_2^{v_2} \cdot \dots \cdot \alpha_\omega^{v_\omega},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\omega$ sont des nombres premiers différens, on pourra réduire la résolution de cette équation à celle de v_1 équations du degré α_1 , de v_2 équations du degré α_2 , de v_3 équations du degré α_3 etc."

Après l'avoir présenté généralement cette théorie, je l'appliquerai aux fonctions circulaires et elliptiques.

§. 1.

Nous allons d'abord considérer le cas où l'on suppose que deux racines d'une équation irréductible *) soient liées tellement entre-elles, que l'une puisse être exprimé rationnellement par l'autre.

Soit

$$1. \quad \varphi x = 0$$

une équation du degré μ , et x' et x les deux racines qui sont liées entre-elles par l'équation

$$2. \quad x' = \theta x,$$

où θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues. La quantité x' étant une des racines de l'équation, on aura $\varphi(x') = 0$ et en vertu de (2.)

$$3. \quad \varphi(\theta x) = 0.$$

Je dis maintenant que cette équation aura encore lieu, si au lieu de x , on met une autre racine quelconque de l'équation proposée. On aura effectivement le théorème suivant **).

*) Une équation $\varphi x = 0$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles d'un certain nombre de quantités connues $a, b, c, \dots$ s'appelle irréductible, lorsqu'il est impossible d'exprimer ses racines par une équation moins élevée, dont les coefficients soient également des fonctions rationnelles de $a, b, c, \dots$

**) Ce théorème se démontrera aisément comme il suit:

Quelle que soit la fonction rationnelle $f x$, on peut toujours faire $f x = \frac{M}{N}$, où M et N sont des fonctions entières de x , qui n'ont pas de facteur commun; mais une fonction de x peut toujours être mise sous la forme $P + Q \cdot \varphi x$, où P et Q sont des fonctions entières, telles, que le

Théorème I. „Si une des racines d'une équation irréductible $\Phi x = 0$ satisfait à une autre équation $f x = 0$, où $f x$ désigne une fonction rationnelle de x et des quantités connues qu'on suppose contenues dans Φx ; cette dernière équation se trouvera encore satisfaite en mettant au lieu de x une racine quelconque de l'équation $\Phi x = 0$; mais le premier membre de l'équation (3.) est une fonction rationnelle de x , donc on aura

$$4. \quad \Phi(\theta x) = 0, \text{ si } \Phi x = 0,$$

c'est-à-dire, si x est une racine de l'équation $\Phi x = 0$, la quantité θx le sera également.

Maintenant, en vertu de ce qui précède, θx_1 est une racine de l'équation $\Phi x = 0$, donc $\theta \theta x_1$ le sera aussi; également $\theta \theta \theta x_1$, etc. le seront encore en répétant l'opération désignée par θ un nombre quelconque de fois.

Soit pour abréger

$$\theta \theta x_1 = \theta^2 x_1; \quad \theta \theta^2 x_1 = \theta^3 x_1; \quad \theta \theta^3 x_1 = \theta^4 x_1 \text{ etc.},$$

on aura la série

$$5. \quad x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \theta^3 x_1, \theta^4 x_1, \dots$$

et toutes ces quantités seront des racines de l'équation $\Phi x = 0$. La série (5.) aura une infinité de termes, mais l'équation $\Phi x = 0$ n'ayant qu'un nombre fini de racines différentes, il faut que plusieurs quantités de la série (5.) soient égales entre-elles.

Supposons donc p. ex.

$$\theta^m x_1 = \theta^{m+n} x_1,$$

ou bien

$$6. \quad \theta^n (\theta^m x_1) - \theta^m x_1 = 0,$$

en observant que $\theta^{n+m} x_1 = \theta^n \theta^m x_1$.

Le premier membre de l'équation (6.) est une fonction rationnelle de $\theta^m x_1$; or cette quantité est une racine de l'équation $\Phi x = 0$, donc en vertu du théorème énoncé plus haut, on pourra mettre x_1 au lieu de $\theta^m x_1$.

degré de P soit moindre que celui de la fonction φx . Donc, en faisant $M = P + Q \cdot \varphi x$, on aura $f x = \frac{P + Q \cdot \varphi x}{N}$. Cela posé, soit x la racine de $\varphi x = 0$, qui satisfait en même tems à $f x = 0$; x_1 sera également une racine de l'équation $P = 0$. Or si p n'est pas zéro pour une valeur quelconque de x , cette équation donnera x , comme racine d'une équation d'un degré moindre que celui de $\varphi x = 0$; ce qui est contre l'hypothèse; donc $P = 0$ et par suite $f x = \varphi x \cdot \frac{Q}{N}$, d'où l'on voit que $f x$ sera égal à zéro en même tems que φx q. e. d.

Cela donne

$$7. \theta^n x_1 = x_1,$$

où l'on peut supposer que n ait la plus petite valeur qui existe, en sorte que toutes les quantités

$$8. x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots \theta^{n-1} x_1$$

soient différentes entre-elles.

L'équation (7.) donnera

$$\theta^k \theta^n x_1 = \theta^k x_1, \text{ c'est-à-dire: } \theta^{n+k} x_1 = \theta^k x_1.$$

Cette formule fait voir qu'à partir du terme $\theta^{n-1} x_1$, les termes de la suite (8.) se reproduiront dans le même ordre. Les n quantités (8.) seront donc les seules de la série (5.) différentes entre-elles.

Cela posé, si $\mu > n$, soit x_2 une autre racine de l'équation proposée, qui n'est pas contenue dans la suite (8.), il suit du théorème I., que toutes les quantités

$$9. x_2, \theta x_2, \theta^2 x_2, \dots \theta^{n-1} x_2, \dots$$

seront également des racines de l'équation proposée. Or je dis que cette suite ne contiendra que n quantités différentes entre-elles et des quantités (8.). En effet, ayant $\theta^n x_1 - x_1 = 0$, on aura en vertu du théorème I.: $\theta^n x_2 = x_2$ et par suite:

$$\theta^{n+k} x_2 = \theta^k x_2.$$

Donc les seules quantités de la série (9.) qui pourront être différentes entre-elles, seront les n premières

$$10. x_2, \theta x_2, \theta^2 x_2, \dots \theta^{n-1} x_2.$$

Or celles-ci seront nécessairement différentes entre-elles et des quantités (8.). En effet, si l'on avoit

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_2,$$

où m et ν sont moindre que n , il en résulteroit $\theta^m x_1 = \theta^\nu x_1$, ce qui est impossible, car toutes les quantités (8.) sont différentes entre-elles. Si au contraire on avoit:

$$\theta^m x_2 = \theta^\nu x_1,$$

il en résulteroit

$$\theta^{n-m} \theta^\nu x_1 = \theta^{n-m} \theta^m x_2 = \theta^{n-m+m} x_2 = \theta^n x_2 = x_2,$$

donc

$$x_2 = \theta^{n-m+\nu} x_1,$$

c'est-à-dire la racine x_2 seroit contenue dans la série (8.), ce qui est contre l'hypothèse.

Le nombre des racines contenues dans (8.) et (10.) est $2n$, donc μ sera ou égal à $2n$, ou plus grand que ce nombre.

Soit dans le dernier cas x_3 une racine différente des racines (8.) et (10.), on aura une nouvelle série de racines

$$x_3, \theta x_3, \theta^2 x_3, \dots \theta^{n-1} x_3, \dots$$

et on démontrera précisément de la même manière, que les n premières de ces racines sont différentes entre-elles et des racines (8.) et (10.).

En continuant le procédé jusqu'à ce que toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$ soient épuisées, on verra que les μ racines de cette équation seront divisées en plusieurs groupes, composés de n termes; donc μ sera divisible par n , et en nommant m le nombre des groupes, on aura :

$$11. \mu = m.n.$$

Les racines elles mêmes seront :

$$12. \begin{cases} x_1, & \theta x_1, & \theta^2 x_1, & \dots & \theta^{n-1} x_1, \\ x_2, & \theta x_2, & \theta^2 x_2, & \dots & \theta^{n-1} x_2, \\ x_3, & \theta x_3, & \theta^2 x_3, & \dots & \theta^{n-1} x_3, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m, & \theta x_m, & \theta^2 x_m, & \dots & \theta^{n-1} x_m. \end{cases}$$

Si $m = 1$, on aura $n = \mu$, et les μ racines de l'équation $\varphi x = 0$ seront exprimées par

$$13. x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots \theta^{n-1} x_1.$$

Dans ce cas, comme on verra dans la suite, l'équation $\varphi x = 0$ est résoluble algébriquement. Mais la même chose n'aura pas toujours lieu lorsque m est plus grand que l'unité. On pourra seulement réduire la résolution de l'équation $\varphi x = 0$ à celle d'une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, dont les coefficients dépendent d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré; c'est ce que nous allons démontrer dans le paragraphe suivant.

§. 2.

Considérons un quelconque des groupes (12.), p. ex. le premier, et faisons

$$14. \begin{cases} (x - x_1)(x - \theta x_1)(x - \theta^2 x_1) \dots (x - \theta^{n-1} x_1) \\ = x^n + A'_1 x^{n-1} + A''_1 x^{n-2} \dots + A_1^{(n-1)} x + A_1^{(n)} = 0, \end{cases}$$

les racines de cette équation seront

$$x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots \theta^{n-1} x_1$$

et les coefficients $A'_1, A''_1, \dots A_1^{(n)}$ seront des fonctions rationnelles et

exprimée en fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$, savoir :

$$19. y_1^v + y_2^v + y_3^v + \dots + y_m^v = \frac{1}{n} \Sigma (Fx)^v.$$

Le second membre de cette équation peut être exprimé rationnellement par les coefficients de φx et θx , c'est-à-dire par des quantités connues. Donc, en faisant

$$20. r_v = y_1^v + y_2^v + y_3^v + \dots + y_m^v,$$

on aura la valeur de r_v , pour une valeur quelconque entière de v . Or connoissant $r_1, r_2, \dots, r_m$, on en pourra tirer rationnellement la valeur de toute fonction symétrique des quantités $y_1, y_2, \dots, y_m$. On pourra donc trouver de cette manière tous les coefficients de l'équation (16.) et par conséquent déterminer toute fonction rationnelle et symétrique de $x_1, \theta x_1, \theta^2 x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1$ à l'aide d'une équation du $m^{\text{ième}}$ degré. Donc on aura de cette manière les coefficients de l'équation (14.), dont la résolution donnera ensuite la valeur de x_1 , etc.

On voit par là qu'on peut ramener la résolution de l'équation $\varphi x = 0$, qui est du degré $\mu = m.n$, à celle d'un certain nombre d'équations du degré m et n . Il suffit même, comme nous allons voir, de résoudre une seule équation du degré m et m équations du degré n .

Soit ψx_1 un quelconque des coefficients $A'_1, A''_1, \dots, A_1^{(n)}$ et faisons

$$21. t_v = y_1^v \cdot \psi x_1 + y_2^v \cdot \psi x_2 + y_3^v \cdot \psi x_3 + \dots + y_m^v \cdot \psi x_m.$$

Puisque $y_1^v \cdot \psi x_1$ est une fonction symétrique des quantités $x_1, \theta x_1, \dots, \theta^{n-1} x_1$, on aura, en remarquant que $\theta^n x_1 = x_1$; $\theta^{n+1} x_1 = \theta x_1$ etc.

$$y_1^v \psi x_1 = (Fx_1)^v \cdot \psi x = (F\theta x_1)^v \cdot \psi \theta x_1 = \dots (F\theta^{n-1} x_1)^v \cdot \psi \theta^{n-1} x_1,$$

donc :

$$y_1^v \psi x_1 = \frac{1}{n} \cdot \{ (Fx_1)^v \cdot \psi x_1 + (F\theta x_1)^v \cdot \psi \theta x_1 + \dots (F\theta^{n-1} x_1)^v \cdot \psi \theta^{n-1} x_1 \}.$$

On trouvera de semblables expressions pour $y_2^v \cdot \psi x_2, y_3^v \cdot \psi x_3, \dots, y_m^v \cdot \psi x_m$, en mettant $x_2, x_3, \dots, x_m$ à la place de x_1 . En substituant ces valeurs, on voit que t_v deviendra une fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\varphi x = 0$. En effet on aura

$$22. t_v = \frac{1}{n} \Sigma (Fx)^v \cdot \psi x.$$

Donc on peut exprimer t_v rationnellement par des quantités connues.

Cela posé, en faisant $v = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$, la formule (21.) donnera :

Soit α une racine quelconque de l'équation $\alpha^\mu - 1 = 0$, et faisons

$$28. \quad \psi x = (x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \alpha^3 \theta^3 x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x)^\mu,$$

ψx sera une fonction rationnelle de x . Or cette fonction peut s'exprimer rationnellement par les coefficients de ϕx et θx .

En mettant $\theta^m x$ au lieu de x , on aura

$$\psi \theta^m x = (\theta^m x + \alpha \theta^{m+1} x + \alpha^2 \theta^{m+2} x + \dots + \alpha^{\mu-m} \theta^\mu x + \alpha^{\mu-m+1} \theta^{\mu+1} x \dots \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu+m-1} x)^\mu;$$

maintenant on a

$$\theta^\mu x = x, \quad \theta^{\mu+1} x = \theta x, \quad \dots \quad \theta^{\mu+m-1} x = \theta^{m-1} x,$$

donc :

$$\psi \theta^m x = (\alpha^{\mu-m+1} x + \alpha^{\mu-m+1} \theta x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{m-1} x + \theta^m x + \alpha \theta^{m+1} x + \dots + \alpha^{\mu-m-1} \theta^{m-1} x)^\mu.$$

Or $\alpha^\mu = 1$, donc :

$$\begin{aligned} \psi \theta^m x &= [\alpha^{\mu-m+1} (x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x)]^\mu \\ &= \alpha^{\mu(\mu-m+1)} (x + \alpha \theta x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x)^\mu, \end{aligned}$$

donc,

$$\alpha^{\mu(\mu-m+1)} \text{ étant } = 1,$$

on voit que

$$\psi \theta^m x = \psi x.$$

En faisant $m = 1, 2, 3, \dots, \mu - 1$, et ajoutant ensuite, on trouvera :

$$29. \quad \psi x = \frac{1}{n} \{ \psi x + \psi \theta x + \psi \theta^2 x + \dots + \psi \theta^{\mu-1} x \}.$$

ψx sera donc une fonction rationnelle et symétrique de toutes les racines de l'équation $\phi x = 0$, et par conséquent on pourra l'exprimer rationnellement en quantités connues.

Soit $\psi x = v$, on tire de l'équation (28.) :

$$30. \quad \sqrt[\mu]{v} = x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \dots + \alpha^{\mu-1} \theta^{\mu-1} x.$$

Cela posé, désignons les μ racines de l'équation

$$\alpha^\mu - 1 = 0$$

par

$$31. \quad 1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{\mu-1}$$

et les valeurs correspondantes de v par

$$32. \quad v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{\mu-1},$$

l'équation (30.) donnera, en mettant à la place de α successivement 1,

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu-1}:$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle de x , qui ne changera pas de valeur en mettant au lieu de x une autre racine quelconque $\theta^m x$, comme on le verra aisément, en faisant cette substitution et ayant égard à l'équation $\theta^{\mu+\nu} x = \theta^\nu x$. En désignant donc la fonction dont-il s'agit par ψx , on aura :

$$\sqrt[\mu]{v_k} \cdot (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \psi x = \psi \theta x = \psi \theta^2 x = \dots = \psi \theta^{\mu-1} x,$$

et de là :

$$39. \sqrt[\mu]{v_k} \cdot (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = \frac{1}{\mu} \{ \psi x + \psi \theta x + \psi \theta^2 x + \dots + \psi \theta^{\mu-1} x \}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines, donc on peut l'exprimer en quantités connues. En la désignant par a_k , on aura :

$$40. \sqrt[\mu]{v_k} \cdot (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-k} = a_k$$

et de là :

$$41. \sqrt[\mu]{v_k} = \frac{a_k}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^k.$$

A l'aide de cette formule l'expression de la racine x deviendra :

$$42. x = \frac{1}{\mu} \left\{ -A + \sqrt[\mu]{v_1} + \frac{a_2}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^2 + \frac{a_3}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^3 + \dots + \frac{a_{\mu-1}}{v_1} (\sqrt[\mu]{v_1})^{\mu-1} \right\}.$$

Cette expression de x n'a que μ valeurs différentes, qu'on obtiendra en mettant au lieu de $\sqrt[\mu]{v_1}$ les μ valeurs :

$$\sqrt[\mu]{v_1}, \alpha \sqrt[\mu]{v_1}, \alpha^2 \sqrt[\mu]{v_1}, \dots, \alpha^{\mu-1} \sqrt[\mu]{v_1}.$$

La méthode que nous avons suivie précédemment pour la résolution de l'équation $\Phi x = 0$ s'accorde au fond avec celle dont Mr. Gauss a fait usage dans ses „*Disquisitiones arithmeticae pag. 645. et seq.*” pour résoudre une certaine classe d'équations, auxquelles il étoit parvenu dans ses recherches sur l'équation $x^n - 1 = 0$. Ces équations ont la même propriété que notre équation $\Phi x = 0$; savoir que toutes ses racines peuvent être représentées sous la forme :

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{\mu-1} x,$$

θx étant une fonction rationnelle.

En vertu de ce qui précède nous pourrions énoncer le théorème suivant :

Théorème III. Si les racines d'une équation algébrique peuvent être représentées par :

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{\mu-1} x,$$

où $\theta^\mu x = x$ et θx désigne une fonction rationnelle de x et de quantités connues, cette équation sera toujours résoluble algébriquement.

On en tire le suivant, comme corollaire:

Théorème IV. Si deux racines d'une équation irréductible, dont le degré est un nombre premier, sont dans un tel rapport, qu'on puisse exprimer l'une rationnellement par l'autre, cette équation sera résoluble algébriquement.

En effet cela suit immédiatement de l'équation (11.)

$$\mu = m.n,$$

où l'on doit avoir $m = 1$, si μ est un nombre premier, et par conséquent les racines s'expriment par $x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{\mu-1} x$.

Dans le cas, où toutes les quantités connues de φx et θx sont réelles, les racines de l'équation φx jouiront d'une propriété remarquable, que nous allons démontrer.

Par ce qui précède on voit que $a_{\mu-1}$ peut être exprimée rationnellement par les coefficients de φx et θx , et par α . Si donc ces coefficients sont réels, $a_{\mu-1}$ doit avoir la forme

$$a_{\mu-1} = a + b\sqrt{-1},$$

où $\sqrt{-1}$ n'entre qu'à cause de la quantité α , qui en général est imaginaire, et qui généralement peut avoir la valeur

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{\mu} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\pi}{\mu}.$$

En changeant donc dans α le signe de $\sqrt{-1}$ et désignant par $a'_{\mu-1}$ la valeur correspondente de $a_{\mu-1}$, on aura

$$a'_{\mu-1} = a - b\sqrt{-1}.$$

Or suivant (40.) il est évident, que $a'_{\mu-1} = a_{\mu-1}$, donc $b = 0$ et

$$43. \quad a_{\mu-1} = a.$$

Donc $a_{\mu-1}$ a toujours une valeur réelle. On démontrera de la même manière que

$$v_1 = c + d\sqrt{-1} \text{ et } v_{\mu-1} = c - d\sqrt{-1},$$

où c et d sont réels.

Donc:

$$v_1 + v_{\mu-1} = 2c,$$

$$v_1 v_{\mu-1} = a^\mu.$$

De là on tire

$$44. \quad v_1 = c + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{(a^\mu - c^2)},$$

et par suite $\sqrt{a^\mu - c^2} = d$; d'où l'on voit que $\sqrt{a^\mu - c^2}$ a toujours une valeur réelle.

Cela posé, on peut faire

$$45. \quad c = (\sqrt{\varrho})^\mu \cos \delta, \quad \sqrt{a^\mu - c^2} = (\sqrt{\varrho})^\mu \sin \delta,$$

où ϱ est une quantité positive.

On en tire

$$c^2 + [\sqrt{a^\mu - c^2}]^2 = (\sqrt{\varrho})^{2\mu},$$

c'est-à-dire

$$46. \quad a^\mu = \varrho^\mu;$$

par conséquent ϱ sera égal à la valeur numérique de a . D'ailleurs on voit que a est toujours positif, si μ est un nombre impair.

Connoissant ϱ et δ , on aura

$$v_1 = (\sqrt{\varrho})^\mu (\cos \delta + \sqrt{-1} \sin \delta)$$

et par suite

$$\sqrt[\mu]{v_1} = \sqrt{\varrho} \cdot \left\{ \cos \left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu} \right) + \sqrt{-1} \sin \left(\frac{\delta + 2m\pi}{\mu} \right) \right\}.$$

En substituant cette valeur de $\sqrt[\mu]{v_1}$ dans l'expression de x (42.), elle prendra la forme:

$$47. \quad x = \frac{1}{\mu} \left\{ -A + \sqrt{\varrho} \cdot \left(\cos \frac{\delta + 2m\pi}{\mu} + \sqrt{-1} \sin \frac{\delta + 2m\pi}{\mu} \right) \right. \\ \left. + (f + g\sqrt{-1}) \left(\cos \frac{2(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} \sin \frac{2(\delta + 2m\pi)}{\mu} \right) \right\} \\ + (F + G\sqrt{-1}) \sqrt{\varrho} \cdot \left(\cos \frac{3(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} \sin \frac{3(\delta + 2m\pi)}{\mu} \right) \\ + (f_1 + g_1\sqrt{-1}) \left(\cos \frac{4(\delta + 2m\pi)}{\mu} + \sqrt{-1} \sin \frac{4(\delta + 2m\pi)}{\mu} \right) \\ + \text{etc.}$$

où ϱ , A , f , g , F , G etc., sont des fonctions rationnelles de $\cos \frac{2\pi}{\mu}$, $\sin \frac{2\pi}{\mu}$ et des coefficients de ϕx et θx . On trouvera toutes les racines, en donnant à m les valeurs 0, 1, 2, 3, ... $\mu - 1$.

L'expression précédente de x fait voir:

Théorème V. que pour résoudre l'équation $\phi x = 0$, il suffit:

- 1) de diviser la circonférence entière du cercle en μ parties égales,
- 2) de diviser un angle δ , qu'on peut construire ensuite, en μ parties égales,
- 3) d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ϱ .

Ce théorème n'est que l'extension d'un théorème semblable, que Mr. Gauss donne sans démonstration dans l'ouvrage cité plus haut, pag. 651.

Il y a encore à remarquer que les racines de l'équation $\Phi x = 0$ sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires. En effet si une racine x est réelle, les autres le sont également, comme les expressions

$$\theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{u-1} x,$$

qui ne contiennent que des quantités réelles, le font voir. Si au contraire x est imaginaire, les autres racines le sont aussi, car si par ex. $\theta^m x$ étoit réelle, $\theta^{u-m}(\theta^m x) = \theta^u x = x$, le seroit également, contre l'hypothèse. Dans le premier cas a sera positif et dans le second négatif.

Si μ est un nombre impair, toutes les racines seront réelles.

La méthode que nous avons donné dans ce paragraphe, pour résoudre l'équation $\Phi x = 0$, est applicable dans tous les cas, le nombre μ étant premier ou non; mais si μ est un nombre composé, il existe encore une autre méthode qui offre quelques simplifications et que nous allons exposer en peu de mots.

Soit $\mu = m.n$, les racines

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{u-1} x$$

pourront être groupées de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccccccc} x, & \theta^m x, & \theta^{2m} x, & \dots & \theta^{(n-1)m} x, \\ \theta x, & \theta^{m+1} x, & \theta^{2m+1} x, & \dots & \theta^{(n-1)m+1} x, \\ \theta^2 x, & \theta^{m+2} x, & \theta^{2m+2} x, & \dots & \theta^{(n-1)m+2} x, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{m-1} x, & \theta^{2m-1} x, & \theta^{3m-1} x, & \dots & \theta^{mn-1} x. \end{array}$$

En faisant pour abréger:

$$48. \quad \theta^m x = \theta_1 x,$$

$$49. \quad x = x_1, \quad \theta x = x_2, \quad \theta^2 x = x_3, \quad \dots \quad \theta^{m-1} x = x_m,$$

on peut écrire les racines comme il suit:

$$50. \quad \left\{ \begin{array}{l} (1') \quad x_1, \quad \theta_1 x_1, \quad \theta_1^2 x_1, \quad \dots \quad \theta_1^{n-1} x_1, \\ (2') \quad x_2, \quad \theta_1 x_2, \quad \theta_1^2 x_2, \quad \dots \quad \theta_1^{n-1} x_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ (m') \quad x_m, \quad \theta_1 x_m, \quad \theta_1^2 x_m, \quad \dots \quad \theta_1^{n-1} x_m. \end{array} \right.$$

Donc en vertu de ce qu'on a vu dans le §. 2. on peut décomposer l'équation $\Phi x = 0$, qui est du degré $m.n$, en m équations du degré n , dont les coefficients dépendront d'une équation du degré m . Les racines de ces m équations seront respectivement les racines $1', 2', \dots m'$.

Si n est un autre nombre composé $m_1.n_1$, on peut décomposer de la même manière chacune des équations du degré n , en m_1 équations

du degré n_1 , dont les coefficients dépendront d'une équation du degré m_1 . Si n_1 est encore un nombre composé, on peut continuer la décomposition de la même manière.

Théorème VI. En général, si l'on suppose

$$51. \mu = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \dots m_n,$$

la résolution de l'équation proposée $\varphi x = 0$ sera ramenée à celle de n équations des degrés:

$$m_1, m_2, m_3, \dots m_n.$$

Il suffit même de connoître une seule racine de ces équations, car si on connoît une racine de l'équation proposée, on aura toutes les autres racines, exprimées en fonctions rationnelles de celle-ci.

La méthode précédente est au fond la même que celle, que Mr. Gauss donne pour la réduction de l'équation à deux termes $x^\mu - 1 = 0$.

Pour faire voir plus clairement la décomposition précédente de l'équation $\varphi x = 0$ en d'autres de degrés moins élevés, supposons par ex. $\mu = 30 = 5 \cdot 3 \cdot 2$.

Dans ce cas les racines seront:

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{29} x.$$

D'abord nous formerons une équation du 6^{ième} degré, dont les racines seront:

$$x, \theta^5 x, \theta^{10} x, \theta^{15} x, \theta^{20} x, \theta^{25} x.$$

Soit $R = 0$ cette équation, on peut déterminer ses coefficients, rationnellement, par une même quantité y , qui sera la racine d'une équation du cinquième degré: $P = 0$.

Le degré de l'équation $R = 0$ étant lui même un nombre composé, nous formerons une équation du 3^{ième} degré: $R_1 = 0$, dont les racines seront:

$$x, \theta^{10} x, \theta^{20},$$

et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de y , et d'une même quantité z , qui est racine d'une équation du second degré $P_1 = 0$, dans laquelle les coefficients sont exprimés rationnellement par y .

Voici le tableau des opérations:

$$x^3 + f(y, z) \cdot x^2 + f_1(y, z) \cdot x + f_2(y, z) = 0,$$

$$z^2 + f y \cdot z + f_1 y = 0,$$

$$y^5 + A_1 \cdot y^4 + A_2 \cdot y^3 + A_3 \cdot y^2 + A_4 \cdot y + A_5 = 0.$$

On peut aussi commencer par une équation du 2^{ième} degré en x , ou bien par une équation du 5^{ième} degré.

Reprenons l'équation générale $\Phi x = 0$.

En supposons $\mu = m.n$, on peut faire

$$52. \quad x^{n_1} + f_1 y . x^{n_1-1} + f_2 y . x^{n_1-2} + \dots = 0,$$

où y est déterminé par une équation du $m^{\text{ième}}$ degré:

$$53. \quad y^m + A . y^{m-1} + \dots = 0,$$

dont tous les coefficients sont exprimés rationnellement en quantités connues.

Cela posé, soient:

$$54. \quad \begin{cases} \mu = m_1 . m_2 . m_3 . \dots . m_\omega \text{ et } \mu = m_1 . n_1, \\ \mu = m_2 . n_2; \dots \dots \dots \mu = m_\omega . n_\omega, \end{cases}$$

plusieurs manières de décomposer le nombre μ en deux facteurs, on pourra décomposer l'équation proposée $\Phi x = 0$ en deux autres des ω manières suivantes:

$$(1.) \quad \begin{cases} F_1(x_1, y_1) = 0, \text{ dont les racines seront } x, \theta^{m_1} x, \theta^{2m_1} x, \dots \theta^{(n_1-1)m_1} x \\ \text{et les coefficients des fonctions rationnelles d'une quantité } y_1, \text{ racine} \\ \text{d'une équation } f_1(y_1) = 0, \text{ du degré } m_1. \end{cases}$$

$$(2.) \quad \begin{cases} F_2(x_1, y_2) = 0, \text{ dont les racines seront } x, \theta^{m_2} x, \theta^{2m_2} x, \dots \theta^{(n_2-1)m_2} x \\ \text{et les coefficients: des fonctions rationnelles d'une même quantité } y_2, \\ \text{racine d'une équation } f_2 y_2 = 0, \text{ du degré } m_2. \end{cases}$$

.....

$$(\omega) \quad \begin{cases} F_\omega(x, y_\omega) = 0, \text{ dont les racines seront } x, \theta^{m_\omega} x, \theta^{2m_\omega} x, \dots \theta^{(n_\omega-1)m_\omega} x \\ \text{et les coefficients des fonctions rationnelles d'une même quantité } y_\omega, \\ \text{racine d'une équation } f_\omega y_\omega = 0, \text{ du degré } m_\omega. \end{cases}$$

Supposons maintenant que $m_1, m_2, \dots m_\omega$ pris deux à deux, soient premiers entre eux, je dis qu'on pourra exprimer la valeur de x rationnellement par les quantités $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$. En effet, si $m_1, m_2, \dots m_\omega$ sont premiers entre eux, il est clair qu'il n'y a qu'une seule racine, qui satisfera à la fois à toutes les équations

$$55. \quad F_1(x, y_1) = 0, F_2(x, y_2) = 0, \dots F(x, y_\omega) = 0;$$

savoir la racine x . Donc, suivant un théorème connu, on peut exprimer x rationnellement par les coefficients de ces équations et conséquemment par les quantités $y_1, y_2, \dots y_\omega$.

Voilà donc ramenée la résolution de l'équation proposée à celle de ω équations: $f_1 y_1 = 0; f_2 y_1 = 0; \dots f_\omega y_\omega = 0$, qui sont respectivement des degrés: $m_1, m_2, \dots m_\omega$, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des coefficients de Φx et θx .

Si l'on veut que les équations

$$56. f_1 y_1 = 0; f_2 y_2 = 0; \dots f_\omega y_\omega$$

soient les moins élevées possibles, il faut choisir $m_1, m_2, \dots m_\omega$ tels, que ces nombres soient des puissances de nombres premiers. P. ex. si l'équation proposée $\Phi x = 0$ est du degré:

$$57. \mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \dots \varepsilon_\omega^{\nu_\omega},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_\omega$ sont des nombres premiers différens, on aura

$$58. m_1 = \varepsilon_1^{\nu_1}; m_2 = \varepsilon_2^{\nu_2}; \dots m_\omega = \varepsilon_\omega^{\nu_\omega}.$$

L'équation proposée étant résoluble algébriquement, les équations (56.) le seront aussi; car les racines de ces équations sont des fonctions rationnelles de x . On peut aisément les résoudre de la manière suivante:

La quantité y est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (53.), c'est-à-dire de:

$$59. x, \theta^m x, \theta^{2m} x, \dots \theta^{(n-1)m} x.$$

Soit

$$60. y = Fx = f(x, \theta^m x, \theta^{2m} x, \dots \theta^{(n-1)m} x),$$

les racines de l'équation (53.) seront

$$61. Fx; F(\theta x); F(\theta^2 x); \dots F(\theta^{m-1} x);$$

or je dis que l'on peut exprimer ces racines de la manière suivante:

$$62. y, \lambda y, \lambda^2 y, \dots \lambda^{m-1} y,$$

où λy est une fonction rationnelle de y et de quantités connues.

On aura

$$63. F(\theta x) = f\{\theta x, \theta(\theta^m x), \theta(\theta^{2m} x), \dots \theta(\theta^{(n-1)m} x)\},$$

donc $F(\theta x)$ sera. autant que Fx , une fonction rationnelle et symétrique des racines $x, \theta^m x, \dots \theta^{(n-1)m} x$, donc on peut, par le procédé, trouvé (24.), exprimer $\psi(\theta x)$ rationnellement par ψx . Soit donc

$$\psi \theta x = \lambda \psi x = \lambda y,$$

on aura, en remplaçant (en vertu du 1. théorème) x par $\theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{m-1} x$:

$$\psi \theta^2 x = \lambda \psi \theta x = \lambda^2 y,$$

$$\psi \theta^3 x = \lambda \psi \theta^2 x = \lambda^3 y,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\psi \theta^{m-1} x = \lambda \psi \theta^{m-2} x = \lambda^{m-1} y,$$

c. q. f. d.

Maintenant les racines de l'équation (53.) pouvant être représentées par:

$$y, \lambda y, \lambda^2 y, \dots \lambda^{m-1} y,$$

on peut résoudre algébriquement cette équation de la même manière que

l'équation $\varphi x = 0$. (Voyez le théorème III.).

Si m est une puissance d'un nombre premier $= \varepsilon'$, on peut encore déterminer y à l'aide de ν équations du degré ε . (Voyez le théorème VI.)

Si dans le théorème III., l'on suppose, que μ soit une puissance de 2, on aura, comme corollaire, le théorème suivant.

Théorème VII. Si les racines d'une équation du degré 2^ω peuvent être représentées par

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{2^\omega - 1} x, \text{ où } \theta^{2^\omega} x = x,$$

cette équation pourra être résolue à l'aide de l'extraction de ω racines quarrées.

Ce théorème, appliqué à l'équation $\frac{x^{1+2^\omega} - 1}{x - 1} = 0$, où $1 + 2^\omega$ est un nombre premier, donne le théorème de Mr. Gaufs pour le cercle.

§. 4.

Des équations dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles.

Nous avons vu précédemment (théorème III.) qu'une équation de degré quelconque, dont les racines peuvent être exprimées par

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{u-1} x$$

est toujours résoluble algébriquement.

Dans ce cas toutes les racines sont exprimées rationnellement par l'une d'entre elles; mais une équation, dont les racines ont cette propriété, n'est pas toujours résoluble algébriquement; néanmoins, hors le cas considéré précédemment, il y a encore un autre, dans lequel cela a lieu. On aura le théorème suivant:

Théorème VIII. Soit $\chi x = 0$ une équation algébrique quelconque, dont toutes les racines peuvent être exprimées rationnellement par l'une d'entre elles, que nous désignerons par x . Soient θx et $\theta_1 x$ deux autres racines quelconques, l'équation proposée sera résoluble algébriquement, si l'on a $\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x$.

La démonstration de ce théorème peut être réduite sur le champ à la théorie exposée §. 2., comme nous allons le voir.

Si l'on connoit la racine x , on en aura en même tems toutes les autres; il suffit donc de chercher la valeur de x .

Si l'équation

$$64. \chi x = 0$$

n'est pas irréductible, soit

$$65. \varphi x = 0$$

Maintenant, dans le cas en question $x_1, \dots, x_{m-1}$ seront des fonctions rationnelles de la racine x . Faisons en conséquence

$$x_1 = \theta_1 x, \quad x_2 = \theta_2 x, \quad \dots \quad x_{m-1} = \theta_{m-1} x,$$

les racines de l'équation (67.) auront la forme:

$$y_1 = f(\theta_1 x, \theta \theta_1 x, \theta^2 \theta_1 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_1 x).$$

Suivant l'hypothèse les fonctions θ et θ_1 ont la propriété que:

$$\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x,$$

équation qui, en vertu du théorème I, aura lieu en substituant à la place de x une autre racine quelconque de l'équation $\Phi x = 0$. On en tire successivement

$$\theta^2 \theta_1 x = \theta \theta_1 \theta x = \theta_1 \theta^2 x,$$

$$\theta^3 \theta_1 x = \theta \theta_1 \theta^2 x = \theta_1 \theta^3 x,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\theta^{n-1} \theta_1 x = \theta \theta_1 \theta^{n-2} x = \theta_1 \theta^{n-1} x.$$

L'expression de y_1 deviendra par là:

$$y_1 = f(\theta_1 x, \theta_1 \theta x, \theta_1 \theta^2 x, \dots, \theta_1 \theta^{n-1} x),$$

et on voit que y_1 , comme y , est une fonction rationnelle et symétrique des racines

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{n-1} x.$$

Donc en vertu du théorème II. on peut exprimer y_1 rationnellement par y et des quantités connues. Le même raisonnement s'appliquera à toute autre racine de l'équation (67.). Soient maintenant λy , $\lambda_1 y$ deux racines quelconques, je dis qu'on aura

$$\lambda \lambda_1 y = \lambda_1 \lambda y.$$

En effet ayant p. ex.

$$\lambda y = f(\theta_1 x, \theta \theta_1 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_1 x),$$

si

$$y = f(x, \theta x, \dots, \theta^{n-1} x),$$

on aura, en mettant $\theta_2 x$ au lieu de x :

$$\lambda y_2 = f(\theta_1 \theta_2 x, \theta \theta_1 \theta_2 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_1 \theta_2 x)$$

où

$$y_2 = f(\theta_2 x, \theta \theta_2 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_2 x) = \lambda_1 y,$$

donc

$$\lambda \lambda_1 y = f(\theta_1 \theta_2 x, \theta \theta_1 \theta_2 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_1 \theta_2 x)$$

et également

$$\lambda_1 \lambda y = f(\theta_2 \theta_1 x, \theta \theta_2 \theta_1 x, \dots, \theta^{n-1} \theta_2 \theta_1 x),$$

donc, puisque $\theta_1 \theta_2 x = \theta_2 \theta_1 x$,

$$\lambda \lambda_1 y = \lambda_1 \lambda y.$$

Les racines de l'équation (67.) auront donc précisément la même propriété que celles de l'équation $\Phi x = 0$.

Cela posé, on peut appliquer à l'équation (67.) le même procédé, qu'à l'équation $\varphi x = 0$; c'est-à-dire, la détermination de y peut s'effectuer à l'aide de deux équations, dont l'une sera résoluble algébriquement et l'autre aura la propriété de l'équation $\varphi x = 0$.

Donc le même procédé peut encore être appliqué à cette dernière équation. En continuant, il est clair que la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide d'un certain nombre d'équations, qui seront toutes résolubles algébriquement. Donc enfin l'équation $\varphi x = 0$ sera résoluble à l'aide d'opérations algébriques, en supposant connues les quantités qui avec x composent les fonctions:

$$\varphi x, \theta x, \theta_1 x, \theta_2 x, \dots \theta_{m-1} x.$$

Il est clair que le degré de chacune des équations auxquelles se réduit la détermination de x , sera un facteur de μ qui marque le degré de l'équation $\varphi x = 0$; et:

Théorème IX. Si l'on désigne les degrés de ces équations respectivement par

$$n, n_1, n_2, \dots n_\omega,$$

on aura:

$$\mu = n \cdot n_1 \cdot n_2 \dots n_\omega.$$

En rapprochant ce qui précède à ce qui a été exposé dans le §. 3., on aura le théorème suivant:

Théorème X. Supposant le degré μ de l'équation $\varphi x = 0$ décomposé comme il suit:

$$69. \mu = \varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdot \varepsilon_3^{\nu_3} \dots \varepsilon_\alpha^{\nu_\alpha},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_\alpha$ sont des nombres premiers, la détermination de x pourra s'effectuer à l'aide de la résolution de ν_1 équations du degré ε_1 , de ν_2 équations du degré ε_2 , etc., et toutes ces équations seront résolubles algébriquement.

Dans le cas où $\mu = 2^\nu$, on peut trouver la valeur de x à l'aide de l'extraction de ν racines carrées.

§. 5.

Application aux fonctions circulaires.

En désignant par α la quantité $\frac{2\pi}{\mu}$, on sait qu'on peut trouver une équation algébrique du degré μ , dont les racines seront les μ quantités:

$$\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \dots \cos \mu \alpha,$$

et dont les coefficients seront des nombres rationnels. Cette équation sera

$$70. \quad x^\mu - \frac{1}{4}\mu \cdot x^{\mu-2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{\mu(\mu-3)}{1 \cdot 3} \cdot x^{\mu-4} \dots = 0.$$

Nous allons voir que cette équation a la même forme que l'équation $\chi x = 0$, considérée dans le paragraphe précédent.

Soit $\cos a = x$, on aura d'après une formule connue, quel que soit a :

$$71. \quad \cos ma = \theta(\cos a),$$

où θ désigne une fonction entière. Donc $\cos ma$, qui exprime une racine quelconque de l'équation (70.), sera une fonction rationnelle de la racine x . Soit $\theta_1 x$ une autre racine, je dis qu'on aura

$$\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x.$$

En effet, soit $\theta_1 x = \cos m'a$, la formule (71.) donnera, en mettant $m'a$ au lieu de a :

$$\cos(mm'a) = \theta(\cos m'a) = \theta \theta_1 x.$$

De la même manière on aura

$$\cos(m'ma) = \theta_1(\cos ma) = \theta_1 \theta x,$$

donc:

$$\theta \theta_1 x = \theta_1 \theta x.$$

Donc suivant ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent,

$$x \text{ ou } \cos a = \cos \frac{\pi}{\mu}$$

pourra être déterminé algébriquement. Cela est connu.

Supposons maintenant que μ soit un nombre premier $= 2n+1$, les racines de l'équation (70.) seront:

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1}, \cos \frac{4\pi}{2n+1}, \dots \cos \frac{4n\pi}{2n+1}, \cos 2\pi.$$

La dernière racine $\cos 2\pi$ est égale à l'unité, donc l'équation (70.) est divisible par $x-1$. Les autres racines seront toujours égales entre-elles par couples, car on a $\cos \frac{2m\pi}{2n+1} = \cos \frac{(2n+1-m)2\pi}{2n+1}$, donc on peut trouver une équation dont les racines seront:

$$72. \quad \cos \frac{2\pi}{2n+1}, \cos \frac{4\pi}{2n+1}, \dots \cos \frac{2n\pi}{2n+1}.$$

Cette équation sera:

$$73. \quad x^n + \frac{1}{2}x^{n-1} - \frac{1}{4}(n-1)x^{n-2} - \frac{1}{8}(n-2)x^{n-3} \\ + \frac{1}{16} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} + \frac{1}{32} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} \cdot x^{n-5} - \text{etc.} = 0.$$

Cela posé, soit

$$\cos \frac{2\pi}{2n+1} = x = \cos a,$$

on aura d'après ce qui précède:

$$\cos \frac{2m\pi}{2n+1} = \theta x = \cos ma.$$

L'équation (73.) sera donc satisfaite par les racines

$$74. \quad x, \theta x, \theta^2 x, \theta^3 x, \dots$$

On a, quelle que soit la valeur de a :

$$\theta(\cos a) = \cos ma.$$

De là on tire successivement:

$$\theta^2(\cos a) = \theta(\cos ma) = \cos m^2 a,$$

$$\theta^3(\cos a) = \theta(\cos m^2 a) = \cos m^3 a,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\theta^\mu(\cos a) = \theta(\cos m^{\mu-1} a) = \cos m^\mu a.$$

Les racines (74.) deviendront donc

$$75. \quad \cos a, \cos ma, \cos m^2 a, \cos m^3 a, \dots \cos m^\mu a, \dots$$

Cela posé, si m est une racine primitive pour le module $2n+1$ (voyez *Gaußs Disquis. arithm. pag. 53.*), je dis que toutes les racines

$$76. \quad \cos a, \cos ma, \cos m^2 a, \dots \cos m^{n-1} a$$

seront différentes entre elles. En effet si l'on avoit

$$\cos m^\mu a = \cos m^\nu a,$$

où μ et ν sont moindres que n , on en tireroit:

$$m^\mu a = \pm m^\nu a + 2k\pi,$$

où k est entier. Cela donne en remettant pour a sa valeur $\frac{2\pi}{2n+1}$,

$$m^\mu = \pm m^\nu + k(2n+1),$$

donc

$$m^\mu \mp m^\nu = m^\nu (m^{\mu-\nu} \mp 1),$$

et par conséquent

$$m^{\mu(\mu-\nu)} - 1$$

seroit divisible par $2n+1$, ce qui est impossible, car $2(\mu-\nu)$ est moindre que $2n$, et nous avons supposé que m est une racine primitive.

On aura encore:

$$\cos m^n a = \cos a,$$

car $m^{2n} - 1 = (m^n - 1)(m^n + 1)$ est divisible par $2n+1$; donc:

$$m^n = -1 + k(2n+1),$$

et par suite:

$$\cos m^n a = \cos(-a + k.2\pi) = \cos a.$$

De là on voit que les n racines de l'équation (73.) pourront s'exprimer par (76.); c'est-à-dire par :

$$x, \theta x, \theta^2 x, \theta^3 x, \dots \theta^{n-1} x, \text{ où } \theta^n x = x.$$

Donc, en vertu du théorème (III.), cette équation sera résoluble algébriquement.

En faisant $n = m_1 \cdot m_2 \dots m_\omega$, on peut diviser la circonférence entière du cercle en $2n + 1$ parties égales, à l'aide de ω équations des degrés $m_1, m_2, m_3, \dots m_\omega$. Si les nombres $m_1, m_2, \dots m_\omega$ sont premiers entre eux, les coefficients de ces équations seront des nombres rationnels.

En supposant $\pi = 2^\omega$, on aura le théorème connu sur les polygones réguliers, qui peuvent être construits géométriquement.

En vertu du théorème V. on voit que pour diviser la circonférence entière du cercle en $2n + 1$ parties égales, il suffit

- 1) de diviser la circonférence entière du cercle en $2n$ parties égales,
- 2) de diviser un arc, qu'on peut construire ensuite, en $2n$ parties égales,
- 3) et d'extraire la racine carrée d'une seule quantité ρ .

M. Gauss a énoncé ce théorème dans ses *Disquis.*, et il ajoute que la quantité dont il faut extraire la racine, sera égale à $2n + 1$. C'est ce qu'on peut démontrer aisément comme il suit.

On a vu (40. 38. 46.) que ρ est la valeur numérique de la quantité $(x + \alpha \theta x + \alpha^2 \theta^2 x + \dots + \alpha^{n-1} \theta^{n-1} x)(x + \alpha^{n-1} \theta x + \alpha^{n-2} \theta^2 x + \dots + \alpha \cdot \theta^{n-1} x)$ où $\alpha = \cos \frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$. En substituant pour $x, \theta x, \dots$ leurs valeurs $\cos \alpha, \cos m\alpha, \cos m^2 \alpha, \dots$ on aura :

$$\begin{aligned} \pm \rho &= \{\cos \alpha + \alpha \cos m\alpha + \alpha^2 \cos m^2 \alpha + \dots + \alpha^{n-1} \cdot \cos m^{n-1} \alpha\} \\ &\times \{\cos \alpha + \alpha^{n-1} \cos m\alpha + \alpha^{n-2} \cos m^2 \alpha + \dots + \alpha \cdot \cos m^{n-1} \alpha\}. \end{aligned}$$

En développant et mettant $\pm \rho$ sous la forme

$$\pm \rho = t_0 + t_1 \alpha + t_2 \alpha^2 + \dots + t_{n-1} \cdot \alpha^{n-1},$$

on trouvera facilement :

$$\begin{aligned} t_\mu &= \cos \alpha \cdot \cos m^\mu \alpha + \cos m\alpha \cdot \cos m^{\mu+1} \alpha + \dots + \cos m^{n-1-\mu} \alpha \cdot \cos m^{n-1} \alpha \\ &+ \cos m^{n-\mu} \alpha \cdot \cos \alpha + \cos m^{n-\mu+1} \alpha \cdot \cos m\alpha + \dots + \cos m^{n-1} \alpha \cdot \cos m^{\mu-1} \alpha. \end{aligned}$$

Maintenant on a

$$\cos m^\nu \alpha \cdot \cos m^{\mu+\nu} \alpha = \frac{1}{2} \cos(m^{\mu+\nu} \alpha + m^\nu \alpha) + \frac{1}{2} \cos(m^{\mu+\nu} \alpha - m^\nu \alpha),$$

donc :

$$\begin{aligned} t_\mu &= \frac{1}{2} \{\cos(m^\mu + 1)\alpha + \cos(m^\mu + 1)m\alpha + \cos(m^\mu + 1)m^2 \alpha + \dots + \cos(m^\mu + 1)m^{n-1} \alpha\} \\ &+ \frac{1}{2} \{\cos(m^\mu - 1)\alpha + \cos(m^\mu - 1)m\alpha + \cos(m^\mu - 1)m^2 \alpha + \dots + \cos(m^\mu - 1)m^{n-1} \alpha\}. \end{aligned}$$

Si l'on fait $(m^\mu + 1)a = a'$, $(m^\mu - 1)a = a''$, on aura:

$$t_\mu = \frac{1}{2} \{ \cos a' + \theta(\cos a') + \theta^2(\cos a') + \dots + \theta^{n-1}(\cos a') \} \\ + \frac{1}{2} \{ \cos a'' + \theta(\cos a'') + \theta^2(\cos a'') + \dots + \theta^{n-1}(\cos a'') \}.$$

Cela posé, il y a deux cas, savoir: μ est différent de zéro ou non.

Dans le premier cas il est clair que $\cos a'$ et $\cos a''$ sont des racines de l'équation (73.), donc $\cos a' = \theta^\delta x$, $\cos a'' = \theta^\varepsilon x$. En substituant, il viendra, en remarquant que $\theta^n x = x$:

$$t_\mu = \frac{1}{2} \{ \theta^\delta x + \theta^{\delta+1} x + \dots + \theta^{n-1} x + x + \theta x + \dots + \theta^{\delta-1} x \} \\ + \frac{1}{2} \{ \theta^\varepsilon x + \theta^{\varepsilon+1} x + \dots + \theta^{n-1} x + x + \theta x + \dots + \theta^{\varepsilon-1} x \},$$

donc

$$t_\mu = x + \theta x + \theta^2 x + \dots + \theta^{n-1} x,$$

c'est-à-dire t_μ est égal à la somme des racines; par suite en vertu de l'équation (73.):

$$t_\mu = -\frac{1}{2}.$$

Dans le cas où $\mu = 0$, la valeur de t_μ deviendra:

$$t_0 = \frac{1}{2} \{ \cos 2a + \cos 2ma + \dots + \cos 2m^{n-1}a \} + \frac{1}{2}.n;$$

or $\cos 2a$ est une racine de l'équation (73.), donc en faisant

$$\cos 2a = \theta^\delta x,$$

on aura:

$$\cos 2a + \cos 2ma + \dots + \cos 2m^{n-1}a \\ = \theta^\delta x + \theta^{\delta+1} x + \dots + \theta^{n-1} x + x + \theta x + \dots + \theta^{\delta-1} x = -\frac{1}{2},$$

par conséquent:

$$t_0 = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}.$$

En vertu de ces valeurs de t_0 et t_μ , la valeur de $\pm \varrho$ deviendra:

$$\pm \varrho = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \{ \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{n-1} \},$$

mais

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{n-1} = -1,$$

donc:

$$\pm \varrho = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4},$$

et puisque ϱ est essentiellement positif,

$$\varrho = \frac{2n+1}{4}.$$

Cette valeur de ϱ donne

$$\sqrt{\varrho} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(2n+1)},$$

donc la racine carrée qu'il y a à extraire est celle du nombre $2n+1$, comme le dit M. Gauss *).

Christiania, 29. Mars 1828.

*) L'auteur de ce mémoire donnera dans une autre occasion des applications aux fonctions elliptiques.

9.

Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

(Par Mr. *Lejeune-Dirichlet*, prof. de mathém.)

Les séries de sinus et de cosinus, au moyen desquelles on peut représenter une fonction arbitraire dans un intervalle donné, jouissent entre autres propriétés remarquables aussi de celle d'être convergentes. Cette propriété n'avait pas échappée au géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui contient ses premières recherches sur la chaleur. Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. Je ne connais sur cet objet qu'un travail dû à M. Cauchy et qui fait partie des Mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1823. L'auteur de ce travail avoue lui même que sa démonstration se trouve en défaut pour certaines fonctions pour lesquelles la convergence est pourtant incontestable. Un examen attentif du Mémoire cité m'a porté à croire que la démonstration qui y est exposée n'est pas même suffisante pour les cas auxquels l'auteur la croit applicable. Je vais, avant d'entrer en matière, énoncer en peu de mots les objections auxquelles la démonstration de M. Cauchy me paraît sujette. La marche que ce géomètre célèbre suit dans cette recherche exige que l'on considère les valeurs que la fonction $\varphi(x)$ qu'il s'agit de développer, obtient, lorsqu'on y remplace la variable x par une quantité de la forme $u + v\sqrt{-1}$. La considération de ces valeurs semble étrangère à la question et l'on ne voit d'ailleurs pas bien ce que l'on doit entendre par le résultat d'une pareille substitution lorsque la fonction dans laquelle elle a lieu, ne peut pas être exprimée par une formule analytique. Je présente cette objection avec d'autant plus de confiance, que l'auteur me semble partager mon opinion sur ce point. Il insiste en effet dans plusieurs de ces ouvrages sur la nécessité de définir d'une manière précise

le sens que l'on attache à une pareille substitution même lorsqu'elle est faite dans une fonction d'une loi analytique régulière; on trouve surtout dans le Mémoire qu'il a inséré dans le 19^{ième} cahier du journal polytechnique pag. 567 et suiv. des remarques sur les difficultés que font naître les quantités imaginaires placées sans des signes de fonctions arbitraires. Quoi qu'il en soit de cette première observation, la démonstration de M. Cauchy donne encore lieu à une autre objection qui paraît ne laisser aucun doute sur son insuffisance. La considération des quantités imaginaires conduit l'auteur à un résultat sur le décroissement des termes de la série, qui est loin de prouver que ces termes forment une suite convergente. Le résultat dont il s'agit peut être énoncé comme il suit, en supposant que l'intervalle que l'on considère, s'étende depuis zéro jusqu'à 2π .

„Le rapport du terme dont le rang est n , à la quantité $A \frac{\sin nx}{n}$ (A désignant une constante déterminée dépendante des valeurs extrêmes de la fonction) diffère de l'unité prise positivement d'une quantité qui diminue indéfiniment, à mesure que n devient plus grand.”

De ce résultat et de ce que la série, qui a $A \frac{\sin nx}{n}$ pour terme général, est convergente, l'auteur conclut que la série trigonométrique générale l'est également. Mais cette conclusion n'est pas permise, car il est facile de s'assurer que deux séries (du moins lorsque, comme il arrive ici, les termes n'ont pas tous le même signe) peuvent être l'une convergente, l'autre divergente, quoique le rapport de deux termes de même rang diffère aussi peu que l'on veut de l'unité prise positivement lorsque les termes sont d'un rang très avancé.

On en voit un exemple très simple dans les deux séries, ayant l'une pour terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et l'autre $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. La première de ces séries est convergente, la seconde au contraire est divergente, car en la soustrayant de la première on obtient la série divergente:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \text{etc.}$$

et cependant le rapport de deux termes correspondans, qui est $1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, converge vers l'unité à mesure que n croît.

Je vais maintenant entrer en matière, en commençant par l'examen des cas les plus simples, auxquels tous les autres peuvent être ra-

menés. Désignons par h un nombre positif inférieur ou tout au plus égal à $\frac{\pi}{2}$ et par $f(\beta)$ une fonction de β qui reste continue entre les limites 0 et h ; j'entends par là une fonction qui a une valeur finie et déterminée pour toute valeur de β comprise entre 0 et h , et en outre telle que la différence $f(\beta + \varepsilon) - f(\beta)$ diminue sans limite lorsque ε devient de plus en plus petit. Supposons encore que la fonction reste toujours positive entre les limites 0 et h et qu'elle décroisse constamment depuis 0 jusqu'à h , en sorte que si p et q désignent deux nombres compris entre 0 et h , $f(p) - f(q)$ ait toujours un signe opposé à celui de $p - q$. Cela posé considérons l'intégrale

$$(1.) \int_0^h \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta$$

dans laquelle i est une quantité positive, et voyons ce que cette intégrale deviendra à mesure que i croît. Pour cela partageons la en plusieurs autres prises la première depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \frac{\pi}{i}$, la seconde depuis $\beta = \frac{\pi}{i}$ jusqu'à $\beta = \frac{2\pi}{i}$, et ainsi de suite, l'avant-dernière ayant pour limites $(r-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{r\pi}{i}$, et la dernière $\frac{2\pi}{i}$ et h , $\frac{r\pi}{i}$ désignant le plus grand multiple de $\frac{\pi}{i}$ qui soit contenu dans h . Il est facile de voir que ces intégrales nouvelles, dont le nombre est $r+1$, sont alternativement positives et négatives, la fonction placée sous le signe somme étant évidemment toujours positive entre les limites de la première, négative entre les limites de la seconde et ainsi de suite. Il n'est pas moins facile de se convaincre que chacune d'elles est plus petite que la précédente, abstraction faite du signe. En effet ν désignant un entier $< r$, les expressions

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta \quad \text{et} \quad \int_{\frac{\nu\pi}{i}}^{(\nu+1)\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta$$

représentent deux intégrales consécutives. Remplaçons dans la seconde β par $\frac{\pi}{i} + \beta$; elle se changera ainsi en celle-ci:

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin(i\beta + \pi)}{\sin(\beta + \frac{\pi}{i})} f(\beta + \frac{\pi}{i}) d\beta$$

ou ce qui revient au même:

$$-\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)} f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right) d\beta.$$

Les deux intégrales qu'il s'agit de comparer ayant ainsi les mêmes limites, on voit sans peine que la seconde a une valeur numérique inférieure à celle de la première. Il suffit pour cela de remarquer qu'il suit de la supposition que nous avons faite sur la fonction $f(\beta)$, que $f\left(\frac{\pi}{i}+\beta\right) < f(\beta)$ et que d'un autre côté $\sin\left(\frac{\pi}{i}+\beta\right) > \sin\beta$, les arcs β et $\frac{\pi}{i}+\beta$ étant l'un et l'autre moindres que $\frac{\pi}{2}$, car il en résulte l'in-

égalité $\frac{f(\beta)}{\sin\beta} > \frac{f\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\pi}{i}\right)}$, qui ayant lieu pour toutes les valeurs de β

intermédiaires entre les limites $(\nu-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{\nu\pi}{i}$, fait voir que, comme nous l'avons dit, chaque intégrale est plus grande que celle qui la suit, abstraction faite du signe. Cette circonstance a lieu a fortiori, l'orsqu'on compare l'avant-dernière à la dernière, attendu que la différence des limites $\frac{\nu\pi}{i}$ et h de la dernière est inférieure à $\frac{\pi}{i}$ différence commune des limites de toutes les autres.

Examinons actuellement un peu plus en détail l'intégrale du rang ν , qui est

$$\int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\beta} f(\beta) d\beta.$$

Comme la fonction de β qui se trouve sous le signe intégral est le produit des facteurs $\frac{\sin i\beta}{\sin\beta}$, et $f(\beta)$, qui sont l'un et l'autre des fonctions continues de β entre les limites de l'intégration et comme d'un autre côté le premier de ces facteurs conserve toujours le même signe entre ces mêmes limites, on conclura en vertu d'un théorème connu, que l'intégrale que nous considérons est égale à l'intégrale du premier facteur multipliée par une quantité comprise entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite de l'autre facteur. Le second facteur décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde, la quantité dont il s'agit est comprise entre $f\left(\frac{(\nu-1)\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{\nu\pi}{i}\right)$. En la désignant par ξ , no-

tre intégrale sera équivalente à

$$\vartheta_\nu \int_{(\nu-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\nu\pi}{i}} \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta.$$

L'intégrale que renferme encore cette expression, dépend à la fois de ν et de i . Elle est positive ou négative selon que $\nu-1$ est pair ou impair; nous la désignerons désormais par K_ν , abstraction faite du signe. Nous aurons bientôt besoin de connaître la limite vers laquelle elle converge, lorsque, ν restant invariable, i devient de plus en plus grand. Pour découvrir cette limite, remplaçons β par $\frac{\gamma}{i}$, γ étant une nouvelle variable. Nous aurons ainsi

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin \gamma}{i \sin \left(\frac{\gamma}{i}\right)} \partial\gamma.$$

Sous cette forme, il est évident qu'elle converge vers la limite

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin \gamma}{\gamma} \partial\gamma,$$

que pour abréger nous désignerons par k_ν , abstraction faite du signe.

On sait que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin \gamma}{\partial\gamma} \partial\gamma$ a une valeur finie et égale à $\frac{\pi}{2}$. Cette intégrale peut être partagée en une infinité d'autres, prises la première depuis $\gamma=0$ jusqu'à $\gamma=\pi$, la seconde depuis $\gamma=\pi$ jusqu'à $\gamma=2\pi$, et ainsi de suite. Ces nouvelles intégrales sont alternativement positives et négatives, chacune d'elles a une valeur numérique inférieure à celle de la précédente, et celle du rang ν est k_ν , abstraction faite du signe. La proposition qu'on vient de citer, revient donc à dire que la suite infinie

$$(2.) \quad k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 - \text{etc.}$$

est convergente et a une somme égale à $\frac{\pi}{2}$.

Les termes de cette suite allant toujours en décroissant, il suit d'une proposition connue que la somme de n premiers termes est supérieure ou inférieure à $\frac{\pi}{2}$, selon que n est impair ou pair et que cette somme qu'on peut désigner par S_n , diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité moindre que le terme suivant k_{n+1} .

Reprenons actuellement l'intégrale (1.) et cherchons à déterminer la limite vers laquelle elle converge lorsque i croît indéfiniment. En

faisant ainsi croître le nombre i , les intégrales dans lesquelles nous avons décomposé l'intégrale (1.), changeront sans cesse de valeur en même temps que leur nombre augmentera; il s'agit de connaître le résultat de ce double changement lorsqu'il continue indéfiniment. Pour cela, prenons un nombre entier m (qu'il soit supposé pair pour plus de simplicité) et supposons que le nombre m reste invariable pendant que i croît. Le nombre r , qui croît sans cesse avec i , finira bientôt par surpasser le nombre invariable m , quelque grand qu'on l'ait choisi.

Cela posé, partageons en deux groupes les intégrales dont la somme est équivalente à l'intégrale (1.). Le premier groupe comprendra les m premières de ces intégrales, et le second sera composé de toutes les suivantes. On aura pour la somme du premier groupe:

$$(3.) \quad K_1 \varrho_1 - K_2 \varrho_2 + K_3 \varrho_3 - K_4 \varrho_4 + \dots - K_m \varrho_m$$

et le second, dont le nombre des termes croît sans cesse avec i , a pour premiers termes:

$$(4.) \quad K_{m+1} \varrho_{m+1} - K_{m+2} \varrho_{m+2} + \dots$$

Considérons séparément ces deux groupes. Le nombre i croissant indéfiniment la somme (3.) convergera vers une limite qu'il est facile de déterminer. En effet, les quantités $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ qui sont comprises la première entre $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{i}\right)$, la seconde entre $f\left(\frac{\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{i}\right)$, et la dernière entre $f\left(\frac{(m-1)\pi}{i}\right)$ et $f\left(\frac{m\pi}{i}\right)$ convergent chacune vers la limite $f(0)$, lorsque, m restant invariable, i croît sans cesse. D'un autre côté nous avons vu que les quantités $K_1, K_2, \dots, K_m$ convergent dans les mêmes circonstances respectivement vers les limites $k_1, k_2, \dots, k_m$. Donc la somme (3.) converge vers la limite $f(0)(k_1 - k_2 + k_3 - \text{etc.} \dots - k_m) = S_m f(0)$, ce qui veut dire que la différence entre la somme (3.) et $S_m f(0)$ finira toujours, abstraction faite du signe, par être constamment inférieure à ω , ω désignant une quantité positive aussi petite que l'on veut.

Considérons pareillement la somme (4.), dont le nombre des termes augmente sans cesse. Ses termes étant alternativement positifs et négatifs, et chacun d'eux ayant une valeur numérique inférieure à celle du terme précédent, comme nous l'avons vu plus haut, en considérant les intégrales que ces termes représentent, il suit d'un principe connu *),

*) Le principe sur lequel nous nous appuyons peut être énoncé de cette manière. Les lettres $A, A', A'', \dots$ désignant des quantités positives en nombre quelconque et telles que

que cette somme, quelque soit le nombre de ses termes, est positive comme son premier terme $K_{m+1} \varphi_{m+1}$ et a une valeur inférieure à celle de ce terme. Or, ce premier terme convergeant vers la limite $k_{m+1} f(0)$, il s'ensuit que la somme (4.) finira toujours par être inférieure à $k_{m+1} f(0)$ augmenté d'une quantité positive ω' aussi petite que l'on veut. En combinant ce résultat avec celui que nous avons obtenu sur la somme (3.), il n'y a qu'un instant, on verra que l'intégrale (1.) qui est la somme des expressions (3.) et (4.) finira toujours par différer de $f(0) S_m$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, que $\omega + \omega' + f(0) k_{m+1}$, ω et ω' étant deux nombres d'une petitesse arbitraire. D'un autre côté S_m diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité numériquement inférieure à k_{m+1} ; donc l'intégrale finira toujours par différer de $\frac{\pi}{2} f(0)$ d'une quantité moindre que $\omega + \omega' + 2f(0) k_{m+1}$, abstraction faite du signe.

Comme m peut être choisi tellement grand que k_{m+1} soit moindre que toute grandeur donnée, il s'ensuit que l'intégrale (1.) finira toujours, lorsque i croît sans limite, par différer constamment de $\frac{\pi}{2} f(0)$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, qu'un nombre aussi petit que l'on veut. Il est ainsi prouvé, que l'intégrale (1.) converge vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$ pour des valeurs croissantes de i .

Supposons maintenant que la fonction $f(\beta)$, au lieu d'être toujours décroissante depuis 0 jusqu'à h , soit constante et égale à l'unité. On pourra dans ce cas déterminer la limite vers laquelle converge l'intégrale (1.) par les mêmes considérations que nous venons d'employer; c'est ce qu'on voit tout de suite, en se rappelant que la démonstration précédente est fondée sur ce que les intégrales dans lesquelles nous avons décomposé l'intégrale (1.), forment une suite décroissante. Or, ce décroissement tient à deux choses, au décroissement du facteur $f(\beta)$ et à l'accroissement du diviseur $\sin \beta$. Si $f(\beta)$ devient un nombre constant, l'accroissement de $\sin \beta$ suffira toujours pour rendre chaque intégrale de la série plus petite

$A > A' > A'' > \text{etc.}$, la quantité $A - A' + A'' - A''' + \text{etc.}$

est positive et inférieure à A . Cela résulte immédiatement de que la quantité précédente peut être mise sous l'une et l'autre de ces deux formes :

$$(A - A') + (A'' - A''') + \text{etc.};$$

$$A - (A' - A'') - (A''' - A^{IV}) - \text{etc.}$$

que la précédente. On trouvera ainsi, en supposant toujours h positive et tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, que l'intégrale $\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$ converge vers la limite $\frac{\pi}{2}$. Il suit de là que l'intégrale $\int_0^h \frac{c \sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$, dans laquelle c est une constante positive ou négative, converge vers la limite $c \frac{\pi}{2}$.

Nous avons supposé que la fonction $f(\beta)$ était décroissante et positive entre les limites 0 et h . La première circonstance ayant toujours lieu, c'est-à-dire la fonction étant telle que $f(p) - f(q)$ ait un signe contraire à celui de $p - q$ pour des valeurs p et q comprises entre 0 et h , supposons que $f(\beta)$ ne soit pas toujours positive. On prendra alors une constante positive c assez grande pour que $c + f(\beta)$ conserve toujours un signe positif depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = h$. L'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$ étant égale à la différence de celles-ci: $\int_0^h [c + f(\beta)] \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$ et $\int_0^h c \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$, sa limite sera la différence des limites vers lesquelles convergent ces dernières. Or ces dernières rentrent dans les cas précédemment examinés ($c + f(\beta)$ étant une fonction décroissante et positive) et convergent vers les limites $[c + f(0)] \frac{\pi}{2}$ et $c \frac{\pi}{2}$, d'où il suit que la première converge vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$.

Considérons actuellement une fonction $f(\beta)$ croissante depuis 0 jusqu'à h . Dans ce cas $-f(\beta)$ sera une fonction décroissante. L'intégrale $\int_0^h -f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$ convergera donc vers la limite $-\frac{\pi}{2} f(0)$, et par conséquent l'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$ vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$.

En réunissant ces résultats, on aura cet énoncé:

(5.) $\left\{ \begin{array}{l} \text{„Quelle que soit la fonction } f(\beta), \text{ pourvu qu'elle reste continue} \\ \text{entre les limites 0 et } h \text{ (} h \text{ étant positive et tout au plus égale à } \frac{\pi}{2} \text{),} \\ \text{et qu'elle croisse ou qu'elle décroisse depuis la première de ces limi-} \\ \text{tes jusqu'à la seconde, l'intégrale } \int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta \text{ finira par diffé-} \\ \text{rer constamment de } \frac{\pi}{2} f(0) \text{ d'une quantité moindre que tout nombre} \\ \text{assignable, lorsqu'on y fait croître } i \text{ au delà de toute limite positive.} \end{array} \right.$

Désignons par g un nombre positif différent de zéro et inférieur à h , et supposons que la fonction reste continue et croisse ou décroisse depuis g jusqu'à h . L'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$ convergera alors vers une limite qu'il est facile de découvrir. On pourroit y parvenir par des considérations analogues à celles que nous avons appliquées à l'intégrale (1.); mais il est plus simple de ramener ce nouveau cas à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. La fonction n'étant donnée que depuis g jusqu'à h reste entièrement arbitraire pour les valeurs de β comprises entre 0 et g . Supposons que l'on entende par $f(\beta)$, pour les valeurs de β comprises entre 0 et g une fonction continue et croissante ou décroissante depuis 0 jusqu'à g , selon que $f(\beta)$ croît ou décroît depuis g jusqu'à h ; supposons encore que $f(g - \varepsilon)$ diffère infiniment peu de $f(g + \varepsilon)$, si ε décroît sans limite; ayant satisfait d'une manière quelconque à ces conditions, ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières, la fonction $f(\beta)$ remplira depuis 0 jusqu'à h les conditions exprimées dans l'énoncé (5.). Les intégrales

$$\int_0^g f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta \text{ et } \int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$$

convergeront donc l'une et l'autre vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$. D'où l'on conclut que l'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$ qui est la différence des précédentes, a zéro pour limite.

Ce nouveau résultat peut être réuni en un seul énoncé avec celui que nous avons obtenu plus haut. On aura ainsi:

- (6.) { „La lettre h désignant une quantité positive tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et g une quantité également positive et en outre inférieure à h , l'intégrale
- $$\int_g^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} d\beta$$
- dans laquelle la fonction $f(\beta)$ est continue entre les limites de l'intégration et a une marche toujours croissante ou toujours décroissante depuis $\beta = g$ jusqu'à $\beta = h$, convergera vers une certaine limite, lorsque le nombre i devient de plus en plus grand. Cette limite est égale à zéro, le seul cas excepté où g a une valeur nulle, dans ce cas elle a la valeur $\frac{\pi}{2} f(0)$.”

Il est évident que ce résultat ne serait que légèrement modifié, si la fonction $f(\beta)$ présentait une solution de continuité pour $\beta = g$, et $\beta = h$, c'est-à-dire si $f(g)$ était différent de $f(g + \varepsilon)$ et $f(h)$ de $f(h - \varepsilon)$, ε désignant une quantité infiniment petite et positive, pourvu qu'alors les valeurs $f(g)$ et $f(h)$ ne fussent pas infinies. Il faudrait seulement dans ce cas remplacer $f(0)$ par $f(\varepsilon)$ dans l'énoncé précédent, ce qu'on peut faire encore même quand il n'y pas de solution de continuité, attendu qu'alors $f(\varepsilon)$ est égale à $f(0)$.

Nous sommes maintenant en état de prouver la convergence des séries périodiques qui expriment des fonctions arbitraires entre des limites données. La marche que nous allons suivre nous conduira à établir la convergence de ces séries et à déterminer en même temps leurs valeurs. Soit $\varphi(x)$ une fonction de x , ayant une valeur finie et déterminée pour chaque valeur de x comprise entre $-\pi$ et π , et supposons qu'il s'agisse de développer cette fonction dans une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples de x . La série qui résout cette question, est, comme l'on sait :

$$(7.) \quad \frac{1}{2\pi} \int \varphi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{aligned} &\cos x \int \varphi(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \cos 2x \int \varphi(\alpha) \cos 2\alpha d\alpha \dots \\ &\sin x \int \varphi(\alpha) \sin \alpha d\alpha + \sin 2x \int \varphi(\alpha) \sin 2\alpha d\alpha \dots \end{aligned} \right\}.$$

Les intégrales qui déterminent les coefficients constans, étant prises depuis $\alpha = -\pi$ jusqu'à $\alpha = \pi$, et x désignant une quantité quelconque comprise entre $-\pi$ et π (*Théorie de la Chaleur*, No. 232. et suiv.).

Considérons les $2n + 1$ premiers termes de cette série (n étant un nombre entier) et voyons vers quelle limite converge la somme de ces termes, lorsque n devient de plus en plus grand. Cette somme peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) d\alpha \left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \dots + \cos n(\alpha - x) \right],$$

ou en sommant la suite de cosinus,

$$(8.) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(\alpha - x)}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - x)} d\alpha.$$

Tout se réduit maintenant à déterminer la limite dont cette intégrale approche sans cesse, lorsque n croît indéfiniment. Pour cela nous la partagerons en deux autres prises l'une depuis $-\pi$ jusqu'à x , l'autre depuis x jusqu'à π . Si l'on remplace dans la première α par $x - 2\beta$,

et dans la seconde α par $x + 2\beta$, β étant une nouvelle variable, ces deux intégrales se changeront en celles-ci, abstraction faite du facteur $\frac{1}{\pi}$:

$$(9.) \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin \beta} \varphi(x-2\beta) d\beta \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin \beta} \varphi(x+2\beta) d\beta.$$

Considérons la seconde de ces deux intégrales. La quantité x étant inférieure ou tout au plus égale à π , abstraction faite du signe, $\frac{1}{2}(\pi-x)$ ne pourra tomber hors des limites 0 et π . Si $\frac{1}{2}(\pi-x) = 0$, ce qui a lieu lorsque $x = \pi$, l'intégrale est nulle quelque que soit n ; dans tous les autres cas elle convergera pour des valeurs croissantes de n vers une limite que nous allons déterminer. Supposons d'abord $\frac{1}{2}(\pi-x)$ inférieure ou tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et remarquons que la fonction $\varphi(x+2\beta)$ peut présenter plusieurs solutions de continuité depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \frac{1}{2}(\pi-x)$, et qu'elle peut aussi avoir plusieurs maxima et minima dans ce même intervalle. Désignons par $l, l', l'', \dots, l^{(v)}$ rangées selon l'ordre de leur grandeur, les différentes valeurs de β , qui présentent l'une ou l'autre de ces circonstances, et décomposons notre intégrale en plusieurs autres prises respectivement entre les limites 0 et l, l' et $l'', \dots, l^{(v)}$ et $\frac{1}{2}(\pi-x)$. Toutes ces intégrales se trouveront dans le cas de l'énoncé (6.). Elles convergeront donc toutes vers la limite zéro à mesure que n croît, à l'exception de la première qui converge vers la limite $\frac{\pi}{2} \varphi(x+\varepsilon)$, ε étant un nombre infiniment petit et positif. Si $\frac{1}{2}(\pi-x)$ était supérieure à $\frac{\pi}{2}$, ce qui arrivera lorsque x a une valeur négative, on partagerait l'intégrale en deux autres, l'une prise depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \frac{1}{2}\pi$, l'autre depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\beta = \frac{1}{2}(\pi-x)$. La première de ces nouvelles intégrales se trouvera dans le même cas que celle que nous venons de considérer, elle convergera donc vers la limite $\frac{\pi}{2} \varphi(x+\varepsilon)$. Quant à la seconde, on peut la changer en celle-ci, en y remplaçant β par $\pi - \gamma$, γ étant une nouvelle variable:

$$\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(x+2\pi-2\gamma) \frac{\sin(2n+1)(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\gamma)} d\gamma,$$

ou ce qui revient au même, n étant un entier:

$$\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(x+2\pi-2\gamma) \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin \gamma} d\gamma.$$

Elle a ainsi une forme analogue à celle de la précédente; en la décomposant comme elle en plusieurs autres, on verra qu'elle converge vers la limite zéro, le seul cas excepté, où $\frac{1}{2}(\pi + x)$ a une valeur nulle, c'est-à-dire lorsque $x = -\pi$; dans ce cas elle approche continuellement de la limite $\varphi(\pi - \varepsilon)$, ε ayant toujours la même signification. En résumant tout ce qui précède, on trouvera que la seconde des intégrales (10.) est nulle lorsque $x = \pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2} [\varphi(\pi - \varepsilon) + \varphi(-\pi + \varepsilon)]$ lorsque $x = -\pi$, et que dans tous les autres cas elle approche continuellement de la limite $\frac{\pi}{2} \varphi(x + \varepsilon)$. La première des intégrales (9.) est entièrement analogue à la seconde; en y appliquant des considérations semblables, on trouvera qu'elle est nulle lorsque $x = -\pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2} [\varphi(\pi - \varepsilon) + \varphi(-\pi + \varepsilon)]$ lorsque $x = \pi$ et que dans tous les autres cas elle a pour limite $\frac{\pi}{2} \varphi(x - \varepsilon)$. Connoissant ainsi les limites de chacune des intégrales (9.), il est facile de trouver la limite dont l'intégrale (8.) approche sans cesse, lorsque n devient de plus en plus grand; il suffit pour cela de se rappeler que cette intégrale est égale à la somme des intégrales (9.) divisée par π . Or, l'intégrale (8.) étant équivalente à la somme des $2n + 1$ premiers termes de la série (7.), il est prouvé que cette série est convergente et l'on trouve au moyen des résultats précédens qu'elle est égale à $\frac{1}{2} [\varphi(x + \varepsilon) - \varphi(x - \varepsilon)]$ pour toute valeur de x comprise entre $-\pi$ et π , et que pour chacune des valeurs extrêmes π et $-\pi$, elle est égale à $\frac{1}{2} [\varphi(\pi - \varepsilon) + \varphi(-\pi + \varepsilon)]$.

L'exposé précédent embrasse tous les cas; il se simplifie lorsque la valeur de x qu'on considère n'est pas une de celles qui présentent une solution de continuité. En effet les quantités $\varphi(x + \varepsilon)$ et $\varphi(x - \varepsilon)$ étant alors l'une et l'autre équivalentes à $\varphi(x)$, on voit que la série a pour valeur $\varphi(x)$.

Les considérations précédentes prouvent d'une manière rigoureuse que, si la fonction $\varphi(x)$, dont toutes les valeurs sont supposées finies et déterminées, ne présente qu'un nombre fini de solutions de continuité entre les limites $-\pi$ et π , et si en outre elle n'a qu'un nombre déterminé de maxima et de minima entre ces mêmes limites, la série (7.), dont les coefficients sont des intégrales définies dépendantes de la fonction $\varphi(x)$ est convergente et a une valeur généralement exprimée par

$\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon)+\varphi(x-\varepsilon)]$, où ε désigne un nombre infiniment petit. Il nous resterait à considérer les cas où les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer. Il faut seulement pour que la série (8.) présente un sens lorsque les solutions de continuité sont en nombre infini, que la fonction $\varphi(x)$ remplisse la condition suivante.

Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π , on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s . On sentira facilement la nécessité de cette restriction en considérant que les différens termes de la série sont des intégrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée. On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationnelle, et égale à une autre constante d , lorsque cette variable est irrationnelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toute valeur de x , et cependant on ne saurait la substituer dans la série, attendu que les différentes intégrales qui entrent dans cette série, perdroient toute signification dans ce cas. La restriction que je viens de préciser, et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelles la fonction $\varphi(x)$ soit sujette et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. Mais la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et qui seront exposés dans une autre note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série (7.).

Berlin, Janvier 1829.

10.

Ueber die Convergenz einer nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Reihe.

(Vom Herrn Professor Dirksen zu Berlin.)

1.

Bezeichnet $f(x)$ eine Function von x , einzig und allein an die Bedingung gebunden, daß ihre Werthe innerhalb zwei gegebener Grenzen, z. B. von $x = -\alpha$ bis $x = +\alpha$, einschliesslich, wo α eine, übrigens beliebige, endliche Grösse repräsentirt, beständig endlich und bestimmt bleiben, und nimmt man an, daß es möglich sei, die Werthe dieser Function, innerhalb eben jener Grenzen ausschliesslich, durch eine Reihe von der Form:

$$A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{\alpha} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{\alpha} + A_3 \cos \frac{3\pi x}{\alpha} + \dots A_i \cos \frac{i\pi x}{\alpha} + \text{etc.} \\ + B_1 \sin \frac{\pi x}{\alpha} + B_2 \sin \frac{2\pi x}{\alpha} + B_3 \sin \frac{3\pi x}{\alpha} + \dots B_i \sin \frac{i\pi x}{\alpha} + \text{etc.},$$

die, der Kürze wegen, dargestellt werden mag durch

$$A_0 + \sum_i A_i \cos \frac{i\pi x}{\alpha} + \sum_i B_i \sin \frac{i\pi x}{\alpha},$$

auszudrücken, wo, ganz allgemein, A_i und B_i endliche und bestimmte, von x unabhängige Grössen bezeichnen: so läßt sich auf mehr als eine, und wohl am leichtesten auf die zuerst von Euler (*Nova acta acad. Petrop. tom. XI. p. 116.*), rücksichtlich eines verwandten Gegenstandes, mitgetheilte Weise zeigen, daß alsdann sein muß:

$$A_0 = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(\mu) d\mu, \quad A_i = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \frac{i\pi \mu}{\alpha} \cdot f(\mu) d\mu, \\ B_i = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \frac{i\pi \mu}{\alpha} \cdot f(\mu) d\mu,$$

wo μ eine Hilfsgrösse, und $f(\mu)$ eine solche Function von μ bezeichnet, in welche $f(x)$ übergeht, indem man $x = \mu$ setzt.

Substituirt man diese Werthe für A_i und B_i in die obige Reihe, so entsteht die Gleichung:

$$(1.) \quad f(x) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(\mu) d\mu + \frac{1}{\alpha} \sum_i \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \cdot f(\mu) d\mu,$$

welche, in Verbindung mit den vorigen Bedingungen, ein sehr bekanntes Theorem ausspricht.

Man sieht aber leicht, daß dieses Theorem durch die hier bezeichnete Betrachtungsweise, auf keinen Fall als begründet angesehen werden darf, in so fern nicht unter andern auch die Convergenz der auf der rechten Seite von (1.) befindlichen Reihe gesondert dargethan wird.

Zu beweisen, daß eben diese Reihe, unter den obigen Bedingungen von $f(x)$ und α , stets einen endlichen und bestimmten Werth hat, ist der nächste Gegenstand der folgenden Betrachtungen, bei denen, zur Abkürzung, der Buchstabe E , sowohl mit als ohne Ordnungszahl, als Repräsentant einer endlichen und bestimmten GröÙe überhaupt, und das Zeichen G_z vor einer Function von z , zur Andeutung desjenigen Werthes dienen wird, welchem sich der Werth der Function von z ins Unbestimmte nähert, indeß der numerische Werth von z als ins Unbestimmte zunehmend gedacht wird.

2.

Bezeichnet $\psi(\mu)$ eine continuirliche unbestimmte Function von μ , von $\mu = \mu_0$ bis $\mu = \mu_1$ einschließlic, so hat man bekanntlich, mittelst partieller Integration, $\frac{d\psi(\mu)}{d\mu} = \psi'(\mu)$ setzend:

$$\int_{\mu_0}^{\mu_1} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu = \frac{\alpha}{i\pi} \left\{ \sin \frac{i\pi(x-\mu_1)}{\alpha} \psi(\mu_1) - \sin \frac{i\pi(x-\mu_0)}{\alpha} \psi(\mu_0) \right\} \\ + \frac{\alpha}{i\pi} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \sin \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi'(\mu) d\mu;$$

folglich

$$(2.) \left\{ \begin{aligned} \sum_{\mu_0}^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu &= -\frac{\alpha}{\pi} \psi(\mu_1) \sum_{\mu_1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu_1)}{\alpha} \\ &+ \frac{\alpha}{\pi} \psi(\mu_0) \sum_{\mu_0}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu_0)}{\alpha} \\ &+ \frac{\alpha}{\pi} \sum_{\mu_0}^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi'(\mu) d\mu, \end{aligned} \right.$$

eine Gleichung, durch welche die Reihe (1.) auf drei andere zurückgeführt wird.

Betrachtet man nun die Reihe $\sum_{\mu_1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin iz$, so ergibt sich sehr leicht, daß man hat, in so fern n eine ganze Zahl bezeichnet:

$$\sum_{\mu_1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin iz = 0, \text{ für } z = \pm 2n\pi; \\ = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}t, \text{ für alle übrige Werthe von } z,$$

wo t gegeben wird durch die Gleichung $z = \pm 2n\pi + t$, n so genommen gedacht, daß der Werth von t zwischen 0 und $\pm 2\pi$ falle.

Diesem nach hat man ganz allgemein

$$(3.) \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{i} \sin iz = E_0.$$

Setzt man nun abwechselnd $z = \frac{i\pi(x-\mu_1)}{\alpha}$, $z = \frac{i\pi(x-\mu_0)}{\alpha}$, und überlegt zugleich, daß man, der obigen Annahme nach, hat

$$\psi(\mu_0) = E_0, \quad \psi(\mu_1) = E_1,$$

so erlangt man

$$(4.) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{\alpha}{\pi_1} \psi(\mu_1) \sum_1^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu_1)}{\alpha} \\ & + \frac{\alpha}{\pi} \psi(\mu_0) \sum_1^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu_0)}{\alpha} \end{aligned} \right\} = E_2.$$

Ferner hat man, wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi'(\mu) d\mu &= \int_{\mu_0}^{\mu_1} \psi'(\mu) d\mu G_i \sum_1^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \\ &= \int_{\mu_0}^{\mu_1} \psi'(\mu) E_0 d\mu \text{ [nach (3.)].} \end{aligned}$$

In so fern daher auch $\psi'(\mu)$, innerhalb der Grenzen der Integration einschliesslich, beständig endlich und bestimmt bleibt, und μ_0 , μ_1 ebenfalls endlich sind, hat man bekanntlich

$$(5.) \quad \sum_1^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \sin \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi'(\mu) d\mu = E_3.$$

Verbindet man die Gleichung (4.) und (5.) mit (2.), so kommt, die vorigen Bedingungen als erfüllt betrachtend:

$$(6.) \quad \sum_1^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu = E_2 + \frac{\alpha}{\pi} E_3 = E_4.$$

3.

Die für $\psi'(\mu)$ hervorgetretene Bedingung ist mit Bezug auf den Satz, in der Gleichung (6.), diese an und für sich betrachtet, enthalten, keine nothwendige, sondern lediglich eine, aus der besondern Betrachtungsweise hervorgegangene zufällige. Der Satz selbst behält seine volle Gültigkeit, wenn auch $\psi'(\mu)$, innerhalb der Grenzen der Integration einschliesslich, ein- oder mehrmals unendlich wird, wofern nur $\psi(\mu)$ beständig endlich bleibt. Um die Begriffe festzustellen, wollen wir annehmen, daß α eine, zwischen μ_0 und μ_1 enthaltene Gröfse bezeichne, und daß $\psi'(\mu)$ lediglich für diesen Werth von μ unendlich werde.

Da bekanntlich ganz allgemein

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu &= \sum_1^{\infty} \int_{\mu_0}^{a-\frac{1}{2}\theta} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu \\ &+ \sum_1^{\infty} \int_{a-\frac{1}{2}\theta}^{a+\frac{1}{2}\theta} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu \\ &+ \sum_1^{\infty} \int_{a+\frac{1}{2}\theta}^{\mu_1} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu \end{aligned}$$

ist, so hat man, in Folge der Annahme und der Gleichung (6.), wofern nur der numerische Werth von θ nicht gleich 0 ist, wie man sich leicht überzeugt:

$$(7.) \quad \sum_1^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu = E_5 + \sum_1^{\infty} \int_{a-\frac{1}{2}\theta}^{a+\frac{1}{2}\theta} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu.$$

Da der numerische Werth von θ nach Belieben klein genommen werden kann, so wird derselbe bekanntlich dergestalt gewählt werden können, daß sich der Werth von $\psi(\mu)$, von $\mu = a - \frac{1}{2}\theta$ bis $\mu = a + \frac{1}{2}\theta$, mittelst einer sehr rasch convergirenden, nach ganzen Potenzen von θ fortschreitenden Reihe darstellen lasse. Verbindet man nun mit dieser Bemerkung die Gleichung (6.), so ergiebt sich, wie man leicht übersieht, die Gleichung

$$\sum_1^{\infty} \int_{a-\frac{1}{2}\theta}^{a+\frac{1}{2}\theta} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu = E_6,$$

die, mit (7.) verbunden, liefert:

$$(8.) \quad \sum_1^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi(\mu) d\mu = E_7,$$

welche Gleichung also, wie leicht zu übersehen, statt findet, wofern nur $\psi(\mu)$, innerhalb der Grenzen der Integration einschließlic, stets continuirlich ist, und μ_0 und μ_1 endliche Größen bezeichnen. Dies vorausgesetzt, möge $f(\mu)$ eine Function von μ bezeichnen, deren Werthe gegeben werden:

$$\begin{aligned} &\text{von } \mu = \mu_0 \text{ bis } \mu = \mu_1, \text{ durch } \psi_0(\mu), \\ &\text{von } \mu = \mu_1 \text{ bis } \mu = \mu_2, \text{ durch } \psi_1(\mu), \\ &\text{von } \mu = \mu_2 \text{ bis } \mu = \mu_3, \text{ durch } \psi_2(\mu), \\ &\vdots \\ &\text{von } \mu = \mu_{r-1} \text{ bis } \mu = \mu_r, \text{ durch } \psi_{r-1}(\mu), \\ &\vdots \\ &\text{von } \mu = \mu_{n-1} \text{ bis } \mu = \mu_n, \text{ durch } \psi_{n-1}(\mu), \end{aligned}$$

wo $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, \dots, \mu_n$ entweder wachsend, oder abnehmend fortgehen, so hat man, in Folge von (8.):

$$\sum_1^{\infty} \int_{\mu_{r-1}}^{\mu_r} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi_{r-1}(\mu) d\mu = E_{r-1},$$

folglich

$$(9.) \quad \sum_{r=1}^{r=n} \sum_1^{\infty} \int_{\mu_{r-1}}^{\mu_r} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi_{r-1}(\mu) d\mu = \sum_{r=1}^{r=n} E_{r-1} = E,$$

wofern nur ganz allgemein $\psi_{r-1}(\mu)$, von $\mu = \mu_{r-1}$ bis μ_r continuirlich ist, und μ_{r-1} und μ_r endliche Gröfsen sind.

Setzt man nun

$$(10.) \quad \sum_{r=1}^{r=n} \sum_1^{\infty} \int_{\mu_{r-1}}^{\mu_r} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \psi_{r-1}(\mu) d\mu = \sum_1^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_n} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu,$$

so erlangt man

$$(11.) \quad \sum_1^{\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_n} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu = E,$$

wofern nur $f(\mu)$, innerhalb der Grenzen μ_0 und μ_n einschliesslich, es sei übrigens continuirlich oder discontinuirlich, beständig endlich und bestimmt, und μ_0, μ_n endliche Gröfsen repräsentiren.

Bezeichnet demnach α eine endliche Gröfse, und setzt man

$$\mu_0 = -\alpha \quad \text{und} \quad \mu_1 = +\alpha,$$

so kommt

$$(12.) \quad \sum_1^{\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu = E,$$

wofern nur $f(x)$, von $x = -\alpha$ bis $x = +\alpha$ beständig endlich und bestimmt ist, welches Resultat von dem von Hrn. Cauchy (*Mémoires de l'acad. d. scienc. an.* 1823.) erhaltenen, in so fern verschieden ist, als letzteres bedingter zu sein scheint, und auch die mitunter geäußerte Ansicht, nach welcher ein Ausdruck von der Form (11.) und (12.), an und für sich betrachtet, nichts weiter als ein (bedeutungsloses) Symbol bildet, nicht bestätigt.

4.

Was die Begründung des Theorems durch die Gleichung (1.), in Verein mit den für $f(x)$ und α angegebenen Bedingungen ausgesprochen, anbelangt, so dürfte diese durch die in §. 1. bezeichnete Betrachtung, in Verbindung mit dem Resultate von (12.), keinesweges als erledigt zu betrachten, und vielleicht auf folgende Weise am directesten zu bewerkstelligen sein.

Bekanntlich ist:

$$(13.) \left\{ \begin{aligned} \sum_{\mu_0}^{\mu_n} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu &= G_i \int_{\mu_0}^{\mu_n} f(\mu) d\mu \sum_1^i \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mu_0}^{\mu_n} f(\mu) d\mu + \frac{1}{2} G_i \int_{\mu_0}^{\mu_n} \frac{\sin \frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu)}{\alpha}}{\sin \frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu)}{\alpha}} f(\mu) d\mu, \end{aligned} \right.$$

und, nach (10.) und mittelst partieller Integration:

$$(14.) \left\{ \begin{aligned} G_i \int_{\mu_0}^{\mu_n} \frac{\sin \frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu)}{\alpha}}{\sin \frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu)}{\alpha}} f(\mu) d\mu &= -G_i \frac{1}{i+\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\cos \frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu_r)}{\alpha}}{\sin \frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu_r)}{\alpha}} \psi_{r-1}(\mu_r) \\ &\quad + G_i \frac{1}{i+\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{\cos \frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu_{r-1})}{\alpha}}{\sin \frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu_{r-1})}{\alpha}} \psi_{r-1}(\mu_{r-1}) \\ &\quad + G_i \frac{1}{i+\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{r=n} \int_{\mu_{r-1}}^{\mu_r} \frac{\cos \frac{(i+\frac{1}{2})\pi(x-\mu)}{\alpha}}{\sin \frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu)}{\alpha}} d\psi_{r-1}(\mu). \end{aligned} \right.$$

$$= 0,$$

für alle Werthe von x , bei denen $\sin \frac{\frac{1}{2}\pi(x-\mu)}{\alpha}$, von $\mu = \mu_0$ bis $\mu = \mu_n$ einschliesslich, nicht Null, folglich $x - \mu$ nicht von der Form $\pm 2n\alpha$ wird. Obgleich dieses Resultat hier zunächst nur für den Fall hervortritt, wo $\frac{d\psi_{r-1}(\mu)}{d\mu}$, von $\mu = \mu_{r-1}$ bis $\mu = \mu_r$ einschliesslich, für alle Werthe von r , stets endlich bleibt, so überzeugt man sich dennoch auf die in §. 3. näher bezeichnete Weise sehr leicht, dass solches auch dann noch allgemeine Gültigkeit hat, falls $\psi'_{r-1}(\mu)$ ein- oder mehrmals unendlich werden sollte.

Erlangt aber $x - \mu$, für irgend einen zwischen μ_0 und μ_n einschliesslich enthaltenen Werth von μ , einmal einen Werth von der Form $\pm 2n\alpha$, wodurch alsdann $\mu = \pm 2n\alpha + x$ wird; so hat man, da ganz allgemein

$$\int_{\mu_0}^{\mu_n} \varphi(\mu) d\mu = \int_{\mu_0}^{\pm 2n\alpha + x - \theta} \varphi(\mu) d\mu + \int_{\pm 2n\alpha + x - \theta}^{\pm 2n\alpha + x} \varphi(\mu) d\mu + \int_{\pm 2n\alpha + x}^{\pm 2n\alpha + x + \theta'} \varphi(\mu) d\mu + \int_{\pm 2n\alpha + x + \theta'}^{\mu_n} \varphi(\mu) d\mu$$

ist, in Folge von (14.), wofern man zur Abkürzung

$$(15.) \quad \frac{\sin \frac{(i + \frac{1}{2}) \pi (x - \mu)}{\alpha}}{\sin \frac{\frac{1}{2} \pi (x - \mu)}{\alpha}} f(\mu) = \Phi(\mu)$$

setzt, wie leicht zu übersehen,

$$(16.) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_i \int_{\mu_0}^{\mu_n} \Phi(\mu) d\mu = G_i \int_{\pm 2n\alpha + x - \theta}^{\pm 2n\alpha + x} \Phi(\mu) d\mu + G_i \int_{\pm 2n\alpha + x}^{\pm 2n\alpha + x + \theta'} \Phi(\mu) d\mu, \\ \text{wenn weder } \mu_0 \text{ noch } \mu_n \text{ von der Form } \pm 2n\alpha + x \text{ ist;} \\ G_i \int_{\mu_0}^{\mu_n} \Phi(\mu) d\mu = G_i \int_{\pm 2n\alpha + x}^{\pm 2n\alpha + x + \theta'} \Phi(\mu) d\mu, \\ \text{wenn } \mu_0 \text{ von der Form } \pm 2n\alpha + x \text{ ist;} \\ G_i \int_{\mu_0}^{\mu_n} \Phi(\mu) d\mu = G_i \int_{\pm 2n\alpha + x - \theta}^{\pm 2n\alpha + x} \Phi(\mu) d\mu, \\ \text{wenn } \mu_n \text{ von der Form } \pm 2n\alpha + x \text{ ist;} \end{array} \right.$$

wo θ und θ' nach Belieben klein, jedoch nicht gleich Null genommen werden können.

Setzt man nun $\mu = \pm 2n\alpha + x - \xi$, so kommt mit Rücksicht auf (15.):

$$G_i \int_{\pm 2n\alpha + x - \theta}^{\pm 2n\alpha + x} \Phi(\mu) d\mu = -G_i \int_{\theta}^0 \frac{\sin(i + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\alpha} \xi}{\sin \frac{1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \xi} f(x \pm 2n\alpha - \xi) d\xi;$$

folglich, da θ nach Belieben klein genommen werden kann:

$$G_i \int_{\pm 2n\alpha + x - \theta}^{\pm 2n\alpha + x} \Phi(\mu) d\mu = -2f(x \pm 2n\alpha) G_i \int_{\theta}^0 \sin \frac{(i + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\alpha} \xi}{\frac{\pi}{\alpha} \xi} d\xi;$$

mithin, indem man $(i + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\alpha} \xi = \zeta$ setzt:

$$G_i \int_{\pm 2n\alpha + x - \theta}^{\pm 2n\alpha + x} \Phi(\mu) d\mu = + 2 \frac{\alpha}{\pi} f(x \pm 2n\alpha) \int_0^{\infty} \frac{\sin \zeta}{\zeta} d\zeta,$$

und endlich, da bekanntlich $\int_0^{\infty} \frac{\sin \zeta}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2} \pi$ ist:

$$(17.) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_i \int_{\pm 2n\alpha + x - \theta}^{\pm 2n\alpha + x} \Phi(\mu) d\mu = \alpha f(x \pm 2n\alpha). \\ \text{Auf dieselbe Weise erhält man} \\ G_i \int_{\pm 2n\alpha + x}^{\pm 2n\alpha + x + \theta'} \Phi(\mu) d\mu = \alpha f(x \pm 2n\alpha). \end{array} \right.$$

Fasst man nun die Resultate von (13.), (14.), (15.), (16.) und (17.) zusammen, so erlangt man folgenden allgemeinen Satz:

$$(18.) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mu_0}^{\mu_n} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu = -\frac{1}{2} \int_{\mu_0}^{\mu_n} f(\mu) d\mu, \\ \text{wenn zwischen } \mu_0 \text{ und } \mu_n \text{ einschliesslich kein Werth für } \mu \text{ von} \\ \text{der Form } \pm 2n\alpha + x \text{ enthalten ist;} \\ \sum_{\mu_0}^{\mu_n} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu = -\frac{1}{2} \int_{\mu_0}^{\mu_n} f(\mu) d\mu + \alpha f(x \pm 2n\alpha), \\ \text{wenn zwischen } \mu_0 \text{ und } \mu_n \text{ ausschliesslich ein Werth für } \mu \text{ von der} \\ \text{Form } \pm 2n\alpha + x \text{ enthalten ist;} \\ \sum_{\mu_0}^{\mu_n} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu = -\frac{1}{2} \int_{\mu_0}^{\mu_n} f(\mu) d\mu + \frac{1}{2} \alpha f(x \pm 2n\alpha), \\ \text{wenn entweder } \mu_0 \text{ oder } \mu_n \text{ von der Form } \pm 2n\alpha + x \text{ ist,} \end{array} \right.$$

wo n so genommen werden muss, dass $x \pm 2n\alpha$ zwischen μ_0 und μ_n einschliesslich falle.

Ist aber zwischen μ_0 und μ_n eine Anzahl von $(m+1)$ Werthen für μ von der Form $\pm 2n\alpha + x$ vorhanden, von denen keiner mit den Grenzwerten μ_0 oder μ_n übereinstimmt, so findet man:

$$(19.) \sum_{\mu_0}^{\mu_n} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu = -\frac{1}{2} \int_{\mu_0}^{\mu_n} f(\mu) d\mu + \alpha \cdot \sum_{\varrho=0}^{m} f[x \pm 2(n+\varrho)\alpha].$$

5.

Setzt man nun, um sich von diesem allgemeineren Fall zu dem in Rede stehenden mehr besonderen zu wenden, $\mu_0 = -\alpha$, $\mu_n = +\alpha$, so übersieht man leicht, dass es zu jedem Werthe von x einen Werth, und auch nicht mehr als Einen Werth für μ , zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ enthalten, giebt, in Folge von welchem $x - \mu$ von der Form $\pm 2n\alpha$ wird.

Nach (18.) hat man also

$$(20.) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{-a}^{+a} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu = -\frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} f(\mu) d\mu + \alpha f(x \pm 2n\alpha), \\ \text{für solche Werthe von } x, \text{ für welche weder } x + \alpha \text{ noch } x - \alpha \\ \text{von der Form } \pm 2n\alpha \text{ wird;} \\ \sum_{-a}^{+a} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu = -\frac{1}{2} \int_{-a}^{+a} f(\mu) d\mu + \frac{1}{2} \alpha f(x \pm 2n\alpha), \\ \text{für solche Werthe von } x, \text{ für welche entweder } x + \alpha \text{ oder } x - \alpha \\ \text{von der Form } \pm 2n\alpha \text{ ist.} \end{array} \right.$$

Für alle diejenigen Werthe von x , welche zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ enthalten sind, hat man offenbar $n=0$, und daher, indem man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen (20.) nach $f(x)$ auflöst:

$$(21.) \quad f(x) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(\mu) d\mu + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu,$$

für alle Werthe von x , zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ ausschliesslich enthalten,

$$(22.) \quad f(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} f(\mu) d\mu + \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \frac{i\pi(x-\mu)}{\alpha} f(\mu) d\mu,$$

für $x = -\alpha$ und $x = +\alpha$,

von denen (21.) mit der Gleichung (1.) einerlei ist.

Berlin, den 15. Januar 1829.

11.

Beweis eines neuen, von Herrn Chasles in der Statik entdeckten Satzes, nebst einigen Zusätzen.

(Von Herrn Prof. A. F. Möbius zu Leipzig.)

Wie auch die Kräfte, welche auf ein freies und seiner Form nach unveränderliches System wirken, auf zwei Kräfte reducirt werden mögen, so ist das Tetraëder, welches zu gegenüberliegenden Kanten die Geraden hat, wodurch die zwei resultirenden Kräfte ihrer Stärke und Richtung nach vorgestellt werden, immer von demselben Inhalte.

Diesen merkwürdigen Satz der Statik habe ich in de Férussac *Bulletin des sciences mathém. etc. Septemb. 1828, pag. 187.*, in der Anzeige von Gergonne *Annales mathém. Tom. XVIII. no. 12. Juin 1828.* aufgeführt gefunden, mit der Bemerkung, daß Hr. Gergonne, dem dieses Theorem von Hr. Chasles ohne Beweis mitgetheilt worden sei, es daselbst bewiesen habe.

Ohne diesen Beweis zu kennen, indem jenes Heft der Gergonne'schen Annalen mir noch nicht zu Gesicht gekommen ist, habe ich selbst einen solchen aufzufinden gesucht, den ich, da er durch eine neue dabei angewendete Ansicht der statischen Momente und durch die damit bewirkte Kürze einige Aufmerksamkeit verdienen dürfte, hier mittheilen will.

Wie bekannt, erhält man das Moment einer Kraft in Bezug auf eine gewisse Axe, wenn man die Kraft auf eine, die Axe rechtwinklig schneidende Ebene projecirt, und diese Projection mit ihrem Abstände von der Axe multiplicirt. Werde daher durch die Gerade PQ (Fig. 9.) eine Kraft, ihrer Stärke und Richtung nach, vorgestellt. Durch einen beliebigen Punct A der Axe AB lege man eine Ebene rechtwinklig auf die Axe, und seien P' und Q' die Fußpunkte der auf diese Ebene von P und Q gefällten Perpendikel, so ist das Moment der Kraft PQ dem doppelten Inhalte des Dreiecks $AP'Q'$ gleich. Es ist aber, wo auch der Punct B in der Axe genommen werden mag, $AP'Q' \times AB =$ dem Dreifachen des Tetraëders $ABP'Q'$, und $ABP'Q' = ABP'Q$, weil beide

Tetraëder eine gemeinschaftliche Basis ABP' haben, und ihre Spitzen Q' , Q in einer Parallele mit dieser Basis liegen. Eben so ist ferner $ABP'Q = ABPQ$, weil die Linie durch die Spitzen P' , P dieser zwei Tetraëder parallel mit ihrer gemeinschaftlichen Grundfläche ABQ läuft.

Man hat daher $AP'Q' \times AB = 3 \cdot ABQP$, und folglich das Moment der Kraft PQ in Bezug auf die Axe AB , $= 2 \cdot AP'Q' = 6 \cdot \frac{ABPQ}{AB}$; und eben so das Moment einer andern Kraft RS , in Bezug auf dieselbe Axe, $= 6 \cdot \frac{ABRS}{AB}$. Da es aber bei den Momenten nicht sowohl auf ihre absolute Gröfse, als vielmehr auf ihr gegenseitiges Verhältniß ankommt, so kann man die Momente von PQ , RS , in Bezug auf AB geradezu den Tetraëdern $ABPQ$, $ABRS$ gleich setzen. Auf eben die Art werden die Momente derselben Kräfte in Bezug auf irgend eine andere Axe CD durch die Tetraëder $CDPQ$, $CDRS$ ausgedrückt werden können, wobei man noch den Abschnitt CD in der andern Axe, dem Abschnitte AB in der ersten gleich anzunehmen hat, wenn man die letzten Momente nicht blofs unter sich, sondern auch mit den ersten vergleichen will.

So wie also bei einem Systeme von Kräften in einer Ebene die Momente derselben in Bezug auf einen gewissen Punkt der Ebene durch die Dreiecke dargestellt werden, welche diesen Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze und die Kräfte selbst zu Grundlinien haben, so lassen sich bei einem Systeme von Kräften im Raume die Momente derselben in Bezug auf eine gewisse Axe durch die Tetraëder ausdrücken, welche einen beliebigen, aber von unveränderlicher Länge zu nehmenden Abschnitt dieser Axe zur gemeinschaftlichen Kante, die Kräfte selbst aber zu gegenüberliegenden Kanten haben.

Wenn daher bei einem System von Kräften PQ , RS , TU , . . . , die auf einen freien, festen Körper wirken, Gleichgewicht statt findet, so muß immer, wie auch die zwei Punkte A und B genommen werden, die algebraische Summe der Tetraëder

$$ABPQ + ABR S + ABTU + \dots = 0$$

sein, weil unter der Voraussetzung des Gleichgewichts die Summe der Momente für jede Axe $= 0$ sein muß.

Was die Vorzeichen anlangt, mit denen diese Tetraëder zu nehmen sind, so kann man sich jedes derselben, wie $ABPQ$ oder $ABRS$ erzeugt denken, indem ein Dreieck, dessen Grundlinie AB , und dessen Spitze

veränderlich ist, um AB , als Axe, so gedreht wird, daß seine Spitze, von P nach Q gehend, die Gerade PQ , oder, von R nach S gehend, die Gerade RS beschreibt. Hiernach sind je zwei Tetraëder, wie $ABPQ$ und $ABRS$, mit einerlei oder entgegengesetzten Zeichen zu nehmen, je nachdem die Drehungen, durch welche sie auf die besagte Weise erzeugt werden, einerlei oder entgegengesetzte Richtung haben.

Sind ferner die Kräfte PQ , RS , . . . gleichwirkend mit den Kräften $P'Q'$, $R'S'$. . ., so ist für jede beliebige Lage der Axe die Summe der Momente der erstern Kräfte gleich der Summe der Momente der letztern, und man hat folglich für jede Lage der Punkte A und B die Gleichung:

$$ABPQ + ABRS + \dots = ABP'Q' + ABR'S' + \dots,$$

wo rücksichtlich der Vorzeichen dasselbe wie vorhin zu bemerken ist.

Die Untersuchungen, welche ich mit Hülfe dieser neuen Ansicht der Momente, als Tetraëder, schon seit längerer Zeit angestellt habe, und die damit gewonnenen, zum Theil neuen, Resultate werde ich bei einer andern Gelegenheit mittheilen, und jetzt nur noch die Anwendung dieser Ansicht auf das Theorem des Herrn Chasles zeigen, das, wie man schon im Voraus wahrnimmt, sich hiermit sehr einfach darthun läßt.

Ein System von Kräften, welche auf einen freien festen Körper wirken, sei das eine Mal auf die zwei Kräfte PQ und RS , das andere Mal auf die zwei Kräfte $P'Q'$ und $R'S'$ reducirt worden; so ist zu beweisen, daß die zwei Tetraëder $PQRS$ und $P'Q'R'S'$ gleichen Inhalt haben.

Weil die erstern zwei Kräfte mit den zwei letztern gleichwirkend sind, so hat man für jede Lage und Gröfse der Axe AB die Gleichung:

$$ABPQ + ABRS = ABP'Q' + ABR'S'.$$

Man lasse nun die willkührlichen zwei Punkte A und B resp. mit P und Q zusammenfallen, so wird das Tetraëder $ABPQ = 0$, und man erhält:

$$1) \quad PQRS = PQP'Q' + PQR'S'.$$

Eben so ergibt sich, wenn man AB nach und nach mit RS , $P'Q'$, $R'S'$ coincidiren läßt:

$$2) \quad RSPQ = RSP'Q' + RSR'S',$$

$$3) \quad P'Q'PQ + P'Q'RS = P'Q'R'S',$$

$$4) \quad R'S'PQ + R'S'RS = R'S'P'Q'.$$

Man überzeugt sich aber leicht, daß den zwei nur durch die Folge der Buchstaben verschiedenen Ausdrücken, $PQRS$ und $RSPQ$, desselben Tetraëders einerlei Vorzeichen zukommen. Wird nemlich das eine Mal PQ zur Axe genommen, die man sich in verticaler Lage denke, P oben, Q unten, — und geschieht alsdann die Drehung des, das Tetraëder $PQRS$ erzeugenden Dreiecks, indem es sich aus der Lage PQR in die Lage PQS begiebt von der Rechten nach der Linken, so wird auch, wie die Anschauung lehrt, wenn, zufolge des Ausdruckes $RSPQ$, RS zur Axe, R oben, S unten, genommen wird, das nunmehr erzeugende und um RS sich drehende Dreieck, um mit seiner Spitze von P nach Q zu kommen, sich gleichfalls von der Rechten nach der Linken drehen müssen. — Dasselbe gilt auch von den übrigen in den Gleichungen 1. bis 4. vorkommenden Paaren von Ausdrücken, in denen die zwei ersten und die zwei letzten Buchstaben mit einander vertauscht sind. (Vergl. Barycentr. Calcul, §. 20. a.)

Addirt man daher jene vier Gleichungen, und läßt die zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens einander gleichen Glieder weg, so kommt:

$$2.PQRS = 2.P'Q'R'S', \text{ und somit } PQRS = P'Q'R'S'$$

wie zu erweisen war.

Zusätze. Weil PQ und RS mit $P'Q'$ und $R'S'$ gleichwirkend sind, so halten die vier Kräfte PQ , RS , $Q'P'$, $S'R'$ einander das Gleichgewicht. Dieses vorausgesetzt, ist also $PQRS = P'Q'R'S'$, $= Q'P'S'R'$, auch dem Zeichen nach, wie sich auf eine der vorigen ganz ähnliche Weise zeigen läßt. Hiernach kann der Satz des Hrn. Chasles auch so ausgedrückt werden:

Hat man vier Kräfte, die mit einander im Gleichgewicht sind, so ist das aus irgend zwei derselben gebildete Tetraëder dem Tetraëder aus den beiden andern gleich.

Um die vorige Rechnung bequemer und damit auf noch mehrere Kräfte leicht ausdehnbar zu machen, will ich die Kräfte, oder vielmehr die Linien, wodurch sie vorgestellt werden, mit p , q , r , . . . , die Axe AB , worauf ihre Momente bezogen werden, mit a , und die Tetraëder, welche a und p , a und q , p und q , u. s. w. zu gegenüberstehenden Seiten haben, mit ap , aq , pq , u. s. w. bezeichnen. Alsdann ist beim Gleich-

gewicht zwischen den vier Kräften p, q, r, s :

$$ap + aq + ar + as = 0,$$

und, wenn man a nach und nach mit $p, \dots s$ zusammenfallen läßt:

$$1) \quad pq + pr + ps = 0,$$

$$2) \quad pq + qr + qs = 0,$$

$$3) \quad pr + qr + rs = 0,$$

$$4) \quad ps + qs + rs = 0,$$

weil die Tetraëder $pp, qq, \dots = 0$ sind. Die halbe Summe dieser 4 Gleichungen giebt:

$$\text{I.} \quad pq + pr + ps + qr + qs + rs = 0,$$

d. h.: Sind vier Kräfte im Gleichgewicht, so ist die Summe der sechs Tetraëder, welche durch paarweise Verbindung der Kräfte hervorgehen, $= 0$.

Zieht man von I. die Gleichung 4) ab, so kommt:

$$\text{II.} \quad pq + pr + qr = 0;$$

d. h.: Haben drei Kräfte (p, q, r) eine einzige Resultante ($-s$), so ist die Summe der drei Tetraëder, welche durch paarweise Verbindung der drei Kräfte erhalten werden, $= 0$.

Wird endlich von II. die Gleichung 3) abgezogen, so kommt:

$$\text{III.} \quad pq - rs = 0,$$

welches der Satz des Hrn. Chasles, auf die kurz vorhin gedachte Weise ausgedrückt, ist.

Auf ähnliche Art wollen wir jetzt ein System von 5 Kräften $p, \dots t$, die im Gleichgewicht mit einander stehen, behandeln. — Aus der Gleichung $ap + \dots + at = 0$ folgt durch successives Zusammenfallen der Axe a mit $p, \dots t$:

$$1) \quad pq + pr + ps + pt = 0,$$

$$2) \quad pq + qr + qs + qt = 0,$$

$$3) \quad pr + qr + rs + rt = 0,$$

$$4) \quad ps + qs + rs + st = 0,$$

$$5) \quad pt + qt + rt + st = 0.$$

Die halbe Summe dieser 5 Gleichungen ist:

$$\text{I.} \quad pq + pr + ps + pt + qr + qs + qt + rs + rt + st = 0.$$

Hiervon die Gleichung 5) abgezogen, kommt:

$$\text{II.} \quad pq + pr + ps + qr + qs + rs = 0,$$

und, wenn man davon noch die Gleichung 4) abzieht:

$$\text{III. } pq + pr + qr = st.$$

Man erkennt hieraus zur Genüge, welches die Formeln bei einer noch größern Anzahl von Kräften sein werden, und kann damit ohne weitere Rechnung folgendes allgemeine Theorem aufstellen:

Hat man eine beliebige Anzahl, $= n$, von Kräften, welche auf einen freien, festen Körper wirken und sind diese Kräfte im Gleichgewicht (wie die 5 Kräfte $p, \dots t$ in I.), oder lassen sie sich auf eine einzige Kraft reduciren (wie die vier Kräfte $p, \dots s$ in II. auf die Kraft $-t$), so ist die algebraische Summe der $\frac{1}{2}n(n-1)$ Tetraëder, welche hervorgehen, indem man die Kräfte durch Linien ausdrückt, und je zwei derselben zu gegenüberliegenden Seiten eines Tetraëders nimmt, $= 0$. Im allgemeinen Falle aber, wo die n Kräfte sich nicht auf eine, jedoch immer auf zwei Kräfte zurückführen lassen (wie die drei Kräfte p, q, r in III., deren Resultanten $-s$ und $-t$ sind), ist jene Summe von Tetraëdern dem aus den zwei resultirenden Kräften gebildeten Tetraëder selbst gleich.

Letzteres ist daher von constanter Gröfse, wie auch die n Kräfte auf zwei reducirt werden mögen, welches wiederum der Chasles'sche Satz ist.

12.

Suite des notices sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. C. G. J. Jacobi, prof. en math. à Königsberg.)

I.

Je vais rapporter ici l'équation à différences partielles qui sert à définir les substitutions à faire pour parvenir à une transformation des fonctions elliptiques, et dont j'ai donné la notice dans le troisième volume de ce journal.

Soit, en faisant usage de la notation dont je me sers ordinairement

$$x = \sqrt{\kappa} \sin \operatorname{am}(u, \kappa); \quad y = \sqrt{\lambda} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right),$$

λ étant le module dans lequel se change le module κ par la transformation correspondante à un nombre n impair, on sait qu'on a

$$y = \frac{x(B^{\binom{n-1}{2}} + B^{\binom{n-3}{2}}x^2 + \dots + Bx^{n-1})}{B + B'x^2 + B''x^4 + \dots + B^{\binom{n-1}{2}}x^{n-1}},$$

les quantités $\lambda, M, B, B', \dots, B^{\binom{n-1}{2}}$ étant déterminées convenablement en fonctions de κ . On aura ici

$$B = \sqrt{\left(\frac{\lambda'}{\kappa' M}\right)}, \quad B^{\binom{n-1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\lambda \lambda'}{\kappa \kappa' M^2}\right)}.$$

Soit

$$U = x(B^{\binom{n-1}{2}} + B^{\binom{n-3}{2}}x^2 + \dots + Bx^{n-1}),$$

$$V = B + B'x^2 + B''x^4 + \dots + B^{\binom{n-1}{2}}x^{n-1}$$

et de plus $\alpha = \frac{1+\kappa\kappa'}{\kappa}$, les fonctions U, V satisferont l'une et l'autre à l'équation aux différences partielles suivante:

$$1) \quad n(n-1)x^2.z + (n-1)(\alpha x - 2x^3)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + (1 - \alpha x^2 + x^4)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 2n(\alpha\alpha - 4)\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right).$$

L'équation modulaire étant supposée connue, l'équation (1.) suffit pour trouver toutes les quantités $B, B', \dots, B^{\binom{n-1}{2}}$ exprimées en fonctions rationnelles des deux modules κ et λ . On pourra donc dire en quelque sorte que cette équation contienne la solution générale du problème de la transformation des fonctions elliptiques, et sous une forme tout à fait

différente de celle sous laquelle nous l'avons fait connoître, Mr. Abel et moi, dans nos recherches sur cette matière. Elle donne aussi d'une manière directe les formules relatives à la multiplication. En effet, étant supposé $x = \sqrt{z} \sin \operatorname{am}(u)$, $y = \sqrt{z} \sin \operatorname{am}(nu)$, si l'on met :

$$y = \frac{Bx^{nn} + B'x^{nn-2} + B''x^{nn-4} + \dots + B^{(\frac{nn-1}{2})}x}{B + B'x^2 + B''x^4 + \dots + B^{(\frac{nn-1}{2})}x^{nn-1}},$$

on trouve :

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{n}, \quad B' = 0, \\ n^2(n^2-1)B + & \quad * \quad + 3 \cdot 4 B'' = 0, \\ & * \quad + 4(n^2-4)\alpha B'' + 4 \cdot 6 B''' = 0, \\ (n^2-4)(n^2-5)B'' + 6(n^2-6)\alpha B''' + 7 \cdot 8 B^{iv} &= 2n^2(\alpha\alpha-4)\frac{\partial B'''}{\partial \alpha}, \\ (n^2-6)(n^2-3)B''' + 8(n^2-8)\alpha B^{iv} + 9 \cdot 10 B^v &= 2n^2(\alpha\alpha-4)\frac{\partial B^{iv}}{\partial \alpha}, \\ \dots \dots \dots & \dots \dots \dots \\ 5 \cdot 4 B^{(\frac{n^2-5}{2})} + (n^2-3)3\alpha B^{(\frac{n^2-3}{2})} + (n^2-2)(n^2-1)B^{(\frac{n^2-1}{2})} &= 2n(\alpha\alpha-4)\frac{\partial B^{(\frac{n^2-3}{2})}}{\partial \alpha}, \\ 2 \cdot 3 B^{(\frac{n^2-3}{2})} + (n^2-1)\alpha B^{(\frac{n^2-1}{2})} + & \quad * \quad = 0, \\ B^{(\frac{n^2-1}{2})} &= \sqrt{n^3}. \end{aligned}$$

On tire aisément de ces équations les valeurs de $B, B', B'', \dots$ $\dots B^{(\frac{nn-1}{2})}$, soit en partant de $B = \sqrt{n}$ ou de $B^{(\frac{n^2-1}{2})} = \sqrt{n^3}$. Tout cela s'applique aussi, des légères modifications étant faites, au cas où n est un nombre pair.

Il est très remarquable que l'équation 1. a des intégrales algébriques. Son intégration générale peut être réduite à celle de l'équation connue et plus simple :

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right).$$

En effet soit $z = \psi(v, \omega)$ une intégrale quelconque de celle-ci, si l'on met $x = \sqrt{z} \sin \phi$, on aura, en employant la notation de Mr. Legendre, l'intégrale suivante de l'équation 1.

$$z = \frac{\psi\left(\frac{n\pi F(\phi)}{2F^2}, \frac{n\pi F^1(x')}{4F^1}\right)}{\sqrt{(x'F^2)} \cdot e \int_0^q \partial \phi \frac{F^1 E(E) - E^1 F(E)}{F^1 \Delta(E)}}.$$

II.

Supposant $x = \sin \operatorname{am}(u)$, les quantités $\sin \operatorname{am}(2u)$, $\sin \operatorname{am}(3u)$, $\sin \operatorname{am}(4u)$ etc. peuvent être exprimées d'une manière assez remarquable au moyen des différentielles des quantités $\sqrt{[x^2(1-x^2)(1-n^2x^2)]}$, $\sqrt{\left[\frac{(1-x^2)(1-n^2x^2)}{x^2}\right]}$, prises par rapport à x^2 . Soit

$$\sqrt{[x^2(1-x^2)(1-n^2x^2)]} = A, \quad \sqrt{\left[\frac{(1-x^2)(1-n^2x^2)}{x^2}\right]} = B,$$

on trouve

$$\sin \operatorname{am} 2u = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{\partial B}{\partial x^2}},$$

$$\sin \operatorname{am} 3u = x^3 \cdot \frac{\frac{\partial^2 B}{(\partial x^2)^2}}{\frac{\partial^2 A}{(\partial x^2)^2}},$$

$$\sin \operatorname{am} 4u = \frac{1}{x^4} \cdot \frac{\frac{\partial^3 A}{2 \cdot 3 (\partial x^2)^3}}{\frac{\frac{\partial^2 B}{2 (\partial x^2)^2} \cdot \frac{\partial^2 B}{2 (\partial x^2)^2} - \frac{\partial B}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^3 B}{2 \cdot 3 (\partial x^2)^3}},$$

$$\sin \operatorname{am} 5u = x^5 \cdot \frac{\frac{\frac{\partial^3 B}{2 \cdot 3 (\partial x^2)^3} \cdot \frac{\partial^3 B}{2 \cdot 3 (\partial x^2)^3} - \frac{\partial^2 B}{2 (\partial x^2)^2} \cdot \frac{\partial^4 B}{2 \cdot 3 \cdot 4 (\partial x^2)^4}}{\frac{\frac{\partial^3 A}{2 \cdot 3 (\partial x^2)^3} \cdot \frac{\partial^3 A}{2 \cdot 3 (\partial x^2)^3} - \frac{\partial^2 A}{2 (\partial x^2)^2} \cdot \frac{\partial^4 A}{2 \cdot 3 \cdot 4 (\partial x^2)^4}},$$

La loi générale de la composition de ces expressions est aisée à saisir. On aura des formules analogues si l'on veut employer au lieu des différentielles de $\sqrt{[x^2(1-x^2)(1-n^2x^2)]}$, $\sqrt{\left[\frac{(1-x^2)(1-n^2x^2)}{x^2}\right]}$ celles des quantités $\frac{1}{\sqrt{[x^2(1-x^2)(1-n^2x^2)]}}$, $\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{(1-x^2)(1-n^2x^2)}{x^2}\right]}}$,

III.

Nous allons établir dans ce qui suit les formules générales relatives à la transformation des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce.

Soit n un nombre impair quelconque, ω une quantité telle que $\sin \operatorname{am}(2n\omega) = 0$ et soit en même tems n le nombre le plus petit pour lequel $\sin \operatorname{am}(2n\omega)$ s'évanouit, si l'on met

$$\lambda = x^n \{ \sin \operatorname{co} \operatorname{am} 2\omega \cdot \sin \operatorname{co} \operatorname{am} 4\omega \dots \sin \operatorname{co} \operatorname{am} 2(n-1)\omega \}^2,$$

$$\mu = \left\{ \frac{\sin \operatorname{co} \operatorname{am} 2\omega \cdot \sin \operatorname{co} \operatorname{am} 4\omega \dots \sin \operatorname{co} \operatorname{am} 2(n-1)\omega^2}{\sin \operatorname{am} 2\omega \cdot \sin \operatorname{am} 4\omega \dots \sin \operatorname{am} 2(n-1)\omega} \right\},$$

on a la formule connue

$$1) \quad \frac{\lambda}{\pi M} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$$

$$= \sin \operatorname{am}(u) + \sin \operatorname{am}(u + 4\omega) + \sin \operatorname{am}(u + 8\omega) + \dots + \sin \operatorname{am}[u + 4(n-1)\omega]$$

Cela posé, je remarque qu'on a

$$\sin^2 \operatorname{am}(u + a') - \sin^2 \operatorname{am}(u + a) = \sin \operatorname{am}(a' - a) \frac{\partial \sin \operatorname{am}(u + a) \sin \operatorname{am}(u + a')}{\partial u},$$

formule facile à vérifier. Soit $a' = a + b$, $a'' = a + 2b$, et généralement $a^{(m)} = a + mb$; en mettant successivement a' , a'' ; a''' , a''' ; etc. $a^{(n-1)}$, $a^{(n)}$ au lieu de a , a' et ajoutant, il vient:

$$\sin^2 \operatorname{am}(u + a^{(n)}) - \sin^2 \operatorname{am}(u + a) = \sin \operatorname{am}(b) \cdot \frac{\partial \Sigma \sin \operatorname{am}(u + a) \sin \operatorname{am}(u + a')}{\partial u},$$

Or on a en même tems

$$\sin^2 \operatorname{am}(u + a^{(n)}) - \sin^2 \operatorname{am}(u + a) = \sin \operatorname{am}(nb) \cdot \frac{\partial \sin \operatorname{am}(u + a) \sin \operatorname{am}(u + a^{(n)})}{\partial u},$$

delà on tire, en intégrant, cette formule remarquable:

$$2) \quad \sin \operatorname{am}(b) \Sigma \sin \operatorname{am}(u + a) \sin \operatorname{am}(u + a')$$

$$= \sin \operatorname{am}(nb) \sin \operatorname{am}(u + a) \sin \operatorname{am}(u + a^{(n)}) + \text{const.}$$

Soit $\sin \operatorname{am}(nb) = 0$, il vient

$$3) \quad \Sigma \sin \operatorname{am}(u + a) \sin \operatorname{am}(u + a') = \text{const.}$$

Au moyen de cette formule on tire de la formule 1. la suivante

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2 M^2} \sin^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$$

$$= \sin^2 \operatorname{am}(u) + \sin^2 \operatorname{am}(u + 4\omega) + \dots + \sin^2 \operatorname{am}[u + 4(n-1)\omega] + \text{const.},$$

ou puisqu'on a $\sin^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) = 0$, pour $u = 0$, celle qui suit,

$$4) \quad \frac{\lambda^2}{\pi^2 M^2} \sin^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$$

$$= \sin^2 \operatorname{am}(u) + \sin^2 \operatorname{am}(u + 4\omega) + \dots + \sin^2 \operatorname{am}[u + 4(n-1)\omega]$$

$$- 2 \{ \sin^2 \operatorname{am} 4\omega + \sin^2 \operatorname{am} 8\omega + \dots + \sin^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega \}.$$

Cela donne aussi

$$5) \quad \frac{\lambda^2}{\pi^2 M^2} \cos^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$$

$$= \cos^2 \operatorname{am}(u) + \cos^2 \operatorname{am}(u + 4\omega) + \dots + \cos^2 \operatorname{am}[u + 4(n-1)\omega] \\ - 2 \{ \cos^2 \operatorname{co am}(4\omega) + \cos^2 \operatorname{co am}(8\omega) + \dots + \cos^2 \operatorname{co am} 2(n-1)\omega \},$$

$$6) \quad \frac{1}{M^2} \Delta^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) = \Delta^2 \operatorname{am}(u) + \Delta^2 \operatorname{am}(u + 4\omega) + \dots + \Delta^2 \operatorname{am}[u + 4(n-1)\omega] \\ + 2 \{ \cotg^2 \operatorname{am}(4\omega) + \cotg^2 \operatorname{am}(8\omega) + \dots + \cotg^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega \}.$$

En intégrant on a, pour la fonction entière de la seconde espèce,

$$7) \quad \frac{E^1(\lambda)}{M^2 F^1(\lambda)} - n \cdot \frac{E^1(\kappa)}{F^1(\kappa)} = 2 \{ \cotg^2 \operatorname{am}(4\omega) + \cotg^2 \operatorname{am}(8\omega) + \dots + \cotg^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega \}.$$

Soit $\varphi = \text{am}(u)$, si l'on met

$$Z(u) = \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1},$$

on tire des formules 6., 7. cette autre qui offre la transformation des intégrales elliptiques indéfinies de la seconde espèce:

$$8) \frac{1}{M} Z\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = Z(u) + Z(n+4\omega) + \dots + Z[u+4(n-1)\omega],$$

formule qui peut être transformée dans celle-ci:

$$9) nZ(u) - \frac{1}{M} Z\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) =$$

$$2\kappa^2 \sin \text{am}(u) \cos \text{am}(u) \Delta \text{am}(u) \Sigma \frac{\sin^2 \text{am}(2m\omega)}{1 - \kappa^2 \sin^2 \text{am}(2m\omega) \sin^2 \text{am}(u)},$$

où l'on donnera à m toutes les valeurs $1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$.

Soit $\alpha = \text{am}(a)$, je considère les fonctions elliptiques de la troisième espèce sous la forme:

$$\kappa^2 \sin \alpha \cos \alpha \Delta(\alpha) \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi \cdot \partial \varphi}{\{1 - \kappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi\} \Delta(\varphi)} = \Pi(u, \alpha).$$

En introduisant la nouvelle transcendente

$$\sqrt{\left(\frac{2\kappa' F^1}{\pi}\right)} e^{\int_0^\varphi \frac{F^1 E(\varphi) - E^1 F(\varphi)}{F^1 \Delta(\varphi)}} = \Theta(u),$$

on a

$$Z(u) = \frac{\partial \Theta(u)}{\Theta(u) \partial u},$$

$$\Pi(u, \alpha) = uZ(\alpha) + \log \sqrt{\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)}}.$$

Cette dernière formule fait voir que les fonctions elliptiques de la troisième espèce, lesquelles dépendent de trois élémens, peuvent être réduites à d'autres transcendentes qui n'en ont que deux. L'intégration de la formule 9. donne les formules générales pour la transformation de la fonction $\Theta(u)$, desquelles on peut déduire celles des fonctions elliptiques de la troisième espèce. Quant à ces dernières, on trouve

$$10) \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n\Pi(u, a, \kappa)$$

$$= \frac{u}{M} Z\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - nuZ(a, \kappa) + \log \sqrt{\Pi \frac{1 - \kappa^2 \sin^2 \text{am}(2m\omega) \sin^2 \text{am}(u-a)}{1 - \kappa^2 \sin^2 \text{am}(2m\omega) \sin^2 \text{am}(u+a)}},$$

en désignant par Π le produit de tous les facteurs, que l'on obtient en donnant à m les valeurs $1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$.

On peut aussi parvenir directement de la fonction $\Theta(u)$ aux formules de transformation en partant de son développement en produit infini, comme nous l'avons montré dans le troisième volume de ce journal. De là, en suivant une marche inverse de celle qu'on vient de présenter, on tire sur le champ les formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques de la première et de la troisième espèce, et en différenciant, celles de transformation des fonctions elliptiques de la seconde espèce. Tout cela s'applique encore, quelques légères modifications près, au cas où n est un nombre pair.

IV.

Pour exprimer $\sin \operatorname{am}(u, \kappa)$ par $\sin \operatorname{am}\left(\frac{n}{M}, \lambda\right)$ ou $\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ par $\sin \operatorname{am}(nu)$, il y a à résoudre une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré. Nous allons présenter les expressions algébriques et générales de ces racines.

Désignons par $\Phi(u, \omega, \kappa)$ l'expression suivante:

$$H[1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(2m\omega) \sin^2 \operatorname{am} u],$$

en donnant toujours à m les valeurs 1, 2, 3, ..., $\frac{n-1}{2}$; soit ω' une quantité telle qu'on ait

$\kappa = \lambda^n \{\sin \operatorname{co} \operatorname{am}(2\omega', \lambda) \sin \operatorname{co} \operatorname{am}(4\omega', \lambda) \dots \sin \operatorname{co} \operatorname{am}[(n-1)\omega', \lambda]^2\}$,
soit de plus

$$A_p = \frac{\Phi(4p\omega', \omega', \lambda) \Phi\left(\frac{u}{M}, \omega', \lambda\right)}{\Phi\left(\frac{u}{M} + 4p\omega', \omega', \lambda\right)},$$

on aura, en désignant par p l'un des nombres 0, 1, 2, 3, ..., $n-1$:

$$\begin{aligned} & 1) \frac{n\kappa M}{\lambda} \sin \operatorname{am}\left(u + \frac{4p\omega}{n}, \kappa\right) \\ &= \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + \alpha \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M} + 4\omega', \lambda\right) \sqrt[n]{A_1} + \alpha^2 \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M} + 8\omega', \lambda\right) \sqrt[n]{A_2} \\ &+ \dots + \alpha^{n-1} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M} + 4(n-1)\omega', \lambda\right) \sqrt[n]{A_{n-1}}, \end{aligned}$$

α étant une racine quelconque de l'équation $x^n = 1$. En mettant au lieu de α toutes ses valeurs, on aura toutes les racines de l'équation proposée, qui répondent aux différentes valeurs du nombre p . Il faut remarquer encore qu'on a

*) Soit $\omega = \frac{mK + m'iK'}{n}$, on aura $\omega' = \frac{\mu K + \mu'iK'}{nM}$, μ, μ' étant des nombres entiers quelconques positifs ou négatifs, tels que $m\mu' - \mu m' = 1$.

$$\sqrt[n]{A_m} \sqrt[n]{A_{n-m}} = 1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(4p\omega', \lambda) \cdot \sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right).$$

On pourra exprimer généralement tous les radicaux $\sqrt[n]{A_1}, \sqrt[n]{A_2}, \dots, \sqrt[n]{A_{n-1}}$, par les puissances de l'un entre eux.

Ce théorème est un des plus importants, trouvés jusqu'ici dans la théorie des fonctions elliptiques. Il fournit aussi la solution algébrique et générale de l'équation du degré nn , de laquelle dépend la division de la fonction elliptique en n parties, comme on va le voir dans ce qui suit.

Supposons pour plus de simplicité que n soit un nombre premier*), le nombre de toutes les transformations correspondantes au nombre n sera $n+1$. Ce sont celles qui répondent aux valeurs suivantes de ω :

$$\frac{K}{n}, \frac{iK'}{n}, \frac{iK'}{n} + \frac{K}{n}, \frac{iK'}{n} + \frac{2K}{n}, \dots, \frac{iK'}{n} + \frac{(n-1)K}{n}.$$

Soient les valeurs de λ et de M qui répondent à ces différentes valeurs de ω :

$$\begin{aligned} \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \\ M, M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \end{aligned}$$

on prouvera aisément la formule remarquable

$$\begin{aligned} & 2) \sin \operatorname{am}(nu, \kappa) \\ = & \frac{\lambda}{n\kappa M} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + \frac{\lambda_1}{n\kappa M_1} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1\right) + \frac{\lambda_2}{n\kappa M_2} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M_2}, \lambda_2\right) + \dots \\ & \dots + \frac{\lambda_n}{n\kappa M_n} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n\right). \end{aligned}$$

En changeant dans la formule (1.) u en $\frac{u}{M_p}$, κ en λ_p , λ_p en κ , M_p en $\frac{1}{nM_p}$, $\frac{u}{M_p}$ en nu , on parviendra à exprimer toutes les quantités

$$\frac{\lambda_p}{n\kappa M_p} \cdot \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M_p}, \lambda_p\right) \text{ par } \sin \operatorname{am}(nu, \kappa).$$

Soit

$$\frac{\Phi(4p\omega, \omega) \Phi(nu, \omega)}{\Phi(nu + 4p\omega, \omega)} = B_p,$$

et désignons par $B_p, B'_p, B''_p, B'''_p, \dots, B_p^{(n)}$ les valeurs de B_p qui répondent aux différentes valeurs de ω , et par $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$ les différentes valeurs de ω , on a:

*) Il n'y a qu'à faire de légères modifications dans le cas où n est un nombre composé.

3) $n \sin \operatorname{am} \left(u + \frac{4mK + 4m'iK'}{n} \right) = \sin \operatorname{am} (nu)$
 $+ \alpha \sin \operatorname{am} (nu + 4\omega) \sqrt[n]{B_1} + \dots + \alpha^{n-1} \sin \operatorname{am} [nu + 4(n-1)\omega] \sqrt[n]{B_{n-1}}$
 $+ \beta \sin \operatorname{am} (nu + 4\omega_1) \sqrt[n]{B'_1} + \dots + \beta^{n-1} \sin \operatorname{am} [nu + 4(n-1)\omega_1] \sqrt[n]{B'_{n-1}}$
 $+ \alpha\beta \sin \operatorname{am} (nu + 4\omega_2) \sqrt[n]{B''_1} + \dots + \alpha^{n-1} \beta^{n-1} \sin \operatorname{am} [nu + 4(n-1)\omega_2] \sqrt[n]{B''_{n-1}}$
 $+ \alpha^2 \beta \sin \operatorname{am} (nu + 4\omega_3) \sqrt[n]{B'''_1} + \dots + \alpha^{2(n-1)} \beta^{n-1} \sin \operatorname{am} [nu + 4(n-1)\omega_3] \sqrt[n]{B'''_{n-1}}$
 $\dots \dots \dots$
 $+ \alpha^{n-1} \beta \sin \operatorname{am} (nu + 4\omega_n) \sqrt[n]{B_1^{(n)}} + \dots + \alpha^{(n-1)^2} \beta^{n-1} \sin \operatorname{am} [nu + 4(n-1)\omega_n] \sqrt[n]{B_{n-1}^{(n)}};$
m et *m'* étant des nombres entiers quelconques, et α, β des racines de l'équation $x^n = 1$. En donnant à α, β toutes les valeurs dont elles sont susceptibles, on aura les valeurs différentes de l'expression $\sin \operatorname{am} \left(u + \frac{4(mK + m'iK')}{n} \right)$, qui sont au nombre de nn . Ce sont les nn racines de l'équation à résoudre, présentées sous la forme la plus simple, telle que je l'avais présentée dans le troisième vol. de ce journal (cah. 1.). Je remarque encore que l'on peut exprimer tous les radicaux, qui sont au nombre $nn - 1$, par les puissances de deux quelconques entre eux qui ne se trouvent pas dans la même série horizontale.

V.

Puisqu'on peut exprimer rationnellement $\sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$, $\sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_1}, \lambda_1 \right)$, $\dots$, $\sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_n}, \lambda_n \right)$ par $\sin \operatorname{am} (u, \kappa)$, on pourra aussi exprimer les premières quantités par une quelconque entr'elles; mais pour cela il y a à résoudre une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré dans chaque cas. Nous allons rapporter dans ce qui suit les expressions générales et algébriques des racines des ces équations.

En conservant les notations du numéro précédent, soit

$$C_p = \frac{\Phi \left(\frac{u}{M} + 4p\omega', \omega', \lambda \right)}{\Phi \left(\frac{u}{M}, \omega', \lambda \right)},$$

on aura

$$\begin{aligned} 1) \sqrt[n]{\left(\frac{\lambda_m}{\lambda} \right)} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_m}, \lambda_m \right) = \\ \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) + \alpha \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M} + 4\omega', \lambda \right) \sqrt[n]{C_1} + \alpha^2 \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M} + 8\omega', \lambda \right) \sqrt[n]{C_2} + \dots \\ + \alpha^{(n-1)^2} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M} + 4(n-1)\omega', \lambda \right) \sqrt[n]{C_{n-1}} \\ \hline 1 + \alpha \sqrt[n]{C_1} + \alpha^2 \sqrt[n]{C_2} + \alpha^3 \sqrt[n]{C_3} + \dots + \alpha^{(n-1)^2} \sqrt[n]{C_{n-1}}, \end{aligned}$$

α étant une racine quelconque de l'équation $x^n = 1$. En donnant à α toutes ses valeurs, on aura les n expressions qui répondent aux différens modules $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Chaque expression, telle que

$$\sqrt[n]{\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_m}, \lambda_m \right),$$

étant donnée par la résolution d'une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré dont les racines ont pour expression générale

$$\sqrt[n]{\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M_m} + 4p\omega'_m, \lambda_m \right),$$

ω'_m étant la même chose par rapport au module λ_m que ω' l'est par rapport à λ_m : on aura les expressions algébriques de toutes ces racines, qui sont au nombre n et qui répondent à un même module λ_m , en multipliant les radicaux par $\alpha^{pp}\beta^p$ au lieu de α^{pp} , β étant encore une racine quelconque de l'équation $x^n = 1$. On pourra aussi exprimer tous les radicaux par les puissances d'un entre eux. Du reste, ayant supposé que n est un nombre premier, la formule 1. aura à subir quelques modifications lorsque n est un nombre quelconque.

VI.

Je termine ces remarques par l'énoncé du théorème suivant, fourni par les mêmes méthodes qui m'ont conduit aux résultats précédens.

„Etant supposés connus tous les modules dans lesquels on peut transformer un module donné α à l'aide d'une transformation correspondante au nombre n , on peut exprimer par ces modules toutes les quantités de la forme $\sin \operatorname{am} \frac{2mK + 2m'iK'}{n}$, m, m' étant des nombres quelconques, sans qu'il étoit nécessaire de résoudre une équation algébrique.”

Les résultats dont je viens de donner ici une exposition rapide, font partie de ceux qu'on trouvera dans la seconde partie de mon ouvrage sur les fonctions elliptiques (*Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*). La première partie de cet ouvrage paroitra incessamment *).

*) Elle se vendra à Paris chez Mr. Ponthieu et Comp., Palais royal, Galerie de Bois No. 252.

Königsberg, le 11. Janvier 1829.

13.

Théorèmes sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. N. H. *Abel.*)

La formule donnée par Mr. Jacobi dans le tome III. pag. 86. de ce journal peut être établie facilement à l'aide d'un théorème que nous allons démontrer dans ce qui suit.

En faisant $\varphi\theta = x$, on aura, en vertu de ce qu'on a vu dans le §. III. du mémoire No. 12. tome 2. de ce journal p. 117.,

$$1. \quad \varphi(2n+1)\theta = R,$$

où R est une fonction rationnelle de x , le numérateur étant du degré $(2n+1)^2$ et le dénominateur du degré $(2n+1)^2 - 1$. L'équation (1.) est donc du degré $(2n+1)^2$ et ses racines peuvent être exprimées par la formule:

$$2. \quad x = \varphi\left(\theta + \frac{2m\omega + 2\mu\pi i}{2n+1}\right),$$

en donnant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ incl.

Soit pour abréger

$$3. \quad \frac{2\omega}{2n+1} = \alpha, \quad \frac{2\pi i}{2n+1} = \beta,$$

l'expression des racines sera:

$$4. \quad x = \varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta).$$

Cela posé, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. Soit $\psi\theta$ une fonction entière quelconque de la quantité $\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)$ qui reste la même en changeant θ en $\theta + \alpha$ et en $\theta + \beta$. Soit ν le plus grand exposans de la quantité $\varphi\theta$ dans la fonction $\psi\theta$, on aura toujours

$$5. \quad \psi\theta = p + q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta$$

où p et q sont deux fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu - 2$.

Démonstration. En vertu de la formule (10.) tome 2. pag. 105. on a

$$\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{\varphi\theta.f(m\alpha + \mu\beta).F(m\alpha + \mu\beta) + \varphi(m\alpha + \mu\beta).f\theta.F\theta}{1 + e^2 c^2 . \varphi^2(m\alpha + \mu\beta). \varphi^2\theta}.$$

Cela fait voir que $\psi\theta$ pourra s'exprimer rationnellement en $\varphi\theta$ et $f\theta.F\theta$.

Or le carré de $f\theta.F\theta$ est rationnel en $\varphi\theta$, savoir

$$(f\theta.F\theta)^2 = (1 - c^2\varphi^2\theta)(1 + e^2\varphi^2\theta),$$

donc on pourra faire en sorte que l'expression de $\psi\theta$ ne contienne la quantité $f\theta.F\theta$ qu'à la première puissance. On pourra donc faire

$$7. \psi\theta = \psi_1\{\varphi\theta\} + \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta,$$

où $\psi_1\{\varphi\theta\}$ et $\psi_2\{\varphi\theta\}$ sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$.

Si l'on met $\omega - \theta$ à la place de θ , on aura, en remarquant que $\varphi(\omega - \theta) = \varphi\theta$, $f(\omega - \theta) = -f\theta$, $F(\omega - \theta) = F\theta$:

$$8. \psi(\omega - \theta) = \psi_1\{\varphi\theta\} - \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta.$$

Des équations (7. et 8.) on tire:

$$9. \psi_1\{\varphi\theta\} = \frac{1}{2} \cdot \{\psi\theta + \psi(\omega - \theta)\},$$

$$10. \psi_2\{\varphi\theta\}.f\theta.F\theta = \frac{1}{2} \cdot \{\psi\theta - \psi(\omega - \theta)\}.$$

Considérons d'abord la fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$. En y mettant $\theta + \alpha$ au lieu de θ , il viendra:

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \alpha)\} = \frac{1}{2} \cdot \{\psi(\theta + \alpha) + \psi(\omega - \alpha - \theta)\};$$

or on a $\psi(\theta + \alpha) = \psi\theta$, et par conséquent aussi, en mettant $\omega - \alpha - \theta$ au lieu de θ :

$$\psi(\omega - \theta) = \psi(\omega - \alpha - \theta);$$

donc

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \alpha)\} = \frac{1}{2} \{\psi\theta + \psi(\omega - \theta)\},$$

c'est-à-dire

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \alpha)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}.$$

On aura de la même manière:

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}.$$

La première de ces équations donne, en mettant successivement $\theta + \alpha$, $\theta + 2\alpha$, ... au lieu de θ :

$$11. \psi_1\{\varphi(\theta + m\alpha)\} = \psi_1\{\varphi\theta\},$$

où m est un nombre entier quelconque.

La seconde équation donne également

$$\psi_1\{\varphi(\theta + \mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\},$$

d'où, en mettant $\theta + m\alpha$ au lieu de θ , et ayant égard à l'équation (11.) on tire:

$$12. \psi_1\{\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)\} = \psi_1\{\varphi\theta\}.$$

Donc la fonction $\psi_1\{\varphi\theta\}$ reste la même, en y substituant au lieu de $\varphi\theta$ une autre racine quelconque de l'équation (1.). En attribuant à m et μ toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $2n$ et puis ajoutant, la formule (12.) donne:

$$13. \psi_1\{\varphi\theta\} = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sum_{\circ}^{2n} \sum_{\circ}^{2n} \psi_1 \cdot \{\varphi(\theta + m\alpha + \mu\beta)\}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction rationnelle et symétrique des racines de l'équation (1.), donc on pourra l'exprimer rationnellement par les coefficients de cette équation, c'est-à-dire en $\varphi(2n+1)\theta$. Soit

$$\psi_1\{\varphi\theta\} = p,$$

la quantité p sera une fonction rationnelle de $\varphi(2n+1)\theta$. Or je dis que p sera toujours entier. En effet soit $\varphi(2n+1)\theta = y$ et $p = \frac{p'}{q'}$, où p' et q' sont des fonctions entières de y sans diviseur commun. Soit $y = \varphi(2n+1)\delta$ une racine de l'équation $q' = 0$: la quantité $p = \frac{1}{2} \{\varphi\theta + \psi(\omega - \theta)\}$ sera infinie en faisant $\theta = \delta$, donc on aura $\psi\delta + \psi(\omega - \delta) = \frac{1}{2}$; maintenant il est évident par la forme de la fonction $\psi\theta$, que cette équation ne peut subsister à moins qu'une quantité de la forme

$$\varphi(\delta + m\alpha + \mu\beta) \text{ ou } \varphi(\omega - \delta + m\alpha + \mu\beta)$$

n'ait une valeur infinie. Soit donc $\varphi(\delta + m\alpha + \mu\beta) = \frac{1}{2}$, on aura en vertu de l'équation 30. tome 2, pag. 113:

$$\delta = (m' + \frac{1}{2})\omega + (n' + \frac{1}{2})\pi i - m\alpha - \mu\beta,$$

où m' et n' sont des nombres entiers; or cette valeur de δ donne:

$$\varphi(2n+1)\delta = \varphi\{[(2n+1)m' + n - 2m]\omega + [(2n+1)n' + n - 2\mu]\pi i + \frac{\omega}{2} + \frac{\pi i}{2}\},$$

c'est-à-dire (26. pag. 111.):

$$\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{2}.$$

Mais cela est impossible, car une racine quelconque de l'équation $q' = 0$ doit être finie. On trouvera également que $\varphi(\omega - \delta + m\alpha + \mu\beta)$ donne $\varphi(2n+1)\delta = \frac{1}{2}$. La quantité p est donc une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$.

Considérons maintenant l'équation (10.). En divisant les deux membres par $f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta$, on aura:

$$\frac{\psi_2\{\varphi\theta\} \cdot f\theta \cdot F\theta}{f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi\theta - \psi(\omega - \theta)}{f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta}.$$

En vertu de ce qu'on a vu tome 2. 45. pag. 117, on aura $f(2n+1)\theta = f\theta \cdot u$, $F(2n+1)\theta = F\theta \cdot v$, où u et v sont des fonctions rationnelles de $\varphi\theta$; donc le second membre de l'équation précédente sera une fonction rationnelle de $\varphi\theta$. En la désignant par $\chi\{\varphi\theta\}$, on aura:

$$\chi\{\varphi\theta\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi\theta - \psi(\omega - \theta)}{f(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta}.$$

En mettant $\theta + \alpha$ au lieu de θ , il viendra $\psi(\theta + \alpha) = \psi\theta$,
 $\psi[\omega - (\theta + \alpha)] = \psi(\omega - \theta)$,

$$f(2n+1)(\theta + \alpha) = f[(2n+1)\theta + 2m\omega + 2\mu\pi i] = f(2n+1)\theta,$$

$$F(2n+1)(\theta + \alpha) = F[(2n+1)\theta + 2m\omega + 2\mu\pi i] = F(2n+1)\theta,$$

donc on aura

$$\chi\{\varphi(\theta + \alpha)\} = \chi(\varphi\theta).$$

De la même manière on trouvera

$$\chi\{\varphi(\theta + \beta)\} = \chi(\varphi\theta).$$

On en tire, comme plus haut, à l'égard de la fonction $\psi_1(\varphi\theta)$, que $\chi(\varphi\theta)$ peut être exprimé par une fonction entière de $\varphi(2n+1)\theta$. Soit donc

$$\chi(\varphi\theta) = q,$$

on aura:

$$\psi_2(\varphi\theta).f\theta.F\theta = q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

et enfin:

$$14. \quad \psi\theta = p + q.f(2n+1)\theta.F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $\varphi(2n+1)\theta$.

Pour trouver les degrés de ces fonctions, soit $(\varphi\theta)^r.\chi\theta$ le terme de $\psi\theta$, dans lequel $\varphi\theta$ est élevé à la plus haute puissance, on aura, en supposant $\varphi\theta$ infini:

$$\psi\theta = A.(\varphi\theta)^r,$$

où A est une constante. De même on aura

$$\psi(\omega - \theta) = A'.(\varphi\theta)^r,$$

et par suite:

$$p = \frac{1}{2}(A + A').(\varphi\theta)^r;$$

mais pour $\varphi\theta$ infini, on a $\varphi(2n+1)\theta = B.\varphi\theta$, où B est une constante. Il suit de là que p sera du degré r par rapport à $\varphi(2n+1)\theta$. On démontrera de la même manière que la fonction q sera du degré $r-2$, tout au plus.

Voilà démontré notre théorème.

Dans le cas où la quantité $\varphi\theta$ ne monte qu'à la première puissance dans $\psi\theta$, on a $r=1$; par conséquent q sera du degré -1 , c'est-à-dire $q=0$. Donc on a dans ce cas

$$15. \quad \psi\theta = A + B.\varphi(2n+1)\theta,$$

où A et B sont des quantités constantes, qu'on trouvera facilement en faisant $\theta=0$ et $\varphi\theta = \frac{1}{\theta}$.

Soit par exemple $\pi\theta$ le produit d'un nombre quelconque des racines de l'équation (1.), et faisons

$$\psi\theta = \sum_0^{2n} \sum_0^{2n} \mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta),$$

il est clair qu'on aura $\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta)$, en remarquant que

$$\pi[\theta + (2n+1)\alpha + \mu\beta] = \pi(\theta + \mu\beta)$$

et

$$\pi[\theta + (2n+1)\beta + m\alpha] = \pi(\theta + m\alpha).$$

Donc:

$$16. \sum_0^{2n} \sum_0^{2n} \mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = A + B \cdot \Phi(2n+1)\theta.$$

Il faut remarquer que l'une des quantités A et B est toujours égale à zéro. On a $A=0$, si le nombre des facteurs de $\pi\theta$ est un nombre impair, et $B=0$, si ce nombre est pair. Donc la quantité $\psi\theta$ est indépendante de la valeur de θ . Dans ce dernier cas, par conséquent, en faisant, $\theta=0$ on a:

$$17. \sum_0^{2n} \sum_0^{2n} \mu \pi(\theta + m\alpha + \mu\beta) = \sum_0^{2n} \sum_0^{2n} \mu \pi(m\alpha + \mu\beta).$$

Donc en faisant

$$\pi\theta = \Phi\theta \cdot \Phi(\theta + k\alpha + k'\beta),$$

on a:

$$18. \begin{cases} \sum_0^{2n} \sum_0^{2n} \mu \Phi(\theta + m\alpha + \mu\beta) \cdot \Phi[\theta + (m+k)\alpha + (\mu+k')\beta] \\ = \sum_0^{2n} \sum_0^{2n} \mu \Phi(m\alpha + \mu\beta) \cdot \Phi[(m+k)\alpha + (\mu+k')\beta], \end{cases}$$

où k et k' sont des nombres entiers quelconques, moindres que $2n+1$. Cependant on ne peut pas supposer à la fois $k=0$, $k'=0$. Car cela donne $\pi\theta = (\Phi\theta)^2$ et par suite $\nu=2$, tandis qu'on doit avoir

$$\nu = 1.$$

De la même manière que nous avons démontré le théorème précédent on pourra encore établir les deux suivans:

Théorème II. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $f(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi\theta = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta),$$

on aura:

$$\psi\theta = p + q \cdot \Phi(2n+1)\theta \cdot F(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $f(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $f\theta$ dans $\psi\theta$.

Théorème III. Soit $\psi\theta$ une fonction quelconque entière des quantités de la forme $F(\theta + m\alpha + \mu\beta)$, telle que

$$\psi(\theta) = \psi(\theta + \alpha) = \psi(\theta + \beta),$$

on aura

$$\psi\theta = p + q \cdot \Phi(2n+1)\theta \cdot f(2n+1)\theta,$$

où p et q sont des fonctions entières de $F(2n+1)\theta$, la première du degré ν et la seconde du degré $\nu-2$, tout au plus, en désignant par ν le plus grand exposant de $F\theta$ dans $\psi\theta$.

En vertu du premier théorème on voit sans difficulté que la valeur de $\Phi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right)$, exprimée en fonction de $\Phi\theta$, sera:

$$\Phi\left(\frac{\theta}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} \cdot \left\{ \sum_m^{4n^2+4n+1} \sqrt{(p_m + q_m \cdot F\theta \cdot f\theta)} \right\},$$

où p_m et q_m sont deux fonctions entières de $\Phi\theta$, la première impaire et du degré $2n+1$, la seconde paire et du degré $2n-2$. D'ailleurs ces fonctions sont déterminées par l'équation

$$p_m^2 - q_m^2 (f\theta)^2 \cdot (F\theta)^2 = (\Phi^2\theta - a_m^2)^{2n+1},$$

où a_m est une constante.

Christiania, le 27. Août 1828.

14.

Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes.

(Par Mr. N. H. Abel.)

Théorème. Soit y une fonction de x qui satisfait à une équation quelconque irréductible de la forme:

$$1. \quad 0 = p_0 + p_1 \cdot y + p_2 \cdot y^2 + \dots + p_{n-1} \cdot y^{n-1} + y^n,$$

où $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ sont des fonctions entières de la variable x . Soit

$$2. \quad 0 = q_0 + q_1 \cdot y + q_2 \cdot y^2 + \dots + q_{n-1} \cdot y^{n-1},$$

une équation semblable, $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ étant également des fonctions entières de x , et supposons variables les coefficients des diverses puissances de x dans ces fonctions. Nous désignerons ces coefficients par $a, a', a'', \dots$. En vertu des deux équations (1.) et (2.) x sera fonction de $a, a', a'', \dots$ et on en déterminera les valeurs en éliminant la quantité y . Désignons par:

$$3. \quad \varrho = 0$$

le résultat de l'élimination, en sorte que ϱ ne contiendra que les variables $x, a, a', a'', \dots$. Soit μ le degré de cette équation par rapport à x , et désignons par

$$4. \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu$$

ses μ racines, qui seront autant de fonctions de $a, a', a'', \dots$. Cela posé, si l'on fait

$$5. \quad \psi x = \int f(x, y) \cdot \partial x$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction rationnelle quelconque de x et de y , je dis, que la fonction transcendente ψx jouira de la propriété générale exprimée par l'équation suivante:

$$6. \quad \psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_\mu = u + k_1 \log v_1 + k_2 \log v_2 + \dots + k_n \log v_n,$$

$u, v_1, v_2, \dots, v_n$ étant des fonctions rationnelles de $a, a', a'', \dots$, et $k_1, k_2, \dots, k_n$ des constantes.

Démonstration. Pour prouver ce théorème il suffit d'exprimer la différentielle du premier membre de l'équation (6.) en fonction de $a, a', a'', \dots$; car il se réduira par là à une différentielle ration-

nelle, comme on le verra. D'abord les deux équations (1.) et (2.) donneront y en fonction rationnelle de $x, a, a', a'', \dots$. De même l'équation (3.): $\varrho = 0$ donnera pour ∂x une expression de la forme:

$$\partial x = \alpha. \partial a + \alpha'. \partial a' + \alpha''. \partial a'' + \dots,$$

où $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ sont des fonctions rationnelles de $x, a, a', a'', \dots$. De là il suit que la différentielle $f(x, y). \partial x$ pourra être mise sous la forme:

$$f(x, y) \partial x = \varphi x. \partial a + \varphi_1 x. \partial a' + \varphi_2 x. \partial a'' + \dots,$$

où $\varphi x, \varphi_1 x, \dots$ sont des fonctions rationnelles de $x, a, a', a'', \dots$. En intégrant, il viendra:

$$\psi x = \int \{ \varphi x. \partial a + \varphi_1 x. \partial a' + \dots \}$$

et de là on tire, en remarquant que cette équation aura lieu en mettant pour x les μ valeurs de cette quantité:

$$\begin{aligned} & 7. \psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_\mu \\ &= \int [\{ \varphi x_1 + \varphi x_2 + \dots + \varphi x_\mu \} \partial a + \{ \varphi_1 x_1 + \varphi_1 x_2 + \dots + \varphi_1 x_\mu \} \partial a' + \dots] \end{aligned}$$

Dans cette équation les coefficients des différentielles $\partial a, \partial a', \dots$ sont des fonctions rationnelles de $a, a', a'', \dots$ et de $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, mais d'ailleurs ils sont symétriques par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_\mu$; donc, en vertu d'un théorème connu, on pourra exprimer ces fonctions rationnellement par $a, a', a'', \dots$ et par les coefficients de l'équation $\varrho = 0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des variables $a, a', a'', \dots$, donc enfin les coefficients de $\partial a, \partial a', \partial a'', \dots$ de l'équation (7.) le seront également. Donc, en intégrant, on aura une équation de la forme (6.).

Je me propose de développer dans une autre occasion des nombreuses applications de ce théorème, qui jetteront un grand jour sur la nature des fonctions transcendentes dont il s'agit.

Christiania, le 6. Janvier 1829.

15.

Ueber die Theorie der Schraube.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Lehmus* zu Berlin.)

Gegen diese einfache Theorie, wie sie gewöhnlich vorgetragen wird, sind einige Erinnerungen zu machen. Der gewöhnliche Vortrag ist folgender:

Wenn auf einer schiefen Ebene, welche unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt ist, ein Gewicht Q liegt, die Kraft P aber horizontal auf Erhebung von Q wirkt, und μ den Reibungs-Coëfficienten bezeichnet, so ist

$$P = \frac{\tan \alpha + \mu}{1 - \mu \tan \alpha} \cdot Q.$$

Wirkt nun bei einer Schraube mit lothrechter Spindel, deren Gewicht, nebst der daran hängenden Last, $= Q$ ist, die Kraft R horizontal in der Entfernung b von der lothrechten Achse, und bezeichnet α den Winkel der Schrauben-Gänge gegen den Horizont, r den mittleren Halbmesser der Spindel und h die Höhe jedes Schraubengangs, so wäre die in der Peripherie $2r\pi$ tangential thätige Kraft p nach obiger Formel:

$$= \frac{\tan \alpha + \mu}{1 - \mu \tan \alpha} \cdot Q,$$

oder

$$p = \frac{h + \mu \cdot 2r\pi}{2r\pi - \mu h} \cdot Q,$$

und folglich, wenn dieselbe auf den Hebelsarm b reducirt wird:

$$R = \frac{pr}{b},$$

oder

$$R = \frac{r}{b} \cdot \frac{h + \mu \cdot 2r\pi}{2r\pi - \mu h} \cdot Q.$$

Dieser Formel liegt aber, obgleich etwas versteckt, folgende, wie es scheint, irrige Ansicht zum Grunde.

Reducirt man nemlich die in der Entfernung b erforderliche Kraft R in die Entfernung r , so hat man $\frac{Rb}{r}$, und aus dieser horizontalen Thätigkeit entspringen die Kräfte $\frac{Rb}{r} \cos \alpha$ und $\frac{Rb}{r} \sin \alpha$, erstere parallel mit der

Schraubenlinie, letztere normal darauf, und eben so zerlegt sich Q in $Q \sin \alpha$ und $Q \cos \alpha$. Die Normal-Pressung, welche Reibung erzeugt, ist daher $= \frac{Rb}{r} \sin \alpha + Q \cos \alpha$, und die Bedingungsgleichung also

$$\frac{Rb}{r} \cos \alpha = Q \sin \alpha + \mu \left[\frac{Rb}{r} \sin \alpha + Q \cos \alpha \right],$$

woraus wie oben:

$$R = \frac{r}{b} \cdot \frac{h + \mu \cdot 2r\pi}{2r\pi - \mu h} \cdot Q$$

folgt.

Das Unrichtige dieser Vorstellung besteht nun darin, daß der aus R entspringende, Reibung erzeugende Normaldruck $= \frac{Rb}{r} \sin \alpha$ gesetzt wurde, obgleich derselbe nur der wirklich vorhandenen Kraft R , nicht der bloß thätig gedachten $\frac{Rb}{r}$ entsprechen kann, also nur die GröÙe $R \sin \alpha$ hat. Bringt man daher, wie gehörig, diese in Rechnung, so ist die Gleichung:

$$\frac{Rb}{r} \cos \alpha = Q \sin \alpha + \mu [R \sin \alpha + Q \cos \alpha],$$

und hieraus folgt:

$$R = \frac{h + \mu \cdot 2r\pi}{2b\pi - \mu h} Q,$$

welches die genauere, auch in meinem Lehrbuch der angewandten Mathematik, 2ter Band, Berlin 1818, gegebene Formel ist.

Bequemer ist übrigens folgende Herleitung:

Die Kräfte, welche einander das Gleichgewicht halten sollen, sind:

$$R; Q \text{ und } \mu [R \sin \alpha + Q \cos \alpha],$$

und die ihnen zugehörigen gleichzeitigen Wege:

$$2b\pi; -h \text{ und } -2r\pi \sec \alpha;$$

folglich die Gleichung:

$$R \cdot 2b\pi - Qh - \mu [R \sin \alpha + Q \cos \alpha] 2r\pi \sec \alpha = 0,$$

woraus sich ebenfalls

$$R = \frac{h + \mu \cdot 2r\pi}{2b\pi - \mu h} \cdot Q$$

ergiebt.

16. Aufgaben.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

1. Sei

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot x} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot x^2} - \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot x^3} + \dots \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{f(1)}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{f(2)}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{f(3)}{x}\right) \cdot \dots \end{aligned}$$

Man sucht die Function $f(x)$, die der obigen Gleichung Genüge thut.

2. Man nehme zwei beliebige positive Größen a und b ; sei

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt[m+n]{a^m b^n}, & b' &= \frac{ma + nb}{m+n}, \\ a'' &= \sqrt[m+n]{a'^m b'^n}, & b'' &= \frac{ma' + nb'}{m+n}, \\ a''' &= \sqrt[m+n]{a''^m b''^n}, & b''' &= \frac{ma'' + nb''}{m+n}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

man verlangt den Werth $a^{(\infty)} = b^{(\infty)}$ im algebraischen Ausdrucke.

(Von Herrn *W. Horn* zu Burg.)

3. An einer gegebenen beliebigen Curve, zwischen zwei gegebenen Tangenten, n Tangenten so zu ziehen, daß die Dreiecke, welche von je zwei zunächst auf einander folgenden Tangenten und der Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte begrenzt werden, Kreise von gleicher Größe umschließen.

Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwerthes in den indischen Zahlen.

(Vorgelesen in einer Klassen-Sitzung der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin, den 2. März 1829.)

(Von Sr. Excellenz dem Königl. wirkl. Geheimen-Rathe, Herrn Freiherrn
Alex. von Humboldt.)

Man hat sich bisher, in den Untersuchungen über die numerischen Zeichen (den einzigen Hieroglyphen, welche sich bei den Völkern des Alten Continents neben der Tonzergliedernden Buchstaben-Schrift erhalten haben,) ernster mit der charakteristischen Physiognomik der Zeichen und ihrer individuellen Gestaltung, als mit dem Geist der Methoden beschäftigt, durch welche es dem menschlichen Scharfsinne geglückt ist, Grössen mit mehr oder weniger Einfachheit auszudrücken. Der Gang der Untersuchung ist hier fast eben so einseitig, als in den Sprachen gewesen, die lange Zeit hindurch mehr nach der Frequenz gewisser Töne und Endungen, nach der Gestalt der Wurzeln, als nach dem organischen Bau ihrer Grammatik verglichen worden sind. Ich bin seit mehreren Jahren anhaltend und mit besonderer Vorliebe bemüht gewesen, die bei verschiedenen Völkern alter und neuerer Zeit üblichen Systeme von Zahlzeichen unter einen allgemeinen Gesichtspunct zu stellen. Die Kenntniss gewisser Ziffern bei den Azteken (Mexikanern) und bei den Muyscas *) (den Bewohnern der Hoch-Ebene von Cundinamarca), die ich von meiner Reise zurückgebracht habe; Thomas Young's Entdeckung der ägyptischen Zahlzeichen, die (wie wir jetzt wissen) nicht alle durch Nebeneinanderstellung (*juxtaposition*) das Vielfache der Gruppen aus-

*) Ueber die Meinung, dafs die Zahlzeichen der Muyscas (zugleich Hieroglyphen der Mondtage des zunehmenden Alters des Mondes) mit dem sich nach den verschiedenen Phasen allmählig entwickelnden Mondgesichte zusammenhängen, siehe Humboldt, *Vues des Cord. et Monuments des peuples indigènes de l'Amérique* T. II. pag. 237 — 243. Pl. XLIV.

drücken; die so wenig beachtete arabische Gobar (Staub)-Schrift, welche Silvestre de Sacy in einem Pariser Manuscript auffand; die Vergleichung, welche ich zwischen dieser Bezeichnungsart und den mexicanischen und chinesischen Zahlzeichen anstellte; die durch viele in Indien erschienene Sprachlehren erlangte Gewissheit, daß diesseits und jenseits des Ganges nicht bloß ganz verschieden gestaltete Ziffern und Buchstaben-Zahlen, sondern auch ganz verschiedene Zahlen-Systeme, mit und ohne Stellenwerth, herrschen; endlich eine ganz unbekannte indische Methode, die ein Scholion des griechischen Mönchs Neophytos darbietet, lieferten mir eine Reihe von Materialien, welche einiges Licht auf unser sogenanntes arabisches Zahlen-System werfen können. Ich habe zuerst im Jahre 1819 in einer Abhandlung, welche ich zu Paris in den Sitzungen der *Académie des inscriptions et belles-lettres* gelesen, zu zeigen gesucht, wie bei Völkern, welche die rohe Methode der Juxtaposition dadurch abkürzen, daß sie (nach Art der Mexikaner, in den Ligaturen von 4 mal 13 oder 52 Jahren, der Chinesen, Japanesen und Tamulen) Exponenten oder Indicatoren über die Zahlenzeichen schreiben, aus diesen Indicatoren, durch Suppression der senkrecht oder horizontal gereihten Gruppenzeichen, das herrliche indische System des Stellenwerthes entstehen konnte. Die Verbreitung dieses Systems mußte durch den uralten Gebrauch der Erinnerungs- und Zahlschnüre, welche theils lose, als *quippos* der Tataren, Chinesen, Aegypter, Peruaner*) und Mexikaner, zu christlichen Paternostern oder Ritual-Rechenmaschinen**) umgeformt wurden, theils in feste Rahmen gespannt, den *Suanpan* von ganz Inner-Asien, den *abacus* der Römer und Tusker***) und die Werkzeuge der palpablen Arithmetik slavischer Stämme†) bilden, ansehnlich begünstigt werden. Diese Schnur- und Drathreihen des einfachsten asiatischen *Suanpan* repräsentiren höhere und niedere Gruppen eines Zahlen-Systems, gleichviel ob Zehner, Hunderte und Tausende, oder in 60theiliger Abtheilung: Grade, Minuten, Secunden. Der Geist der Methode ist derselbe.

*) Ueber die *quippos* zur Abzählung der Sünden im Beichtstuhle s. Acosta *Hist. natural de las Indias*, lib. 6. cap. 8. El Inca Garcilaso, lib. 6. cap. 9. Fréret *Mém. de l'acad.* T. 6. p. 609.

**) Klaproth *Asiat. Mag.* Th. II. S. 78.

***) Otfried Müller, *Etrusker*, T. II. p. 318.

†) Im Russischen heist der Rosenkranz *tschotki*; das Rechenbrett mit Schnüren (der *Suanpan* der Tataren) *tschotü*.

Die Perlen auf jeder Schnurreihe sind wieder die Indicatoren der Gruppen, und eine leere Schnur deutet auf Null, also auf das leere *Sunya* (sanscr.) *sifr* oder eigentlich *sifron sihron* (arabisch, nach Meninski: *prorsus vacuum*). Ich kann nicht historisch entwickeln, daß der Ursprung des indischen Stellenwerthes von 9 Ziffern wirklich der sei, welchen ich angegeben; aber ich glaube einen Weg gefunden zu haben, auf welchem allmählig die Entdeckung gemacht werden konnte. Auf die Einsicht solcher Möglichkeiten führt ja überhaupt nur die dunkle und eben darum so anziehende Geschichte der alterthümlichen Entwicklung geistiger Kräfte und Bildung des Menschen-Geschlechts.

Von jener in der *Académie des inscriptions* gelesenen Abhandlung ist nur ein kurzer Auszug gedruckt worden, und an einem Orte *), wo man ihn schwerlich sucht. Das Manuscript selbst ist in Herrn Champollion's Händen, der es mit weit wichtigeren, von ihm in Turin entdeckten Thatsachen über die verschiedenen Methoden der ägyptischen Zahlzeichen, bekannt machen wollte. Ich habe seitdem von Zeit zu Zeit fortgefahren, meine erste Arbeit zu vervollständigen; aber da ich nicht hoffen darf, Muße genug zu finden, sie in ihrer ganzen Ausdehnung herauszugeben, so werde ich in dieser Abhandlung mehrere der Haupt-Resultate zusammendrängen. Bei der neuen und glücklichen Richtung, welche das Studium der Sprachen und Monumente genommen, bei dem wachsenden Verkehr mit den süd- und ost-asiatischen Völkern, ist es wohl nicht ohne einigen Nutzen, Probleme zur Sprache zu bringen, welche mit dem Gange des menschlichen Geistes, und (durch die letzten Verzweigungen der Zahlen-Hieroglyphik und einfacher graphischer Methoden) mit den glänzendsten Fortschritten der Mathematik in so enger Verbindung stehen. „Der Gedanke, alle Quantitäten durch neun Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zugleich einen absoluten und einen Stellungswerth giebt, sagt einer der größten Geometer unserer Zeit und aller Zeiten, der Verfasser der *Mécanique céleste* **), ist so einfach, daß

*) Gay Lussac et Arago, *Annales de chimie et de physique* T. XII. p. 93. in der monatlichen Anzeige der Verhandlungen des Instituts. Humboldt *Essais pol. sur la nouv. Espagne* (2. édit.) T. III. p. 122—124.

**) Laplace *Expos. du système du monde* (5. édit.) p. 325. Mit diesem Urtheile contrastirte sonderbar die Behauptung von Delambre in seinem Streite über das Verdienst der alt-indischen Arithmetik, wie sie in Bhascara Acharya's *Lilawati* enthalten ist (*Hist. de l'astronomie ancienne* T. I. p. 543.). Sprache allein führt wohl nicht auf Suppression der Gruppenzeichen.

man eben deshalb nicht genugsam erkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben diese Einfachheit und die Leichtigkeit, welche die Methode dem Calcul zusichert, erheben das arithmetische System der Inder zu dem Range der nützlichsten Entdeckungen. Wie schwer es war, eine solche Methode aufzufinden, kann man daraus abnehmen, daß sie dem Genie des Archimedes und Apollonius von Perga, zweier der größten Geister des Alterthums, entgangen war." Die nachfolgenden Bemerkungen werden zeigen, wie ich hoffe, daß die indische Methode allmählig aus früheren, noch jetzt im östlichen Asien üblichen, entstehen konnte.

So wie Sprache im Allgemeinen auf Schrift, und Schrift, unter gewissen, von Silvestre de Sacy und meinem Bruder untersuchten Bedingungen, auf die Sprache zurückwirkt, so stehen auch die, bei verschiedenen Völkern so verschiedenen Arten zu zählen mit der Zahlen-Hieroglyphik in genauer Wechselwirkung. Doch ist von dieser Wechselwirkung nicht immer strenge Consequenz zu erwarten. Die Zahlzeichen folgen nicht immer denselben Gruppierungen von Einheiten, als die Sprache; in der Sprache finden wir nicht immer dieselben Ruhepunkte (dieselben quinären Zwischenstufen) als in den Zahlzeichen. Fasset man aber, was Sprache (Zahlworte) und numerische Graphik in den entferntesten Erdstrichen darbieten, unter einen Blick zusammen, gleichsam als gemeinsames Product der menschlichen Intelligenz, auf quantitative Verhältnisse angewandt, so entdeckt man in der Zahlenschrift des einen Völkerstammes die isolirt scheinenden Sprachsonderbarkeiten eines anderen Stammes; ja, man muß hinzusetzen, daß eine gewisse Unbehülflichkeit im numerischen Gebiete der Sprache und Schrift einen sehr trüglichen Maassstab für den sogenannten Cultur-Zustand der Menschheit giebt. Hier finden dieselben verwickelten, unter einander contrastirenden Verhältnisse Statt, als bei Völkern, die Buchstabenschrift oder bloß ideographische Zeichen, die den üppigsten Reichthum grammatischer Formen, aus dem Innern des Wurzellautes sich organisch-entwickelnde Flexionen, oder fast ganz Flexions- und Formenlose, wie im ersten Ausbruche erstarrte Sprachen (und alles dies in den verschiedensten Gradationen intellectueller Bildung und politischer Einrichtungen) besitzen. So fühlt sich das einige Menschengeschlecht durch Wechselwirkung der inneren und äusseren Welt (eine Wechselwirkung, deren erste bestimmenden Gründe in dem mythi-

schen Dunkel der Vorwelt verhüllt bleiben) in die verschiedensten Richtungen gestossen; meist unaufhaltsam, die alte Natur bewahrend, auch wenn grosse Welt-Erschütterungen die heterogensten Sprachstämme einander geographisch näher bringen; aber Ähnlichkeit der durch die fernsten Erdstriche wiederhallenden Anklänge, in grammatischen Sprachformen und graphischen Versuchen grosse Zahlen auszudrücken, bezeugen die Einheit des alten Geschlechts, das Übergewicht dessen, was aus der inneren Intelligenz, aus der gemeinsamen Organisation der Menschheit entspringt.

Reisende, welche beim Zählen Steinchen und Samenkörner in Haufen von 5 oder 20 zusammenlegen sahen, behaupten, daß viele Nationen nicht über 5 oder 20 zählen *). Eben so könnte man behaupten, daß die Europäer nicht über 10 zählen, da siebenzehn aus 10 und 7 Einheiten zusammengesetzt ist. Bei den cultivirtesten Völkern des Abendlandes, z. B. bei Griechen und Römern, deuten bekanntlich die Sprachen noch auf jene Haufen- und Gruppen-Bildung hin; daher die Ausdrücke *psephizein, ponere calculum, calculum detrahere*. Gruppen von Einheiten gewähren Ruhepunkte beim Zählen, und die verschiedensten Völker, in Folge der gleichen körperlichen Gliederung (4 fünffach getheilte Extremitäten) stehen still, entweder bei einer Hand, oder bei beiden, oder bei Händen und Füßen. Nach dieser Verschiedenheit der Ruhepunkte bilden sich Gruppen von 5, 10 und 20. Merkwürdig ist es immer, daß im Neuen Continent, wie bei den africanischen Mandingas, den Basken und den kymrischen (galischen) Stämmen des Alten Continents, meist Gruppen von 20 herrschen **). In der Chibcha-Sprache der Muyscas (eines Volkes, das, wie die Japanesen und Tibetaner, ein geistliches und ein weltliches Oberhaupt hatte und dessen Nordindische Intercalations-Methode eines 37sten Monats ich bekannt gemacht habe ***) heissen 11, 12, 13: Fufs eins (*quihieha ata*); Fufs zwei (*quihieha bosa*); Fufs drei (*quihieha mica*) von *quihieha* oder *ghieha* (Fufs) und den 3 ersten Einheiten *ata*, *bozha* oder *bosa* und *mica*. Das Zahlwort Fufs bedeu-

*) Pauw, *Recherches philos. sur les Américains*. T. II. p. 162. (Humboldt *Monumens américains*. T. II. p. 232 — 237.)

**) Beispiele solcher Zahlgruppen von 20 Einheiten liefern in America: die Muyscas, die Otomiten, die Azteken, die Cora-Indianer u. s. f.

***) *Monum. amér.* T. II. p. 250 — 253. Die Muyscas hatten Steine mit Zahlzeichen bedeckt, die in ihrer Folge den Priestern (*xequés*) die Intercalation des rituellen Jahres erleichterten. Siehe die Abbildung eines solchen Intercalations-Steines a. a. Orte, Tab. XLIV.

tet zehn, weil man den Fuß nennt, wenn schon beide Hände durchgezählt sind. Zwanzig heisst demnach in dem Sprachsysteme der Muyscas: Fuß-zehn oder ein Häuschen (*gueta*), vielleicht weil man mit Maiskörnern statt der Steinchen zählte, und ein Häufchen Mais an das Vorraths-Haus, die Mais-Scheuer, erinnert. Aus dem Worte Haus, *gueta*, oder zwanzig (beide Füße und Hände) entstehen nun 30, 40, 80 mit den Benennungen: zwanzig *plus* 10; zweimal zwanzig; viermal zwanzig; ganz wie die celtischen, in die romanischen Sprachen übergegangenen Ausdrücke *quatre-vingt*, und *quinze vingt*, ja die seltenern *six vingt*, *sept vingt*, *huit vingt*. *Deux*- und *trois vingt* sind im Französischen nicht üblich, da doch im galischen oder celtischen Dialecte der westlichen Bretagne, die ich vor wenigen Jahren durchstrichen bin, von *ugent* zwanzig, *daou-ugent* zwei-zwanzig oder 40; *tri-ugent* drei-zwanzig oder 60; ja *deh ha nao ugent* 190 oder zehn über neun Zwanziger heissen *).

Von der Analogie der Sprache und der Zahlen-Hieroglyphik könnte ich noch andere merkwürdige Beispiele anführen, in der Juxtaposition, im Abziehen von Einheiten, indem man sie graphisch der Gruppe vorsetzt; in Mittelstufen von 5 zu 15, bei Völkern, die nach Gruppen von 10 oder 20 zählen. Bei sehr rohen amerikanischen Stämmen, z. B. bei den Guaranis und Lulos, heissen 6, 7 und 8 vier mit zwei, vier mit drei, fünf mit drei. Bei den gebildeteren Muyscas finden wir zwanzig (oder Haus) mit zehn für 30, wie die Kymren in Wales *deg* (zehn) *or ugain* (mit zwanzig), die Franzosen für 70 *soixante et dix* sagen. Summirungen durch Juxtaposition finden wir überall bei Etruskern, Römern, Mexikanern und Aegyptern; subtractive oder mindernde Sprachformen **) im Sanscrit bei den Indern: in 19 oder *una-*

*) Davies *Celtic Researches* 1804. p. 321. Legodinec *grammaire celto-bretonne* 1807. p. 55. Im celtischen oder kymrischen Dialecte von Wales heisst 5 *pump*; 10 *deg*; 20 *ugain*; 30 *deg ar ugein* (10 und 20); 40 *deugain*; 60 *trigain*. (William Owen *Dict. of the Welsh language*. Vol. I. p. 134.) Nach demselben Systeme der Zwanziger finden wir im Baskischen: *bi* 2; *lau* 4; *amar* 10; *oguai* 20; *birroguai* 40; *lauroguai* 80; *berroguetamar* 50, d. i. 40 und (*ata*) zehn. Larramendi, *Arte de la lengua bascongada* 1729. p. 38. (Die baskischen und kymrischen Zahlwörter sind in meinen *Monum.* II. p. 237. nicht vermengt, aber um die Vergleichung zu erleichtern, zusammengestellt: nur steht durch einen Druckfehler *les premiers* statt *les deux* oder *les uns et les autres*.)

**) Herr Bopp führt selbst 95 oder ein um 5 vermindertes Hundert an, *pantschonam satam* (aus *pantscha* 5 und *una* weniger zusammengezogen.)

vinsati; 99 *unusata*; bei den Römern in *undeviginti* für 19 (*unus de viginti*). *undeoctoginta* für 79; *duo de quadraginta* für 38; bei den Griechen *eikosi deonta henos* 19 und *pentekonta düoin deontoin* 48, d. i. fehlend 2 an 50. Dieselbe minorative Sprachform ist in die numerische Graphik übergegangen, wenn den Gruppenzeichen 5, 10, ja selbst ihren Vielfachen, z. B. 50 oder 100, Charactere zur Linken gesetzt werden. (IV und IA, XL und XT für 4 und 40 bei Römern und Tuskern*), obgleich bei den letzteren, nach Otfried Müller's neuen Untersuchungen, die Ziffern wahrscheinlich ganz von dem Alphabet herkommen.) In seltenen römischen Inschriften, die Marini gesammelt**), finden sich sogar 4 Einheiten vor 10, z. B. IIIIX für 6. Wir werden bald sehen, daß es graphische Methoden bei indischen Völkerstämmen giebt, in welchen der Stellenwerth, welcher bei Tuskern und Römern nur additiv oder subtractiv ist, nach Maaßgabe der Stellung oder Richtung der Zeichen, auf Addition und Multiplication hindeutet. In diesen indischen Systemen ist (um mich römischer Ziffern zu bedienen) IIX zwanzig, und XII zwölf.

In einer großen Zahl von Sprachen werden die Normal-Gruppen 5, 10, 20 eine Hand, zwei Hände, und Hand und Fuß (bei den Guaranis *mbombiabe*) genannt. Hat man an beiden Extremitäten die Finger abgezählt, so erscheint der ganze Mensch als ein Symbol von 20; daher heißt in der Sprache der Yaruros (von denen ich volkreiche Missionsdörfer am Apure-Flusse, der sich in den Orinoco einmündet, gefunden) 40 zwei Menschen, *noeni pume* von *noeni* zwei und *pume* Mensch. Im Persischen drückt bekanntlich *pentscha* die Faust, *pendj* fünf aus, herkommend von dem Sanscrit-Worte *pantscha*. „Letzteres hat (nach Hrn. Bopp's scharfsinniger Bemerkung) auf das römische *quinque* geführt, wie das indische *tschatur* auf *quatuor*. Der Plural von *tschatur* (4.) ist *tschatvaras*, und steht dem Dorisch-Aeolischen *tettares* sehr nahe. Das indische *ch*, wie im Englischen ausgesprochen, also *tsch*, wird nemlich im Griechischen ein *t*; daher sich *tschatvaras* in *tatvaras*, wie *pantscha* (5) in *panta* (das griechische *pente*, äolisch *pempe*, davon *pempazein* an den Fingern oder Fünfen zählen) umwandelt. Im Lateinischen entspricht dagegen *qu* dem indischen *ch* oder vielmehr *tsch*; daher *tschatur* und

*) Otfried Müller, Etrusker, II. p. 317 — 320.

**) *Iscrizioni della Villa di Albano*, p. 193. Hervas *Aritmetica delle nazioni* 1786. p. 11. 16.

pantscha in *quatuor* und *quinque* übergehen. *Pantscha* selbst heisst im Sanscrit nie Hand, sondern bedeutet einzig die Zahl 5. Doch ist *pantscha-sakha* ein beschreibender Ausdruck für Hand, als eines fünfästigen Organs *).“

Wie nun in der Sprache und, mit besonderer Naivität, in den südamerikanischen Sprachen, die Gruppen von 5, 10, 20, gleichsam als Ruhepunkte bezeichnet sind, so erkennen wir dieselben Gruppen in der Zahlen-Hieroglyphik. Die Römer und Tusker haben einfache Ziffern **) für 5, 50, 500. Das *quinare* System hat sich neben dem *denaren* erhalten. Im Aztekischen (Mexikanischen) finden wir nicht blofs Gruppenzeichen für 20 eine Fahne; für das Quadrat von 20 oder 400 eine Feder mit Goldkörnern gefüllt, die in einigen mexikanischen Provinzen als Münze dienten; für den Cubus von 20 oder 8000 ein Säckchen, *xiquipilli*, mit 8000 Cacao-Bohnen, ebenfalls zum Tauschhandel bestimmt; sondern auch (da die Fahne in 4 Fächer getheilt und halb oder zu $\frac{3}{4}$ colorirt ist) Zahlzeichen für halb-zwanzig oder 10, und für $\frac{3}{4}$ zwanzig oder 15, gleichsam 2 Hände und 1 Fuß ***). Den denkwürdigsten von allen Beweisen der Wechselwirkung zwischen Graphik und Sprache bietet aber Indien dar. Der Stellenwerth der Einheiten ist im Sanscrit selbst in die Rede eingedrungen. Die Indier haben nemlich eine gewisse bildliche Methode, Zahlen durch die Namen von Gegenständen auszudrücken, deren eine bestimmte Zahl bekannt ist. *Surya* (Sonne), zum Beispiel, bedeutet 12; denn in indischen Mythen werden 12 Sonnen nach der Reihe der Monate angenommen. Die auch in den Mondhäusern oder *naktschatras* vorkommenden beiden *Aswinas* (Castor und Pollux) drücken die Zahl 2 aus; *Manu* bedeutet 14, nach den Menus der Mythologie. Aus diesen vorläufigen Andeutungen erhellet nun, wie *Surymanu*, die Zusammenstellung der Symbole von 12 und 14, die Jahrzahl 1214 bezeichnet. Diese Thatsache verdanke ich der gütigen Mittheilung des gelehrten Colebrooke. Wahrscheinlich heisst, nach demselben Prinzip, 1412 *Manusurya* und 214 *Aswinimanu*. Im Sanscrit ist

*) Ueber die Sanscrit-Zahlwörter in Vergleichung mit griechischen, lateinischen und gothischen Zahlwörtern hat mir Herr Prof. Bopp, in Paris, im Jahre 1820, einen interessanten handschriftlichen Aufsatz mitgetheilt, der ursprünglich bestimmt war, in meinem Werke: Ueber die Zahlzeichen der Völker“ zu erscheinen.

**) Für das tuskische Zeichen von 500 s. Otfried Müller, Abth. IV. Fig. 2.

**) Humboldt, *Monum. amér. I. p. 309.*

übrigens die Numeration so vollkommen, daß man sogar ein einfaches Wort, *koti*, für 10 Millionen findet, wie die peruanische *qquichua*-Sprache, die nicht nach Gruppen von 20 zählt, ein einfaches Wort für eine Million (*hunu*) kennt.

Rechnen wir nach Zehnern nur deshalb, wie Ovid sagt, *quia tot digiti, per quos numerare solemus*, so würde der Mensch bei 6fach getheilten Extremitäten zu einer duodenaren Scale, zu Gruppen von 12, gelangt sein *), die den großen Vorzug von bruchlosen Theilungen durch 2, 3, 4 und 6 gewährt, und der sich die Chinesen seit den frühesten Zeiten bei ihren Maassen und Gewichten bedienen.

Von diesen Betrachtungen über den Verkehr zwischen Sprache und Schrift, zwischen Zahlwörtern und Zahlzeichen, gehen wir nun zu den letzteren selbst über. Ich wiederhole es, daß in diesem Auszuge aus meinem größeren, unvollendeten Werke nicht sowohl von der heterogenen Gestaltung einzelner Elemente (Ziffern), als von dem Geist der Methoden die Rede sein wird, welche die verschiedenen Nationen im Ausdruck numerischer Größen angewandt haben. Der Gestalt und Form der Ziffern erwähne ich hier nur, wenn sie auf die Schlüsse über Identität und Heterogenität der Methoden einwirken. Die Art zu procediren, um die reinen und gemischten *multipla* der denaren Fundamental-Gruppen n (z. B. $4n$, $4n^2$, oder $4n+7$, $4n^2+6n$, $4n^2+6n+5$) auszudrücken, ist nemlich sehr vielfältig, und geschieht bald durch Reihung (Stellenwerth, *position*), wie bei verschiedenen indischen Völkern; bald durch rohe Juxtaposition, wie bei den Tuskern, Römern, Mexicanern und Aegyptern; bald durch nebenstehende Coefficienten, wie bei den Tamulsprechenden Bewohnern der südlichen, indischen Halbinsel; bald durch gewisse, über den Gruppenzeichen stehende Exponenten oder Indicatoren, wie bei den Chinesen, Japanesen und den Myriaden der Griechen; bald in der inversen Methode, durch eine Zahl von Nullen oder Puncten, welche neun Ziffern oben angehängt werden, um den relativen oder Stellenwerth jeder Ziffer zu bezeichnen, gleichsam Gruppenzeichen, welche über die Einheiten gesetzt werden, wie in der arabischen Gobarschrift und in einem, vom Mönch Neophytos erläuterten indischen Zahlen-Systeme. Die eben genannten 5 Metho-

*) Debosses II. 158.

den sind von der Gestaltung der Ziffern ganz unabhängig, und um diese Unabhängigkeit noch besser zu bewähren, habe ich es mir in dieser Abhandlung zum Gesetz gemacht, keine anderen Zeichen, als die gewöhnlichsten arithmetischen und algebraischen zu gebrauchen. Die Aufmerksamkeit wird auf diese Weise mehr auf das Wesentliche, auf den Geist der Methode, gerichtet. Ich habe schon bei einem anderen, sehr heterogenen Gegenstande, in Beziehung der regelmässigen Aufeinander-Lagerung, oft periodischen Reihung der Gebirgsarten (in dem Anhang zu dem *Essai géognostique sur le Gisement des Roches* *) zu zeigen gesucht, wie durch pasigraphische Notationen die Verallgemeinerung der Begriffe gewinnen kann. Man unterdrückt die, ihrer Natur nach allerdings sehr richtigen Nebenbetrachtungen individueller Form und Mischung, um eine Erscheinung, die man vorzugsweise verfolgen will, in ein desto reineres Licht zu setzen; ein Vortheil, der die frostige Nüchternheit solcher Abstractionen einigermaßen rechtfertigen kann.

Man ist gewohnt, in den graphischen Methoden der Völker zu unterscheiden: Zeichen, welche von der Buchstabenschrift unabhängig sind, und Buchstaben, welche durch eine bestimmte Reihung, durch gewisse beigefügte Striche und Punkte oder (in Beziehung auf die Sprache) durch Initialen der Zahlwörter **) den numerischen Werth angeben. Es ist bekanntlich keinem Zweifel unterworfen, daß die hellenischen, die semitischen oder aramäischen Stämme (unter letzteren die Araber selbst, bis in das 5te Jahrhundert ***) nach der Hegira, ehe sie durch die Perser die Ziffern erhielten) in der Epoche ihrer gereiften Cultur, dieselben Zeichen als Buchstaben und Ziffern benutzten. Auf der anderen Seite sehen wir im neuen Continent wenigstens zwei Völker, die Azteken und Muyscas, welche Zahlzeichen und keine Buchstaben-

*) *Ed. de 1823, p. 364—375.*

**) Die arabischen Diwani-Ziffern, aus bloßen Monogrammen oder Abbreviationen von Zahlwörtern zusammengesetzt, geben das verwickelteste Beispiel solcher Initial-Schrift. Ob die uskischen und römischen *C* und *M* der tuskischen und römischen Sprache entlehnte Initialen sind, ist zweifelhafter, als man gewöhnlich glaubt. (*Leslie Philos. of Arith. p. 7—9. 211. Debro-ses T. I. p. 436. Hervas p. 32. 35. Otr. Müller, Etrusker, p. 304. 318.*) Das griechische rechtwinklige Kreuz, ganz dem chinesischen Zeichen von 10 ähnlich, bedeutet auf den ältesten Inschriften tausend (*Boeckh, Corp. inscript. graec. vol. I. p. 23.*) und ist nichts anderes, als die uralte Form des *Chi* (*Nouveau traité de Diplom. par deux Religieux de St. Maur. Vol. I. p. 678.*)

***) *Silvestre de Sacy. Gramm. arabe, 1810. T. I. p. 74. note 6.*

schrift hatten. Bei den Aegyptern scheinen die am meisten gebrauchten numerischen Hieroglyphen für Einheiten, Zehner, Hunderte und Tausende auch nicht mit den phonetischen Hieroglyphen zusammenzuhängen. Ganz unabhängig vom Alphabet ist auch die altpersische Pehlwi-Zahlschrift in den ersten 9 Einheiten, wie bei den Tuskern und den ältesten Griechen und den Römern. Anquetil *) bemerkt schon, daß das Zend-Alphabet, welches mit seinen 48 Elementen die Zahlbezeichnung hätte erleichtern können, nicht als Ziffern gebraucht werde, und daß in den Zendbüchern die Zahlen immer zugleich in Pehlwi-Ziffern und in Zendwörtern ausgedrückt sind. Sollte sich ein solcher Mangel von Zend-Zahlen durch künftige Untersuchungen bestätigen, so würde derselbe, bei der innigen Verwandtschaft der Zendsprache mit dem Sanscrit, zu der Meinung führen, das Zend-Volk habe sich von den Indern getrennt, als diese noch nicht den Stellenwerth der Ziffern kannten. Ueber 9 hinaus sind im *Pehlwi* die Gruppenzeichen 10, 100 und 1000 aus Buchstaben zusammengesetzt. *Dal* ist 10; *re* mit *za* verschlungen 100; *re* mit *ghain* verschlungen 1000. Wenn man von der ganzen Masse der Zahlzeichen des Menschengeschlechts das Wenige betrachtet, was wir bisher kennen gelernt, so findet man, daß die Eintheilung in Buchstabenzahlen und eigentlich sogenannte Ziffern eben so unsicher und unfruchtbar ist, als die von ächten Sprachkennern längst aufgegebene Eintheilung in ein- und mehrsyllbige Sprachen. Wer kann mit Sicherheit entscheiden, ob die Tamul-Ziffern in Süd-Indien, die keinen Stellenwerth kennen, und, bis auf die Ziffer 2, ganz von den in den Sanscrit-Handschriften gebräuchlichen abweichen, nicht von der alphabetischen Tamulschrift selbst abzuleiten sind, da man in derselben zwar nicht das Gruppenzeichen für 100, aber wohl das Gruppenzeichen 10 (im Buchstaben *ya*), und die 2 (im Buchstaben *u*) zu erkennen glaubt? Die Telugu-Ziffern **) mit Stellenwerth, ebenfalls im südlichen Theile der indischen Halbinsel gebräuchlich, weichen in 1, 8 und 9 sonderbar von allen uns bekannten indischen Ziffern ab, da sie hingegen

*) *Mém. de l'Acad. des belles lettres* T. 31. p. 357.

**) Campbell, *Grammar of the Teloogoo-Language (Madras)* 1816. p. 4. 208. *Teloogoo* ist die fälschlich genannte Gentoo-Sprache, von den Eingebornen *Trilinga* oder *Telenga* genannt. Man vergleiche die Ziffertafel von Campbell mit anderen Varietäten indischer Ziffern in Wahl's allgem. Geschichte der morgenländ. Sprachen 1784. Tab. I.

in 2, 3, 4 und 6 mit denselben übereinstimmen. Das Bedürfnis, Zahlen graphisch zu bezeichnen, ist wohl am frühesten gefühlt worden, und numerische Zeichen gehören zu den ältesten aller Schriftzeichen. Die Werkzeuge der palpablen Arithmetik, wie sie Herr Leslie in seinem geistreichen Werke: *the Philosophy of Arithmetic* (1817) der figurativen oder graphischen entgegensetzt, sind beide menschlichen Hände, Häufchen von Steinen (*calculi, psephoi*), Samenkörner, lose Schnüre mit Knoten (Rechenschnüre, tatarische und peruanische *quippos*), eingerahmte Suanpan und Abacus-Tafeln, die slavische Rechenmaschine mit aufgezogenen Kugeln oder Samenkörnern. Alle diese Werkzeuge lieferten dem Auge die ersten graphischen Bezeichnungen von Gruppen verschiedener Abstufung. Eine Hand oder eine Schnur mit Knoten oder verschiebbaren Kugeln bezeichnet die Einheiten bis 5 oder 10 oder 20. Wie oft durch Schließung der einzelnen Finger eine Hand durchgezählt ist, (*pempazesthai*) giebt die andere Hand an, auf der dann jeder Finger, d. i. jede Einheit, eine Gruppe von Fünf ausdrückt. Eben so verhalten sich zwei lose Knotenschnüre gegen einander, und zu Gruppen 2ter, 3ter und 4ter Ordnung übergehend, stehen in demselben auf- und absteigenden Gruppen-Verhältniß die aufgespannten, mit Kugeln bezogenen Rechenschnüre, der alt-asiatische Suanpan, der zu den abendländischen Völkern als *abax* oder *tabula logistica* früh (vielleicht durch Aegypter zur Zeit des Pythagoreischen Bundes) übergegangen ist. Die *Koua's*, welche älter als die jetzige chinesische Schrift sind, ja die notenartigen, knotigen, oft gebrochenen Parallellinien der Zauberbücher (*raml*) von Inner-Asien und Mexiko scheinen nur graphische Projectionen von diesen Rechen- und Denkschnüren*). Im asiatischen Suanpan oder im Abacus, dessen die Römer sich bei ihren unbehülflichen Zahlzeichen weit mehr bedienten, als die in der Zahlen-Graphik glücklicher fortgeschrittenen

*) Im Orient wird *raml* die negromantische Kunst des Sandes genannt. Ganze oder gebrochene Linien und Punkte, welche die Elemente vorstellen, leiten den Weissager. (Richardson and Wilkins *Diction. Persian and Arabic*. 1806. T. I. p. 482.) Als ein solcher orientalischer *Raml* ist das merkwürdige, ächt mexikanische, wie mit Musik-Noten bedeckte Manuscript, das zu Dresden aufbewahrt wird, und welches ich in meinen *Monum. améric. pl. 44.* abgebildet, von einem gelehrten Perser, der mich in Paris besuchte, auf den ersten Blick erkannt worden. Ganz ähnliche, ächt amerikanische *Koua* und notenförmige Linear-Zeichnungen habe ich seitdem in mehreren aztekischen hieroglyphischen Handschriften und in den Sculpturen des Palenque, im Staat von Guatemala entdeckt. Im alten Styl der chinesischen Zahlenschriften ist das Gruppenzeichen für 10, eine Perle auf einer Schnur, offenbar (projectionsartig) vom *quippu* hergenommen.

Griechen *), erhielten sich, neben den denaren Reihen, die in geometrischer Progression auf- und absteigen, auch quinare Reihen. Zur Seite jeder Zahlenschnur der Gruppen oder Ordnungen n, n^2, n^3 stand eine kleinere Schnur, welche je fünf Kugeln der grösseren durch eine einzige bezeichnete. Mittelst dieser Einrichtung ward die Zahl der Einheiten so vermindert, daß die Hauptschnur nur 4, die Nebenschnüre nur 1 Kugel bedurfte **). Die Chinesen scheinen, von den frühesten Zeiten an, willkürlich irgend eine der aufeinander folgenden parallelen Schnüre, als die Schnur der Einheiten betrachtet zu haben, so daß sie, auf- und abwärts, Decimalbrüche und ganze Zahlen und Potenzen von 10 erhielten. Wie spät ***) (im Anfange des 16ten Jahrhunderts?) ist in die Abendländer die Kenntniß der Decimal-Brüche gekommen, zu welcher die palpable Arithmetik im Orient längst geführt hatte! Bei den Griechen war, jenseit der Einheit, die aufsteigende Scale nur im Sexagesimal-System, bei Graden, Minuten und Secunden bekannt; aber da man nicht $n-1$, das heisst, 59 Zeichen hatte, ward der Stellenwerth nur in zweigliedrigen Schichten beobachtet.

Wenden wir unsern Blick auf den Ursprung der Zahlen, so finden wir, daß in aufgehäuften Steinchen, oder auf den mit Kugeln bedeckten Schnüren der Rechenbretter, Zahlen mit großer Regelmäßigkeit transitorisch geschrieben und gelesen wurden. Die Eindrücke, welche diese Operationen hinterließen, haben überall auf die früheste Zahlen-Graphik eingewirkt. In den historischen, rituellen und negromantischen Hieroglyphen der Mexikaner, die ich bekannt gemacht, werden die Einheiten bis 19 (das erste einfache Gruppenzeichen ist 20) als große runde farbige Körner nebeneinander gestellt, und, was sehr merkwürdig ist, die Rechnung geht von der Rechten zur Linken, wie die semitische Schrift. Man bemerkt diese Folge deutlichst bei 12, 15, 17, wo die erste Reihe 10 enthält, und die zweite nicht ganz ausgefüllt ist. In den älte-

*) Nicomachus in Ast, *Theologumena arithm.* 1817. p. 96. In dem Finanz-Wesen des Mittelalters wurde der Rechentisch (*abax*) zum *exchequer*.

**) So im Römischen *abacus*; im Chinesischen gebrauchte man 5 und 2 Kugeln. Die nicht zählenden Kugeln wurden dann zur Seite geschoben.

***) Ueber die ersten Versuche der Decimal-Bezeichnung von Michael Stifelius aus Esslingen, Stevinus aus Brügge und Bombelli aus Bologna s. Leslie *Phil. of Arithm.* p. 134.

sten Hellenischen Monumenten, in den Tuskischen Sepulcral-Inschriften, bei den Römern und Aegyptern (wie Thomas Young, Jomard und Champollion gezeigt haben) sind die Einheiten durch senkrechte Linien bezeichnet. Beiden Chinesen und in einigen von Eckhel (T. III. 410.) beschriebenen acht phönicischen Münzen sind diese Striche bis 4 horizontal. Die Römer reiheten zuweilen (das quinare Gruppenzeichen überspringend,) in Inschriften, bis 8 Striche als Einheiten aneinander. Viele solche Beispiele giebt Marini in der merkwürdigen Schrift: *Monumenti dei fratelli Arvali* *). Die Nagelköpfe zur alten römischen Jahres-Rechnung (*annales antea in clavis fuerunt, quos ex lege vetusta figebat Praetor Maximus*, sagt Plin. VII. 40.) hätten auf die mexikanischen Einheitspunkte führen können, welche auch wirklich neben den (chinesischen und phönicischen) Horizontal-Linien, in Unter-Abtheilungen der Unzen und Fufse, vorkommen **). Diese Punkte und Striche, 9 oder 19 an der Zahl, in der denaren oder Vicesimal-Scale (Hand- oder Hand- und Fufs-Scale) des Alten und Neuen Continents sind die rohesten aller Bezeichnungen im Systeme der Juxtaposition. Man zählt dann die Einheiten mehr als man sie lieset. Das Für sich bestehen, gleichsam die Individualität einzelner Gruppen von Einheiten, als Zeichen, fängt erst an, in den Buchstabenzahlen der semitischen und hellenischen Stämme, oder bei den Tibetanern und indischen Stämmen, die durch einzelne ideographische Zeichen 1, 2, 3, 4 ausdrücken. Im alt-persischen *Pehlwi* zeigt sich ein merkwürdiger Uebergang von der rohen Methode der Juxtaposition von Einheitszeichen, zur isolirten Existenz zusammengesetzter ideographischer Hieroglyphen. Der Ursprung der ersten 9 Ziffern durch Zahl der Einschnitte oder Zähne, liegen hier vor Augen; 5 bis 9 sind sogar blofse Verschlingungen der Zeichen 2, 3 und 4, ohne Wiederkehren des Zeichens von 1. In den acht-indischen Systemen der Devanagari, persischen und arabisch-europäischen Ziffern, sind nur in 2 und 3, Contractionen ***)) von 2 und 3 Einheiten zu erkennen, gewifs nicht in den höheren Ziffern, welche in der indischen Halbinsel auf die sonderbarste Weise von einander abweichen.

*) T. I. p. 31. T. II. p. 675. z. B. in *Octumvir*.

**) Marini T. I. p. 228.

***)) Abel Remusat, *Langues Tatares* p. XXX. Ueber die sonderbaren indischen Ziffern in Java s. Crawford II. p. 263.

Indem ich hier und in den folgenden Theilen der Abhandlung der indischen Zahlen erwähne, muß ich mich zuerst über diese Benennung und über die alten Vorurtheile, als habe Indien einerlei gestaltete Ziffern und keine Buchstaben-Zahlen, als sei in Indien überall Kenntniß des Stellenwerthes und Nicht-Gebrauch von eigenen Gruppen-Zeichen für n , n^2 , n^3 erklären. So wie, nach der oftmaligen Aeußerung meines Bruders, Wilh. von Humboldt, das Sanskrit sehr unbestimmt durch die Benennungen „indische und alt-indische Sprache“ bezeichnet wird, da es in der Indischen Halbinsel mehrere sehr alte, vom Sanskrit gar nicht abstammende Sprachen giebt: so ist auch der Ausdruck „indische, alt-indische Ziffern“ im Allgemeinen sehr unbestimmt, und diese Unbestimmtheit bezieht sich sowohl auf die Gestaltung der Zahlzeichen als auf den Geist der Methoden, welche man durch Juxtaposition, oder durch Coefficienten, oder durch bloßen Stellenwerth der Haupt-Gruppen n , n^2 , n^3 und der Vielfachen derselben $2n$, $3n$ bezeichnet. Selbst die Existenz eines Null-Zeichens ist, wie das Scholion des Neophytos lehrt, in indischen Ziffern noch kein nothwendiges Bedingniß des Stellenwerthes. Im südlichen Theile der indischen Halbinsel sind die Tamul- und Telugu-Sprachen die weitverbreitetsten. Die Tamulsprechenden Inder haben von ihrem Alphabet abweichende Zahlzeichen, von denen die 2 und die 8 eine schwache Aehnlichkeit mit den indischen (Devanagari-) Ziffern von 2 und 5 haben *). Noch verschiedener von den indischen Ziffern sind die cingalesischen **). In diesen und den Tamulischen findet man keinen Stellenwerth, kein Nullzeichen, sondern Hieroglyphen für die Gruppen n , n^2 , n^3 Die Cingalesen operiren durch Juxtaposition, die Tamulen durch Coefficienten. Jenseits des Ganges, im Burman-Reiche, sehen wir Stellenwerth und Nullzeichen; aber von den arabischen, persischen und Devanagari-indischen Ziffern gänzlich abweichende Zeichen ***). Die von den Arabern gebrauchten persischen Ziffern weichen alle 9 gänzlich von den Devanagari-Ziffern †) ab;

*) Robert Anderson, *Rudiments of Tamul Grammar*. 1821. p. 135.

**) James Chater, *Grammar of the Cingalese language*, Colombo 1815. p. 135.

***) Carey, *Grammar of the Burman language*. 1814. p. 196. Bloß die Burmanischen Ziffern 3, 4 und 7 haben einige Aehnlichkeit mit 2, 5 und 7.

†) Vergl. John Shakespear, *Grammar of the Hindustani language*. 1813. p. 95. u. Pl. I. William Jones, *Grammar of the Persian language*. 1809. p. 93. Silvestre de Sacy, *Grammaire arabe*. Pl. VIII.

7 ist wie eine römische, 8 wie eine tuskische 5 gestaltet. Unter dem, was wir heute arabische Ziffern nennen, sind blofs 1, 2, 3 den Devanagari-Ziffern gleicher Bedeutung ähnlich; die devanagari 4 ist unsere 8; unsere 9 ist eine devanagari 7; unsere 7 ist eine persische 6. Im Bengali ist 5 ein halber Mond und 3, 5, 6, 8 und 9 weichen ganz von den Devanagari-Ziffern ab *). Blofs verunstaltete indische Devanagari-Ziffern sind die von Guzerath **).

Betrachtungen über den Einfluß der frühesten Zahlzeichen auf das Alphabet, über geflissentliche Verunstaltungen der Buchstaben, um sie nicht mit Ziffern zu verwechseln, über die verschiedene Reihung der Zahlbuchstaben, welche bei demselben Volke nicht immer mit dem üblichen Alphabet übereinstimmt (wie im *aboudjed* semitischer Stämme in Asien und Afrika ***), gehören nicht in diese Abhandlung, und haben zu vielen grundlosen Hypothesen im Felde der vergleichenden Alphabetik und Hieroglyphik Anlaß gegeben. Ich habe selbst ehemals die Vermuthung geäußert, daß die indischen Zahlen, trotz der Form von 2 und 3, Buchstaben eines alten Alphabets sind, dessen Abglanz sich noch in den phönicischen, samaritanischen, palmyrischen und ägyptischen (Mumien-) Schriftzügen, ja an den alt-persischen Monumenten von Nak-schi-Rustan †) findet. Wie viele Lettern sehen nicht in diesen Alphabeten den ausschließlich sogenannten indischen Ziffern ähnlich. Ein phönicischer Ursprung der sogenannten indischen Zahlen ist schon von anderen Gelehrten behauptet worden ††), und der scharfsinnige Eckhel machte schon darauf aufmerksam, daß die Zahlen-Aehnlichkeit phönicischer Buchstaben so auffallend sei, daß das Wort Abdera durch 19990 und 15550 bezeichnet werde †††). Aber über diesen Ursprung der Ziffern und Buchstaben herrscht ein Dunkel, welches bei den vorhandenen

*) Graves Chamney Haughton, *Rud. of Bengali Grammar*. 1821. p. 133.

**) Robert Drummond, *Illustrations of the Grammat. Parts of the Guzerath and Mahratt-language*. 1808. p. 25.

***) Silvestre de Sacy T. I. p. 10.

†) Silvestre de Sacy, *Antiquités de la Perse*. Pl. I. n. 1. Vergl. die Zahlen-Inscriben am Sinai in *Descr. de l'Egypte*. Vol. 5. Pl. 57.

††) Guyot de la Marne in *Mém. de Trevoux* 1736. p. 160. 1740. *Mars* p. 260. Jahn *Bibl. Archaeolog.* B. I. p. 479. Büttner vergl. Tafeln 1779. St. 2. p. 13. Eichhorn Einleit. in das alte Testament. B. I. p. 197. Wahl, *Gesch. der morgenl. Litt.* p. 601. 630. Fundgruben des Orients B. 3. p. 87.

†††) *Doctrina nummorum veterum*. 1794. T. III. p. 396 – 404, 421, 494.

Materialien eine gründliche philologische Untersuchung unmöglich macht, wenn man sie nicht auf negative Resultate beschränken will.

So wie oft dieselben Völker zugleich mit Buchstaben-Zahlen und ideographischen oder willkürlich gewählten Zahlzeichen rechnen, so finden sich auch in einem und demselben Zahlen-System, in Hinsicht auf den Ausdruck der *multipla* der Fundamental-Gruppe, die verschiedenartigsten Methoden, ja was in einem System gleichsam nur angedeutet ist, zeigt sich im andern vollständig entwickelt. Eben so präladiren, in den Sprachen, bei einer Nation grammatische Formen, welche eine andere mit besonderer Vorliebe und allem Aufwande intellectueller Kraft ausgebildet hat. Beschreibt man die Zahlensysteme einzeln, wie sie jedes Volk anwendet, so verdunkeln sich die Aehnlichkeiten der Methoden; man verliert die Spur, auf welcher der menschliche Geist zu dem Meisterwerke der indischen Arithmetik gelangt ist, in der jedes Zeichen einen absoluten und relativen Werth hat, in der sie in geometrischer Progression von der Rechten zur Linken wachsen. Ich verlasse daher in den folgenden Sätzen die ethnographische Folge und betrachte bloß die verschiedenen Mittel, welche angewandt wurden, um dieselben Gruppen von Einheiten (gemischte oder ungemischte Gruppen) graphisch auszudrücken.

Erste Methode. Juxtaposition; bloß additiv bei Buchstaben-zahlen und eigentlichen Ziffern. So Tusker, Römer, Griechen, bis zu der Myriade, semitische Stämme, Mexikaner und der grössere Theil der Pehlwi-Ziffern. Diese Methode macht besonders das Rechnen beschwerlich, wenn die *multipla* der Gruppen ($2n, 3n, 2n^2 \dots$) nicht eigene Zeichen haben. Bei den Tuskern und Römern ist Wiederholung von den Zeichen 10 bis 50, bei den Mexikanern, wo das erste Gruppenzeichen 20 (eine Fahne) ist, findet Wiederholung desselben Hieroglyphen bis 400 statt. Dagegen haben die Griechen in den beiden Reihen der Zehner und Hunderter, die mit *iota* und *rho* anfangen, Zeichen für 20, 30, 400 und 600. Drei Episemen (Buchstaben eines veralteten Alphabets) *bau*, *koppa* und *sampi* drücken aus: 6, 90 und 900; die letzteren beiden schliessen die Reihen der Zehner und Hunderter, wodurch der Zahlenwerth der griechischen Buchstaben dem des semitischen *aboudjed's* etwas ähnlicher wird *). Herr Böckh hat in seinen gelehrten Un-

*) *Hervas Arithm. delle nazioni.* p. 78. Ueber alte Reihenfolge der Lettern in semitischen Alphabeten: *Descript. de l'Egypte moderne.* T. II. P. II. p. 208.

tersuchungen über das Digamma gezeigt, daß *bau* das *wau* der Semiten (der Lateiner) ist; *koppa* war das semitische *koph* (9) und *sampi* das semitische *schin* *). Die Reihe der Einheiten von *alpha* bis *theta* bildet bei den Griechen die Wurzelzahlen (*püthmenes*), mit welchen man durch Kunstgriffe, die Apollonius erfand **), im Rechnen so operirte, daß man sie, im letzten Resultate, auf die correspondirenden Glieder der 2ten und 3ten Reihen (der Analogon) reducirte.

Zweite Methode. Vervielfachung oder Verminderung des Werthes durch darüber oder darunter gesetzte Zeichen. In der vierten Reihe der griechischen Notation kehren bekanntlich die *püthmenes* aus Analogie wieder, tausendfach vermehrt, durch Hinzufügung eines Strichs nach unten. So reichte man bis zur Myriade; man schrieb bis 9999. Hätte man die Strich-Notation für alle Gruppen angewandt, und alle Zeichen nach dem *theta* (9) unterdrückt, so hätte man für β , mit einem oder 2 oder 3 Strichen, Ausdrücke für 20, 200 und 2000 gehabt, und sich, wie wir bald sehen werden, den wenig bekannten arabischen Gobar-Zahlen, und mit ihnen den Stellenwerthen genähert; aber mit einer unglücklichen Ueberspringung der Gruppen von Zehnern und Hunderten, fing die Strich-Notation erst mit den Tausenden an, und ward selbst nicht in höheren Gruppen versucht.

Wenn ein Strich, der unten zugefügt wird, die Zahl tausendfach vermehrt, so bezeichnet dagegen bei den Griechen ein senkrechter Strich, oben hinzugefügt, einen Bruch, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner die Zahl ist, welche unter dem Strich notirt wird. So ist im Diophantus $\gamma' = \frac{1}{3}$; $\delta' = \frac{1}{4}$, aber die untere Zahl bezeichnet den Zähler, wenn dieser größer als die Einheit ist, und der Nenner des Bruches wird alsdann wie ein Exponent geschrieben, so daß z. B. $\gamma^{\delta} = \frac{3}{4}$ ***). In römischen Inschriften vermehrt ein Horizontal-Strich, nach oben zugefügt, die Zahl tausendfach, was als ein Mittel der Abkürzung und Ersparung des Raumes betrachtet werden kann.

*) Staatshaushaltung der Athener B. II. p. 385.

**) Delambre *hist. de l'astron. ancienne* T. II. p. 10.

***) Delambre T. II. p. 11. Der Strich, der zu den Buchstaben oben hinzugefügt wird, bloß um anzuzeigen, daß sie als Zahlen gebraucht werden, muß nicht mit dem Fractionszeichen verwechselt werden. Auch ist derselbe in den älteren mathematischen Handschriften eigentlich nie senkrecht, sondern horizontal, und daher mit dem Fractionszeichen nie zu verwechseln. (Bast: *de usu litterarum ad numeros indicandos* in Gregorii Corinthii *liber de dialectis linguae graecae* 1811. p. 850.)

Wichtiger ist die Methode des Eutocius zum Ausdruck der Myriaden. Hier treffen wir bei den Griechen die erste Spur des, für den Orient so wichtigen Exponential- oder vielmehr Indications-Systems. M^a , M^b , M^y bezeichnen 10000, 20000, 30000. Was hier bei den Myriaden allein angewandt wird, geht bei den Chinesen und den Japanesen, die ihre Cultur von den Chinesen 200 Jahre vor unserer Zeitrechnung erhielten, durch alle *multipla* der Gruppen durch. Drei Horizontalstriche unter dem Zeichen von zehn bedeuten 13; aber drei Horizontalstriche darüber bedeuten 30. Nach dieser Methode wird 3456 also geschrieben (ich bediene mich der römischen Zahlen als Gruppenzeichen, der indischen als Exponenten):

$$M^3$$

$$C^2$$

$$X^5$$

$$I^6$$

Bei den Aegyptern finden sich dieselben Indicatoren. Auf einen gekrümmten Strich *), der 1000 andeutet, werden 2 oder 4 Einheiten gestellt für 2000 und 4000. Bei den Azteken oder Mexikanern habe ich für 312 Jahre das Zeichen der Ligatur mit 6 Einheiten als Exponent gefunden ($6 \times 52 = 312$) und in meinem Werke über Amerikanische Monumente abgebildet. Bei Chinesen, Azteken und Aegyptern steht überall das Gruppenzeichen unten, als schriebe man gleichsam X^5 für 50; in den arabischen Gobar-Ziffern steht das Gruppenzeichen über dem Indicator. Im Gobar sind nemlich die Gruppenzeichen Punkte, also Nullen, denn in Indien, Tibet und Persien sind Nullen und Punkte identisch. Diese Gobar-Zeichen, welche seit dem Jahre 1818 meine ganze Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben, sind von meinem Freunde und Lehrer, Herrn Silvestre de Sacy, in einem Manuscript aus der Bibliothek der alten Abtey St. Germain du Prés entdeckt worden. Dieser große Orientalist sagt: *Le gobar a un grand rapport avec le chiffre indien, mais il n'a pas de zéro **)*. Ich glaube, daß aller-

*) Kosegarten *de Hierogl. Aegypt.* p. 54. Gatterer's aus Bianchini (*Decad. I. cap. 3. p. 3.*), aus Goguet (*I. p. 226.*) und aus Debrosses (*I. p. 432.*) entlehnte Behauptung, daß Aegypter in senkrechter Richtung den 9 Einheiten Stellenwerth gaben, ist durch neuere Untersuchungen keinesweges bestätigt worden. Gatterer, *Weltgeschichte* bis Cyrus, p. 555. 586.

**) S. *Gramm. arabe* p. 76. und die der Pl. 8. zugefügte Note.

dings das Nullzeichen vorhanden sei: es steht aber, wie im Scholion des Neophytos, über den Einheiten, nicht daneben; ja es sind gerade die Nullzeichen oder Punkte, welche diesen Characteren den sonderbaren Namen *gobar* oder Staubschrift gegeben. Man ist auf den ersten Blick ungewiß, ob man einen Übergang zwischen Ziffern und Buchstaben darin erkennen soll. Man unterscheidet mit Mühe die indische 3, 4, 5 und 9. *Dal* und *ha* sind vielleicht schlecht gestellte indische Ziffern 6 und 2. Die Indication durch Punkte ist folgende:

3' für 30,

4'' für 400,

6''' für 6000.

Diese Punkte erinnern an eine alt-griechische, aber seltene Bezeichnung*), die erst mit der Myriade anfängt: α'' für 10000, β'' für 200 Millionen. In diesem Systeme geometrischer Progressionen ist ursprünglich ein Punct, den man aber nicht anwendet, 100. Bei Diophantus und Pappus stehet ein Punct zwischen den Buchstaben Zahlen, statt der Initiale Mu (Myriade). Ein Punct multiplicirt dann, was zur Linken steht, 10000 mal. Man möchte glauben, daß dunkle Ideen von Bezeichnungen durch Punkte und Nullen sich durch Alexandriner aus dem Orient nach Europa verbreitet hatten. Das wirkliche Nullzeichen, und als etwas Fehlendes, wendet Ptolemäus in der abwärts steigenden Sexagesimal-Scale für fehlende Grade, Minuten oder Secunden an. Auch in Handschriften des Theon, im Commentar zur Syntaxis des Ptolemäus, will Delambre das Nullzeichen gefunden haben**). Es ist daher im Occident weit älter, als der Einbruch der Araber. Planudes Schrift über die *arithmoi indikoi*.

*) Ducange *Palaeogr.* p. XII.

**) *Histoire de l'astronomie ancienne* T. I. p. 547. T. II. p. 10. Die Stelle im Theon ist in seinen gedruckten Werken nicht aufzufinden. Delambre ist geneigt, das griechische Nullzeichen bald der Abbrüviatur von *ouden*, bald einer besonderen Beziehung zuzuschreiben, in welcher das Zahlzeichen *omieron* mit den Sexagesimal-Brüchen steht. *L. c.* T. II. p. 14, und *Journal des savans*. 1817. p. 539. Sonderbar, daß in der alt-indischen Arithmetik der *Lilawati* die Null neben einer Zahl bedeutet, daß die Zahl abzuziehen ist. Delambre I. p. 540. Was bezeichnet der *Ling* (eine wahre Null), welcher in den chinesischen Zahlzeichen unter 12, 13, 22, 132 geschrieben wird? In römischen Inschriften sind Nullen mehrfach wiederholte Obole. (Böckh *Staatshaushaltung der Athener* B. 2. S. 379.)

Dritte Methode. Vervielfachung des Werthes durch Coefficienten.

Was wir bei den Chinesen als Indicatoren in der senkrechten Schrift gefunden haben, ein Unterschied von $X = 12$ und $\overset{2}{X} = 20$, wird in horizontaler Richtung bei Griechen, bei Armeniern und bei den Tamul-redenden Bewohnern der südlichen Halb-Insel von Indien wiederholt. Diophantus und Pappus schreiben βMu für zweimal zehntausend oder 20000, da $\alpha\text{Mu}\beta$ (wenn β der Initiale der Myriade rechts steht) einmal zehntausend plus zwei, oder 10002 bezeichnet. Dasselbe findet statt bei den Tamulziffern, gleichsam als wäre $4X = 40$ und $X4 = 14$. Im alt-persischen Pehlwi, nach Anquetil, und im Armenischen, nach Cerbied *) erkennt man links stehende Multiplicatoren, um die Vielfachen von 100 auszudrücken. Hierher gehört auch, der Methode nach, der oben erwähnte Punct des Diophantus, welcher für Mu stehet und 1000 mal das Vorhergehende erhöht **).

Vierte Methode. Vervielfältigung und Verminderung, aufsteigend und absteigend, durch Abtheilung von Zahl-schichten, deren Werth sich in geometrischer Progression vermindert.

Archimedes in den Octaden, Apollonius in den Tetraden, haben diese Notation nur in Zahlen über $(10000)^2$ und in 100 Millionen oder einer Myriade von Myriaden gebraucht ***). Hier ist offenbar Stellenwerth derselben Zeichen, die in verschiedenen Schichten aufeinander folgen, also ein relativer und absoluter Werth, wie in der absteigenden Sexagesimal-Scale der alexandrinischen Astronomen, wenn sie Grade, Minuten, Secunden angeben. Da aber im letzteren Falle (aus Mangel von $n-1$ oder 59 Zeichen) jede Schicht zweiziffrig ist, so kann der Stellenwerth nicht den Vortheil indischer Zahlen gewähren. Wenn die dreihundert sechzigsten Theile eines Kreises als Ganze betrachtet werden, so sind Minuten Sechzigstel dieser Ganzen, Secunden Sechzigstel der Minuten u. s. f. Als Brüchen gab ihnen Ptolemäus demnach bruch-ähnliche Zeichen, den Strich nach oben, und um die absteigende Progres-

*) *Grammaire Armenienne.* 1823. p. 25.

**) Solche Abtheilungen durch Puncte, welche, auf eine übrigens sehr inconsequente Weise, einen Stellenwerth bezeichnen, findet man ebenfalls in drei oft bestrittenen Stellen des Plinius (VI. 24. 33. XXX. 3).

***) Delambre, *Hist. de l'astron. ancienne* T. I. p. 105. T. II. p. 9.

sion anzudeuten, in welcher jede Schicht von 2 Ziffern 60 mal kleiner als die vorhergehende ist, wurden die Bruchstriche von Schicht zu Schicht vervielfältigt. Auf diese Weise erhielten die Minuten den einfachen Strich der gemeinen griechischen Brüche (deren Zähler die Einheit ist), die Secunden zwei solcher Striche, die Tertien drei, die Grade selbst, als das Ganze, keinen Strich, vielleicht als nichts (*ouden*) eine Null *). Ich sage vielleicht, denn im Ptolemäus und Théon fehlen noch Nullen als Gradzeichen.

In der einfachen Herzzählung der verschiedenen Methoden, welche Völker, denen die indische Positions-Arithmetik unbekannt war, angewandt haben, um die *multipla* der Fundamental-Gruppen auszudrücken, liegt, glaube ich, die Erklärung von der allmäligen Entstehung des indischen Systems. Wenn man 3568 perpendicularär und horizontal durch Indicatoren schreibt: $\overset{3}{M}\overset{5}{C}\overset{6}{X}\overset{8}{I}$, so erkennt man leicht, daß die Gruppenzeichen *M*, *C* . . . weggelassen werden können. Unsere indische Zahlen sind aber nichts anderes als die Multiplicatoren der verschiedenen Gruppen. An diese alleinige Bezeichnung durch Einheiten (Multiplicatoren) erinnert ohnedies der Suanpan, mit seinen aufeinanderfolgenden Schnüren der Tausende, Hunderte, Zehner und Einheiten. Diese Schnüre zeigten in dem gegebenen Falle 3, 5, 6 und 8 Kugeln. Hier ist kein Gruppenzeichen sichtbar. Die Gruppenzeichen sind die Stellen selbst, und diese Stellen (Schnüre) sind mit den Einheiten (Multiplicatoren) gefüllt. Auf beiden Wegen der figurativen (schreibenden) und palpablen (betastenden) Arithmetik gelangt man also zur indischen Position. Ist die Schnur leer, die Schicht im Schreiben offen, fehlt eine Gruppe (ein Glied der Progression), so wird die Leere graphisch durch den Hieroglyphen des Leeren, einen unausgefüllten Kreis: *Sunya*, *sifron*, *tzüphra* **) ausgefüllt.

*) Ueber Anwendung des Nullzeichens s. Leslie p. 12. 135. Kuithen, Germanen und Griechen *Hist.* 2. p. 2—33. Ducange *Glossar. mediae graecitatis T. II* p. 572. Mannerjt *de numerorum quos arabicos vocant origine*. Pythagor. p. 17. In der griechischen Arithmetik bedeutet M^0 eine Einheit, *monas*, wie ein *delta* mit übergeschriebener Null (eigentlich *omicron*), *tetartos*; Baß, Gregor. Cor. p. 851. So ist beim Diophantus $M^0 \times \alpha = 21$. Das indische grammatische Zeichen, *Anuswara*, hat allerdings die Form der indischen Null (*Sunya*). Es bezeichnet aber nur eine Modification in der Betonung des nahe stehenden Vocals und ist dem *Sunya* gänzlich fremd.

**) Im Englischen hat sich *cypher* für Null erhalten, da in den abendländischen Sprachen, welche *zéro* (*sifron siron*) für Null gebrauchen, Ziffer nur ein Zahlzeichen im Allgemeinen andeutet. Im Sanscrit heisst nach Wilson Zahl, Quantität: *sambhara*.

Für die successive Vervollkommnung der Zahlenbezeichnung in Indien sprechen die Tamul-Ziffern, die durch 9 Zeichen der Einheiten und durch Gruppenzeichen für 10, 100 oder 1000 alle Werthe mittelst der links zugefügten Multiplicatoren ausdrücken; dafür sprechen endlich die sonderbaren *arithmoi indikoi* im Scholion des Mönchs Neophytos, welches in der Pariser Bibliothek (*Cod. Reg. fol. 15.*) aufbewahrt wird, und dessen gütige Mittheilung ich Herrn Prof. Brandis verdanke. Die 9 Ziffern des Neophytos sind, ausser der 4, ganz den persischen ähnlich. Die Ziffern 1, 2, 3 und 9 finden sich sogar in ägyptischen Zahlen-Inschriften*). Die 9 Einheiten werden 10fach, 100fach, 1000fach erhöht, indem man eine, zwei oder drei Nullen darüber schreibt, gleichsam also: $\overset{\circ}{2} = 20$, $\overset{\circ}{2}\overset{\circ}{4} = 24$, $\overset{\circ\circ}{5} = 500$, $\overset{\circ\circ}{6} = 6000$. Denken wir uns, statt der Nullen Puncte, so haben wir die arabischen Gobar-Ziffern. Ich lasse hier [das Scholion in einer wörtlichen lateinischen Uebersetzung folgen. Der Mönch nennt fälschlich *tzüphron* ein indisches Wort.

Tzyphra est et vocatur id, quod cuius litterae inde a decade et insequentibus numeris quasi ὀμυρὸν inscribitur. Significat autem hac Indica voce tale analogiam numerorum. Ubi igitur scriptum est simile primae litterae ἄλφα, pro unitate scriptae, atque superimpositum habet vel punctum vel quasi ὀμυρὸν, addita altera figura litterae Indicae, differentiam et augmentum numerorum declarat. E. g. pro primo Graeco numero, ἄ scripto, apud Indos | sive linea recta perpendicularis, quando non habet superimpositum punctum vel ὀμυρὸν, ipsum hoc denotat unitatem, ubi vero superimpositum sit punctum atque altera littera adscripta sit, figura quidem similis priori, significat XI, propter augmentum similis litterae atque superimpositum unum punctum. Similiter etiam in reliquis litteris, quemadmodum adspectus docet. Si vero plura habet puncta, plura denotat. Quod intelligas, lector, et supputes unumquidque.

Von Position ist hier nicht mehr zu erkennen als in der Gobar-Methode. Man schrieb 3006 also: $\overset{\circ\circ}{36}$; aber man mußte bald bemerken, daß dieselben Ziffern mit anderen Werthen wiederkamen, daß (wenn alle Gruppen ausgefüllt waren) in $\overset{\circ\circ}{3}\overset{\circ\circ}{4}\overset{\circ\circ}{6}\overset{\circ\circ}{7}$ die so regelmäsig abnehmen-

*) Kosegarten p. 54.

den Punkte oder Nullen überflüssig wurden. Diese Nullen erleichterten gleichsam nur das Aussprechen der Zahlen. Entstand die Gewohnheit, die Nullen statt über die Ziffern, neben dieselben zu schreiben, so hatte man die jetzige indische Bezeichnung für die ungemischte Gruppe $\overset{\circ}{\underset{\circ}{3}} = 3000$. Wollte man zu $\overset{\circ}{\underset{\circ}{3}}$ oder 3000, $\overset{\circ}{4} = 40$ addiren, so füllte man diejenige Null-Stelle aus, in welche 40, nach seinem die Gruppen-Stufe bezeichnenden Exponenten, hingehört. Man erhielt so: 3040 und von den 3 Nullen, welche den Tausenden eigenthümlich sind, und welche auf die Linie mit den Einheiten herabgezogen wurden, blieben zwei, als leere, unausgefüllte Stellen. Nach Neophytos Scholion sind also Nullen (wie Punkte im Gobar) Indicatoren für die Notation der aufsteigenden Gruppen, und man begreift, aus den eben entwickelten Betrachtungen, wie diese Nullen, bei Einführung des Stellenwerthes der Ziffern, in die Reihe herabkommen und sich dort erhalten konnten.

Wenn wir noch einmal den Blick auf die vielen, zum Theil so wenig bekannten, Notationsmethoden der Völker beider Continente zurückwerfen, so sehen wir 1° wenige Gruppenzeichen, und fast nur für n^2 , n^3 , n^4 . . . , nicht für $2n$, $3n$, und $2n^2$, $2n^3$. . . wie bei Römern *) und Tuskern X , C , M (daher alle Zwischenstufen, z. B. $2n$ oder $2n^2$, durch Juxtaposition wie in XX oder CCC bezeichnet werden); 2° viele Gruppenzeichen nicht bloß für n , n^2 (*iota* und *rho* in den griechischen Buchstaben-Ziffern), sondern auch für $3n$ oder $4n^2$ (in λ und ν), woraus große Heterogenität der einzelnen Elemente im Ausdruck für $2 + 2n + 2n^2$ entstehet (z. E. $\sigma\alpha\beta$ für 222); 3° Bezeichnung der Vielfachen der Fundamental-Gruppe und ihrer Potenzen ($2n$, $3n$, $4n^2$, $5n^2$), entweder durch Hinzufügung (darüber und daneben) von Indicatoren zu den Gruppenzeichen (chinesisch: $\overset{2}{X}$, $\overset{3}{X}$, $\overset{4}{C}$, $\overset{5}{C}$; indisch-tamulisch $2X$, $3X$, $4C$, $5C$), oder durch stufenweise Bepunktung oder Accentuirung der ersten 9 Einheitszeichen, gleichsam α für 10, β für 20, γ für 100, δ für 1000, ϵ für 40000, im Gobar, im Scholion des Neophytos, und in absteigender Sexagesimal-Scale der alexandrinischen Astronomen für $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, $\frac{1}{60^3}$, in $1^\circ 37' 37'' 37'''$ Wir haben gesehen, wie die Indicatoren (Multiplicatoren) der Ost-Asia-

*) Wir abstrahiren hier der Kürze wegen von den Gruppenzeichen des dazwischen laufenden quinairen Systems V , L , D

ten und Bewohner der südlichen und indischen Halb-Insel, oder, wenn ursprünglich Gruppenzeichen für n , n^2 , n^3 verschieden waren, wie die Accentuirung der *Püthmenes* im Gobar-Systeme, oder Scholion des Neophytos, ja endlich wie die Kugelschnüre des Suampan, in dem ein potenzirter Werth nur durch relative Lage der Schnur ausgedrückt wird, zum Stellenwerthe führen konnten.

Ob das einfache indische Positions-System seinen Weg in die Abendländer durch den Aufenthalt des gelehrten Astronomen Rihan Muhammed ebn Ahmet Albiruni in Indien *), oder durch maurische Zollbeamte an der nord-afrikanischen Küste und den Verkehr der italienischen Kaufleute mit diesen Zollbeamten gefunden hat, lassen wir hier unentschieden. Eben so ungewiß ist es, trotz des Alters der indischen Cultur, ob das Positionssystem, welches so mächtig auf den Zustand der Mathematik eingewirkt hat, schon zur Zeit der macedonischen Expedition jenseits des Indus bekannt war. Wie ganz anders, vervollkommt, würden Archimedes, Apollonius von Perga und Diofantos die mathematischen Wissenschaften dem gelehrten Zeitalter der Haschemiten überliefert haben, wenn die Abendländer, 12 oder 13 Jahrhunderte früher, also durch Alexanders Heerzüge, die indische Positions-Arithmetik empfangen hätten. Aber der von den Griechen durchzogene Theil von Vorder-Indien, das Penjab bis Palibothra hin, war, nach Herrn Lassen's gelehrten Untersuchungen, ein Wohnsitz wenig cultivirter Völker. Von den östlicher wohnenden wurden sie selbst Barbaren genannt. Erst Seleucus Nicator drang über die Grenze, welche Cultur und Uncultur schied, über den Fluß Saravatis **) bis zum Ganges vor. Wir sehen aus den alten indischen Tamul-Ziffern, die durch beigesetzte Multiplicatoren $2n$, $3n^2$ ausdrücken, und daher aufser den Zeichen für die ersten 9 Einheiten, eigene Zeichen für n , n^2 , n^3 haben, daß in Indien, neben dem fast allein sogenannten indischen (oder arabischen) Zahlen-Systeme mit Stellenwerth, auch andere, ohne Stellenwerth, gleichzeitig existirt haben. Vielleicht kamen Alexander und seine bactrischen Nachfolger bei ihrem tem-

*) Nach des gelehrten, der griechischen und arabischen Astronomie gleich kundigen Orientalisten Sedillot Bemerkung.

**) Lassen, *Comment. geogr. de Pentapot.* p. 58.

Crelle's Journal. IV. Bd. 3. Hft.

porären Vordringen nicht mit Nationen in Contact, bei welchen die Positions-Methode ausschliesslich vorherrschte.

Möchten die Spuren von dem Vielen, was noch zu entdecken übrig ist, recht bald ernster verfolgt werden, theils von Philologen, welche griechische, persische oder arabische *) Handschriften zu untersuchen Gelegenheit finden, theils von Reisenden, die sich in der indischen Halbinsel selbst aufhalten. Die bloße Pagnation alter Codices aus der Sanscrit-Literatur kann zu merkwürdigen Beobachtungen führen. Wer würde z. B. geahndet haben, daß es unter den Indiern, neben der Decimal-Positions-Arithmetik, ein Sedecimal-System ohne Position gab, daß gewisse indische Stämme meist nach Gruppen von 16, wie die amerikanischen Völker, die Kymren und Basken, nach Gruppen von 20 zählten. Eine solche seltsame Numeration ist aber vor mehr als 10 Jahren in einem Codex des alt-indischen Gedichts *Mahabharata* (*Cod. Reg. Paris. p. 178.*) vom Herrn Professor Bopp aufgefunden, und mir zu der Zeit, als ich meine erste Abhandlung über die Zahlzeichen der Völker der *Académie des inscriptions et belles lettres* vorlegte, gütigst zur Bekanntmachung mitgetheilt worden. Fünf und sechzig Seiten dieser Handschrift sind mit indischen Buchstaben Zahlen paginirt, doch so, daß nur die Consonanten des Sanskrit-Alphabets (*k* für 1, *kh* für 2) gebraucht werden, was dem bisher so allgemein verbreiteten Vorurtheile **) widerspricht, als fänden sich in Indien bloß Ziffern, nicht Buchstaben als Ziffern gebraucht, wie bei semitischen Stämmen und den Griechen. Mit der 60sten Seite beginnt die wunderbare Sedecimal-Notation. Man erkennt in den ersten 15 *püthmenes* kaum zwei Zeichen, — die Sanskrit-Buchstaben sind etwa für 3 ein aspirirtes *t* und für 12 ein *d*, — eben so wenig die eigentlich sogenannten indischen

*) Unter den arabischen Handschriften sind besonders solche zu empfehlen, welche vom Zoll- und Finanzwesen, oder von der Arithmetik im Allgemeinen handeln, z. B. Abu Jose Alchin-*indus de arithmetica indica*; Abdelhamid Ben Vasee Abulphadl, *de numerorum proprietatibus*; Ahmad Ben Omar Alkarabisi *liber de indica numerandi ratione*; die indische Algebra des Katka; Mohammed Ben Lara *de numerorum disciplina* (*Casiri Bibl. arabico-hispana T. I. p. 353. 405. 410. 426. 433.*)

**) *Si l'arithmétique de position n'est pas originaire de l'Inde, elle doit au moins y avoir existé de tems immémorial; car on ne trouve chez les Indiens aucune trace d'une notation alphabétique telle que la notation des Hébreux, des Grecs et des Arabes* (*Delambre Hist. de l'astron. ancienne T. I. p. 543.*)

(arabischen) Zeichen. Merkwürdig ist, daß die Ziffer 1 mit einer beigesetzten Null 4, die Ziffer 1 doppelt (zwei senkrechte Striche) mit einer beigesetzten Null 8 bedeuten, gleichsam Ruhepunkte, Mittelstufen des Sedecimal-Systems für $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}n$; aber $\frac{3}{4}$ von n (12) ist ohne Null und hat eine eigene Hieroglyphe, der arabischen 4 ähnlich. Für die Normalgruppe selbst, 16, und für die *multipla* der Normalgruppe: $2n$, $3n$ werden die bekannten bengalischen Ziffern gebraucht, so daß 16 die bengalische 1 mit einem vorgesetzten gekrümmten Striche; 32 die bengalische 2; 48 die bengalische 3 ist. Die *multipla* von n sind also bloß wie Gruppen erster, zweiter, dritter Ordnung; die Zahlen $2n+4$ oder $3n+6$ (d. i. im Sedecimal-System 36 und 54) sind durch eine bengalische 2 und eine beigefügte Mahabharata-Ziffer*) 4, wie durch eine bengalische Ziffer 3 und eine beigefügte Mahabharata-Ziffer 6 bezeichnet: eine zwar sehr regelmässige, aber unbehülflich verwickelte Art zu numeriren, deren Ursprung um so räthselhafter ist, da sie die Kenntniß der bengalischen Ziffern voraussetzt.

*) Ich bediene mich hier dieses uneigentlichen Ausdruckes, bloß um das Zahlen-System, welches eine Abschrift des Gedichts darbietet, mit einem passenden Worte zu bezeichnen.

18.

Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik.

(Vom Herrn Hofrath und Prof. Dr. *Gaußs* zu Göttingen.)

Bekanntlich verwandelt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die ganze Statik in eine mathematische Aufgabe, und durch D'Alembert's Princip für die Dynamik ist diese wiederum auf die Statik zurückgeführt. Es liegt daher in der Natur der Sache, daß es kein neues Grundprincip für die Bewegungs- und Gleichgewichts-Lehre geben kann, welches der Materie nach nicht in jenen beiden schon enthalten und aus ihnen abzuleiten wäre. Inzwischen scheint doch wegen dieses Umstandes noch nicht jedes neue Princip werthlos zu werden. Es wird allezeit interessant und lehrreich bleiben, den Naturgesetzen einen neuen vortheilhaften Gesichtspunkt abzugewinnen, sei es, daß man aus demselben diese oder jene einzelne Aufgabe leichter auflösen könne, oder daß sich aus ihm eine besondere Angemessenheit offenbare. Der große Geometer, der das Gebäude der Mechanik auf dem Grunde des Princip's der virtuellen Geschwindigkeiten, auf eine so glänzende Art aufgeführt hat, hat es nicht verschmäht, Maupertuis Princip der kleinsten Wirkung zu größerer Bestimmtheit und Allgemeinheit zu erheben, ein Princip, dessen man sich zuweilen mit vielem Vortheil bedienen kann *).

Der eigenthümliche Charakter des Princip's der virtuellen Geschwindigkeiten besteht darin, daß es eine allgemeine Formel zur Auflösung aller statischen Aufgaben, und so der Stellvertreter aller andern Principe ist, ohne jedoch das Creditiv dazu so unmittelbar aufzuweisen,

*) Es sei mir jedoch hier die Bemerkung erlaubt, daß ich die Art, wie ein anderer großer Geometer versucht hat, Huyghens Gesetz für die außerordentliche Brechung des Lichts in Kry stallen von doppelter Brechung, mittelst des Grundsatzes der kleinsten Wirkung zu beweisen, nicht befriedigend finde. In der That ist die Zulässigkeit dieses Grundsatzes wesentlich von dem der Erhaltung der lebendigen Kräfte abhängig, nach welchem die Geschwindigkeiten der bewegten materiellen Punkte bloß durch ihre Plätze bedingt werden, ohne daß die Richtung der Bewegung Einfluß darauf haben kann, was doch in dem erwähnten Versuch vorausgesetzt wird. Es scheint mir, daß im Emanationssystem alle Bemühungen, die Erscheinungen der doppelten Brechung an die allgemeinen dynamischen Gesetze anzuknüpfen, so lange erfolglos bleiben müssen, als man die Lichttheilchen bloß wie Punkte betrachtet.

dafs es sich, so wie es nur ausgesprochen wird, schon von selbst als plausibel empföhle.

In dieser Beziehung scheint das Princip, welches ich hier aufstellen werde, den Vorzug zu haben: es hat aber auch den zweiten, dafs es das Gesetz der Bewegung und der Ruhe auf ganz gleiche Art in größter Allgemeinheit umfaßt. So sehr es in der Ordnung ist, dafs bei der allmäligen Ausbildung der Wissenschaft und bei der Belehrung des Individuum das Leichtere dem Schwerern, das Einfachere dem Verwickeltern, das Besondere dem Allgemeinen vorangeht, so fordert doch der Geist, einmal auf dem höhern Standpuncte angelangt, den umgekehrten Gang, wobei die ganze Statik nur als ein ganz specieller Fall der Mechanik erscheine. Selbst der oben erwähnte Geometer scheint darauf Werth zu legen, indem er als einen Vorzug des Principis der kleinsten Wirkung ansieht, dafs es das Gleichgewicht und die Bewegung zugleich umfasse, wenn man jenes so ausdrücke, dafs die lebendigen Kräfte bei beiden Kleinsten seien, eine Bemerkung, die doch mehr witzig als wahr zu sein scheint, da das Minimum in beiden Fällen in ganz verschiedener Beziehung Statt findet.

Das neue Princip ist nun folgendes.

Die Bewegung eines Systems materieller, auf was immer für eine Art unter sich verknüpfter Punkte, deren Bewegungen zugleich an was immer für äufsere Beschränkungen gebunden sind, geschieht in jedem Augenblick in möglich größter Übereinstimmung mit der freien Bewegung, oder unter möglich kleinstem Zwange, indem man als Maafs des Zwanges, den das ganze System in jedem Zeittheilchen erleidet, die Summe der Produkte aus dem Quadrate der Ablenkung jedes Punkts von seiner freien Bewegung in seine Masse betrachtet.

Es seien m, m', m'' u. s. w. die Massen der Punkte; $\alpha, \alpha', \alpha''$ u. s. w. ihre Plätze zur Zeit t ; b, b', b'' u. s. w. die Plätze, welche sie, nach dem unendlich kleinen Zeittheilchen dt , in Folge der während dieser Zeit auf sie wirkenden Kräfte und der zur Zeit t erlangten Geschwindigkeiten und Richtungen, einnehmen würden, falls sie alle vollkommen frei wären. Die wirklichen Plätze c, c', c'' u. s. w. werden dann diejenigen sein, für welche, unter allen mit den Bedingungen des Systems vereinbaren, $m(bc)^2 + m'(b'c')^2 + m''(b''c'')^2$ u. s. w. ein Minimum wird.

Das Gleichgewicht ist offenbar nur ein einzelner Fall des allgemeinen Gesetzes, und die Bedingung dafür, daß

$$m(ab)^2 + m'(a'b')^2 + m''(a''b'')^2 \text{ u. s. w.}$$

selbst ein Minimum sei, oder daß das Beharren des Systems im Zustande der Ruhe, der freien Bewegung der einzelnen Punkte näher liege, als jedes mögliche Heraustreten aus demselben.

Die Ableitung unsers Principis aus den beiden oben angeführten geschieht leicht auf folgende Art.

Die auf den materiellen Punkt m wirkende Kraft ist offenbar zusammengesetzt, erstens aus einer, die, in Verbindung mit der zur Zeit t Statt habenden Geschwindigkeit und Richtung, ihn in der Zeit dt von a nach c führt, und einer zweiten, die ihn in derselben Zeit aus der Ruhe in c , durch cb führen würde, wenn man den Punkt als frei betrachtet. Dasselbe gilt von den andern Punkten. Nach D'Alembert's Princip müssen demnach die Punkte m, m', m'' u. s. w., unter alleiniger Wirkung der zweiten Kräfte, nach $cb, c'b', c''b''$ u. s. w., in den Plätzen c, c', c'' u. s. w., vermöge der Bedingungen des Systems, im Gleichgewicht sein.

Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten erfordert dies Gleichgewicht, daß die Summe der Producte aus je drei Factoren, nemlich jeder der Massen m, m', m'' u. s. w., den Linien $cb, c'b', c''b''$ u. s. w., und irgend welchen auf letztere resp. projecirten, vermöge der Bedingungen des Systems möglichen Bewegungen jener Punkte, immer $= 0$ sei, wie man es gewöhnlich ausspricht *), oder richtiger, daß jene Summe niemals positiv werden könne. Sind daher $\gamma, \gamma', \gamma''$ u. s. w. von c, c', c'' u. s. w. verschiedene, aber mit den Bedingungen des Systems verträgliche Plätze; und $\theta, \theta', \theta''$ u. s. w. die Winkel, welche $c\gamma,$

*) Der gewöhnliche Ausdruck setzt stillschweigend solche Bedingungen voraus, daß die jeder möglichen Bewegung entgegengesetzte gleichfalls möglich sei, wie z. B., daß ein Punkt auf einer bestimmten Fläche zu bleiben genöthigt, daß die Entfernung zweier Punkte von einander unveränderlich sei u. dergl. Allein dies ist eine unnöthige und der Natur nicht immer angemessene Beschränkung. Die Oberfläche eines undurchdringlichen Körpers zwingt einen auf ihr befindlichen materiellen Punkt nicht, auf ihr zu bleiben, sondern verwehrt ihm bloß das Austreten auf die Eine Seite; ein gespannter, nicht ausdehnbarer aber biegsamer Faden zwischen zwei Punkten macht nur die Zunahme, nicht die Abnahme der Entfernung unmöglich u. s. w. Warum wollten wir also das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten nicht lieber gleich anfangs so ausdrücken, daß es alle Fälle umfaßt?

$c'\gamma'$, $c''\gamma''$ u. s. w. mit cb , $c'b'$, $c''b''$ u. s. w. machen, so ist allemal $\Sigma m.cb.c\gamma.\cos\theta$ entweder 0 oder negativ. Da nun

$$\gamma b^2 = cb^2 + c\gamma^2 - 2cb.c\gamma.\cos\theta,$$

so ist klar, daß

$$\Sigma m.\gamma b^2 - \Sigma m.cb^2 = \Sigma m.c\gamma^2 - 2\Sigma m.cb.c\gamma.\cos\theta,$$

folglich immer positiv sein wird, also $\Sigma m.\gamma b^2$ immer größer als $\Sigma m.cb^2$, d. i. daß $\Sigma m.cb^2$ ein Minimum sein wird. W. Z. B. W.

Es ist sehr merkwürdig, daß die freien Bewegungen, wenn sie mit nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf unter einander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Größen beziehen. Diese Analogie ließe sich noch weiter verfolgen, was jedoch gegenwärtig nicht zu meiner Absicht gehört.

19.

Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.

(Par Mr. N. H. *Abel* de Christiania.)

Introduction.

La théorie des fonctions elliptiques, créée par Mr. Legendre, forme une des parties les plus intéressantes de l'analyse. Ayant essayé de donner de nouveaux développemens à cette théorie, je suis, si je ne me trompe, parvenu à plusieurs résultats qui me paraissent mériter quelque attention. Surtout j'ai cherché à donner de la généralité à mes recherches, en me proposant des problèmes d'une vaste étendue. Si je n'ai été assez heureux de les résoudre complètement, au moins j'ai proposé les moyens pour y parvenir. L'ensemble de mes recherches sur cet objet formera un ouvrage de quelque étendue, mais que les circonstances ne me permettent pas encore de publier. C'est pourquoi je vais donner ici un Précis de la méthode que j'ai suivie, avec les résultats généraux, auxquelles elle m'a conduit. Ce mémoire sera divisé en deux parties.

Dans la première je considère les fonctions elliptiques comme intégrales indéfinies, sans rien y ajouter sur la nature des quantités réelles ou imaginaires, qui les composent. Je me servirai des notations suivantes:

$$\begin{aligned}\Delta(x, c) &= \pm \sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}, \\ \varpi(x, c) &= \int \frac{\partial x}{\Delta(x, c)}, \\ \varpi_0(x, c) &= \int \frac{x^2 \partial x}{\Delta(x, c)}, \\ \Pi(x, c, a) &= \int \frac{\partial x}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta(x, c)},\end{aligned}$$

en sorte que

$$\varpi(x, c), \varpi_0(x, c), \Pi(x, c, a)$$

désignent respectivement les fonctions de première, de seconde et de troisième espèce.

Puis je me suis proposé ce problème général: „Trouver tous les cas possibles dans lesquels on peut satisfaire à une équation de la forme:

$$(a.) \begin{cases} \alpha_1 \cdot \varpi(x_1, c_1) + \alpha_2 \cdot \varpi(x_2, c_2) + \dots + \alpha_n \cdot \varpi(x_n, c_n) \\ + \alpha'_1 \cdot \varpi_0(x'_1, c'_1) + \alpha'_2 \cdot \varpi_0(x'_2, c'_2) + \dots + \alpha'_m \cdot \varpi_0(x'_m, c'_m) \\ + \alpha''_1 \cdot \Pi(x''_1, c''_1, a_1) + \alpha''_2 \cdot \Pi_0(x''_2, c''_2, a_2) + \dots + \alpha''_\mu \cdot \Pi(x''_\mu, c''_\mu) \\ = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu, \end{cases}$$

où

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m; \\ \alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_\mu; A_1, A_2, \dots, A_\nu$$

sont des quantités constantes, $x_1, x_2, \dots, x_n; x'_1, x'_2, \dots, x'_m; x''_1, x''_2, \dots, x''_\mu$ des variables liées entre-elles par des équations algébriques, et $u, v_1, v_2, \dots, v_\nu$ des fonctions algébriques de ces variables."

J'établie d'abord les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, ou ce qui concerne leur sommation, en faisant usage d'une méthode particulière, qui en même tems est applicable avec la même facilité à une infinité d'autres transcendentes plus compliquées. En m'appuyant sur ces propriétés fondamentales, je considère ensuite l'équation dans toute sa généralité et je fais le premier pas à mon but en démontrant un théorème général sur la forme qu'on pourra donner à l'intégrale d'une fonction algébrique quelconque, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques, théorème qui est d'un grand usage dans tout le calcul intégral, à cause de sa grande généralité.

J'en tire, comme corollaire, le théorème suivant:

„Si $\int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)}$, où r est une fonction rationnelle quelconque de x , est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques et par les fonctions elliptiques $\psi, \psi_1, \psi_2, \dots$, on pourra toujours supposer

$$(b.) \int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)} = p \Delta(x, c) + \alpha \cdot \psi(y) + \alpha' \psi_1(y_1) + \alpha'' \psi_2(y_2) + \dots \\ \dots + A_1 \log \left\{ \frac{q_1 + q'_1 \cdot \Delta(x, c)}{q_1 - q'_1 \cdot \Delta(x, c)} \right\} + A_2 \log \left\{ \frac{q_2 + q'_2 \cdot \Delta(x, c)}{q_2 - q'_2 \cdot \Delta(x, c)} \right\} + \dots$$

où toutes les quantités $p, q_1, q_2, \dots, q'_1, q'_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots$ sont des fonctions rationnelles de x^* ."

De ce théorème je tire ensuite celui ci:

„Si une équation quelconque de la forme (a.) a lieu, et qu'on dé-

*) Ce théorème a également lieu, si $\Delta(x, c)$ est la racine carrée d'une fonction entière d'un degré quelconque.

signe par c un quelconque des modules qui y entrent; il y en aura parmi les autres au moins un module c' tel, qu'on puisse satisfaire à l'équation différentielle:

$$\frac{\partial y}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta(x, c)},$$

en mettant pour y une fonction rationnelle de x , et vice versa."

Ces théorèmes sont très importants dans la théorie des fonctions elliptiques. Ils réduisent la solution du problème général à celle de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$\frac{\partial y}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta(x, c)},$$

où à la transformation des fonctions de première espèce. Je donne la solution complète de ce problème, et j'en tire ensuite la transformation générale des fonctions de première espèce. Je fais voir que les modules doivent nécessairement être liés entre eux par une équation algébrique. On peut se contenter de considérer le cas, où le degré de la fonction y est un nombre premier, en y comprenant l'unité. Si ce degré est désigné par μ , c' pourra avoir $6(\mu + 1)$ valeurs différentes, excepté pour $\mu = 1$, où ce nombre se réduit à 6.

La seconde partie traite les fonctions à modules réels et moindres que l'unité. Au lieu des fonctions $\varpi(x, c)$, $\varpi_0(x, c)$, $\Pi(x, c, a)$ j'en introduis trois autres, savoir d'abord la fonction $\lambda(\theta)$, déterminée par l'équation

$$\theta = \int_0^{\lambda\theta} \frac{\partial x}{\Delta(x, c)}.$$

C'est la fonction inverse de la première espèce. En mettant $x = \lambda\theta$ dans les expressions de $\varpi_0(x, c)$, $\Pi(x, c, a)$, elles deviendront de la forme:

$$\begin{aligned} \varpi_0(x, c) &= \int (\lambda\theta)^2 \cdot \partial\theta; \\ \Pi(x, c, a) &= \int \frac{\partial\theta}{1 - \frac{\lambda^2\theta}{\alpha^2}}. \end{aligned}$$

Mises sous cette forme, les fonctions elliptiques offrent des propriétés très remarquables, et sont beaucoup plus traitables. C'est surtout la fonction $\lambda\theta$, qui mérite une attention particulière. Cette fonction a été l'objet d'un mémoire, inséré dans les tomes 2. et 3. de ce journal, où j'en ai démontré le premier quelques-unes de ses propriétés fondamentales. On en trouvera d'avantage dans ce mémoire. Je vais indiquer rapidement quelques-uns des résultats auxquels je suis parvenu:

1. La fonction $\lambda\theta$ jouit de la propriété remarquable d'être périodique de deux manières différentes, savoir non seulement pour des valeurs réelles de la variable, mais encore pour des valeurs imaginaires. En effet si l'on fait pour abréger

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(x, c)}; \quad \frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\Delta(x, b)},$$

où $b = \sqrt{1-c^2}$ et $\sqrt{-1} = i$, on aura:

$$\lambda(\theta + 2\varpi) = \lambda\theta; \quad \lambda(\theta + \omega i) = \lambda\theta.$$

2. La fonction $\lambda\theta$ devient égale à zéro et à l'infini, pour une infinité de valeurs réelles et imaginaires de θ , savoir pour les valeurs

$$\lambda(m\varpi + n\omega i) = 0, \quad \lambda[m\varpi + (n + \frac{1}{2})\omega i] = \frac{1}{0},$$

où m et n sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. De même on a

$$\lambda\theta' = \lambda\theta,$$

si $\theta' = (-1)^m\theta + m\varpi + n\omega i$; mais cette relation est nécessaire.

3. La propriété fondamentale de $\lambda\theta$ est exprimée par l'équation

$$\lambda(\theta' + \theta) \cdot \lambda(\theta' - \theta) = \frac{(\lambda\theta')^2 - (\lambda\theta)^2}{1 - c^2(\lambda\theta)^2(\lambda\theta')^2},$$

où θ' et θ sont des variables quelconques, réelles ou imaginaires.

4. La fonction $\lambda\theta$ pourra se développer en facteurs et en fractions de beaucoup de manières; par exemple si l'on fait pour abréger

$$q = e^{-\frac{\omega}{\varpi}}, \quad p = e^{-\frac{\varpi}{\omega}},$$

on a:

$$\begin{aligned} & \lambda(\theta\varpi) \\ &= \frac{2}{\sqrt{c}} \sqrt[4]{q} \cdot \sin(\pi\theta) \frac{[1-2q^2 \cdot \cos(2\theta\pi) + q^4][1-2q^4 \cdot \cos(2\theta\pi) + q^8][1-2q^6 \cdot \cos(2\theta\pi) + q^{12}] \dots}{[1-2q \cos(2\theta\pi) + q^2][1-2q^3 \cos(2\theta\pi) + q^6][1-2q^5 \cos(2\theta\pi) + q^{10}] \dots} \\ &= \frac{4\sqrt{q}}{c} \cdot \frac{\pi}{\varpi} \cdot \left\{ \frac{1}{1-q} \cdot \sin(\theta\pi) + \frac{q}{1-q^3} \cdot \sin(3\theta\pi) + \frac{q^2}{1-q^5} \cdot \sin(5\theta\pi) + \dots \right\}, \\ & \lambda\left(\frac{\varpi}{2} - \theta\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{(1-p \cdot e^{-2\pi\theta})(1-p \cdot e^{2\pi\theta})(1-p^3 \cdot e^{-2\pi\theta})(1-p^3 \cdot e^{2\pi\theta}) \dots}{(1+p \cdot e^{-2\pi\theta})(1+p \cdot e^{2\pi\theta})(1+p^3 \cdot e^{-2\pi\theta})(1+p^3 \cdot e^{2\pi\theta}) \dots}. \end{aligned}$$

On pourra exprimer d'une manière analogue la fonction de seconde et troisième espèce.

Les deux formules précédentes sont au fond les mêmes que les formules ci-dessus.

5. Une des propriétés les plus fécondes de la fonction $\lambda\theta$ est la suivante:

$$(\text{On a fait pour abréger: } \Delta\theta = \pm \sqrt{[(1-\lambda^2\theta)(1-c^2\lambda^2\theta)]}).$$

„Si l'équation

$(\lambda\theta)^{2n} + a_{n-1}(\lambda\theta)^{2n-2} + \dots + a_1(\lambda\theta)^2 + a_0 = [b_0\lambda\theta + b_1(\lambda\theta)^3 + \dots + b_{n-2}(\lambda\theta)^{2n-3}] \Delta\theta$
est satisfaite, en mettant pour θ , $2n$ quantités $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n}$, telles, que $(\lambda\theta_1)^2, (\lambda\theta_2)^2, \dots, (\lambda\theta_{2n})^2$ soient différents entre-elles, on aura toujours:

$$\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{2n}) = 0,$$

$$-\lambda(\theta_{2n}) = +\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_{2n-1}) = \frac{a_0}{\lambda\theta_1 \cdot \lambda\theta_2 \cdot \dots \cdot \lambda\theta_{2n-1}};$$

les coefficients $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$ pourront être quelconques, et il est facile de voir qu'on pourra les déterminer de sorte que $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n-1}$ sont donnés.”

Voilà une autre propriété plus générale:

„Si l'on fait

$$p^2 - q^2(1 - x^2)(1 - c^2x^2) = A(x - \lambda\theta_1)(x - \lambda\theta_2) \dots (x - \lambda\theta_\mu),$$

où p et q sont des fonctions entières quelconques de la quantité indéterminée x , on pourra toujours supposer les quantités $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\mu$ de la sorte que l'expression

$$\lambda(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_\mu)$$

soit égale à zéro ou à l'infini.”

Ainsi p. ex., si

$$p^2 - q^2(1 - x^2)(1 - c^2x^2) = A(x^2 - \lambda^2\theta)^\mu,$$

où l'une des fonctions p et q est paire et l'autre impaire, on aura

1) si p est pair:

$$\lambda(\mu\theta) = 0, \text{ si } \mu \text{ est pair et}$$

$$\lambda(\mu\theta) = \frac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est impair;}$$

2) si p est impair:

$$\lambda(\mu\theta) = 0, \text{ si } \mu \text{ est impair et}$$

$$\lambda(\mu\theta) = \frac{1}{0}, \text{ si } \mu \text{ est pair.}$$

Delà il suit encore que, si l'équation a lieu, on aura toujours:

$$\lambda\theta = \lambda\left(\frac{m\varpi + \frac{1}{2}n\omega i}{\mu}\right),$$

où m et n sont entiers et moindres que μ .

6. Il existe entre les quantités $\lambda\left(\frac{m\varpi + n\omega i}{2\mu + 1}\right)$ et les racines $(2\mu + 1)^{\text{mes}}$ de l'unité des relations bien remarquables, savoir si l'on fait pour abréger:

$$\delta = \cos \frac{2\pi}{2\mu + 1} + \sqrt{-1} \cdot \sin \frac{2\pi}{2\mu + 1},$$

on aura, quels que soient les nombres entiers n et μ :

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda \left(\frac{2m\varpi + \omega i}{2\mu + 1} \right) + \delta^k \cdot \lambda \left(\frac{2m\varpi + 2\omega i}{2\mu + 1} \right) + \delta^{2k} \cdot \lambda \left(\frac{2m\varpi + 3\omega i}{2\mu + 1} \right) + \dots \\
&\quad \dots + \delta^{2\mu k} \cdot \lambda \left(\frac{2m\varpi + 2\mu\omega i}{2\mu + 1} \right), \\
0 &= \lambda \left(\frac{\varpi + m\omega i}{2\mu + 1} \right) + \delta^{k'} \cdot \lambda \left(\frac{2\varpi + m\omega i}{2\mu + 1} \right) + \delta^{2k'} \cdot \lambda \left(\frac{3\varpi + m\omega i}{2\mu + 1} \right) + \dots \\
&\quad \dots + \delta^{2\mu k'} \cdot \lambda \left(\frac{2\mu\varpi + m\omega i}{2\mu + 1} \right).
\end{aligned}$$

D'ailleurs toutes les quantités $\lambda \left(\frac{m\varpi + n\omega i}{2\mu + 1} \right) \dots$ sont les racines d'une même équation du degré $(2\mu + 1)^2$ et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de c^2 .

7. Si la fonction

$$\int \frac{\partial x}{\Delta(x, c)},$$

dont le module c est réel et moindre que l'unité, peut être transformée dans une autre:

$$\varepsilon \int \frac{\partial y}{\Delta(y, c')},$$

dont le module c' est réel ou imaginaire, en mettant pour y une fonction algébrique quelconque de x , il faut nécessairement que le module c' soit déterminé par l'une des deux équations:

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{c'} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{q_1} \cdot \frac{(1+q_1^2)(1+q_1^4)(1+q_1^6)\dots}{(1+q_1)(1+q_1^3)(1+q_1^5)\dots}, \\
\sqrt[4]{c'} &= \frac{1-q_1}{1+q_1} \cdot \frac{1-q_1^3}{1+q_1^3} \cdot \frac{1-q_1^5}{1+q_1^5} \dots
\end{aligned}$$

où $q_1 = q^\mu$, μ étant rationnel; ou ce qui revient au même:

$$q_1 = e^{\left(\mu \frac{\omega}{\varpi} + \mu' i\right)\pi},$$

μ et μ' étant des nombres rationnels quelconques.

8. La théorie de la transformation devient très facile à l'aide des propriétés les plus simples de la fonction $\lambda\theta$. Pour en donner un exemple, soit proposé le problème: satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$\frac{\partial y}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta(x, c)},$$

en supposant c et c' moindres que l'unité et y fonction rationnelle, réelle ou imaginaire de x .

Soit $x = \lambda\theta$, $y = \lambda'\theta'$, en désignant par λ' la fonction qui répond au module c' . L'équation différentielle se changera dans ce cas en $\partial\theta' = \varepsilon\partial\theta$, d'où

$$\theta' = \varepsilon\theta + \alpha,$$

a étant une constante. Cela posé, soit

$$y = \frac{\varphi x}{f x},$$

on aura

$$\lambda'(\varepsilon\theta + a) = \frac{\varphi(\lambda\theta)}{f(\lambda\theta)}.$$

En mettant $\theta + 2\varpi$, $\theta + \omega i$ au lieu de θ , $\lambda\theta$ ne change pas de valeur et par conséquent on doit avoir:

$$\lambda'(\varepsilon\theta + 2\varepsilon\varpi + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$

$$\lambda'(\varepsilon\theta + \varepsilon\omega i + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a).$$

Donc, si l'on désigne par ϖ' et ω' les valeurs de ϖ et ω qui répondent au module c' , on aura en vertu de (2.):

$$2\varepsilon\varpi = 2m\varpi' + n\omega' i,$$

$$\varepsilon\omega i = 2m'\varpi' + n'\omega' i,$$

ce qui donne

$$\varepsilon = m \cdot \frac{\varpi'}{\varpi} + \frac{n}{2} \cdot \frac{\omega'}{\varpi} i = n' \frac{\omega'}{\omega} - 2m' \frac{\varpi'}{\omega} i,$$

donc:

$$m \frac{\varpi'}{\varpi} = n' \frac{\omega'}{\omega}; \quad \frac{n}{2} \cdot \frac{\omega'}{\varpi} = -2m' \frac{\varpi'}{\omega},$$

ou bien:

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega} = -\frac{n}{4m'} \cdot \frac{\omega}{\varpi}.$$

Maintenant, si c est indéterminé, cette équation ne pourra subsister à moins qu'on n'ait ou $n=0$, $m'=0$, ou $n'=0$, $m=0$. Dans le premier cas ε est réel et

$$= m \frac{\varpi'}{\varpi} = n' \cdot \frac{\omega'}{\omega},$$

et dans le second cas ε est imaginaire et

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{\omega'}{\varpi} i = -2m' \frac{\varpi'}{\omega} i.$$

Supposons ε réel. Alors on aura ce théorème:

„Si deux fonctions réelles peuvent être transformées l'une en l'autre, il faut qu'on ait entre les fonctions complètes ϖ , ω , ϖ' , ω' cette relation:

$$\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega},$$

où n' et m sont des nombres entiers.”

On pourra démontrer que si cette condition est remplie, on pourra effectivement satisfaire à l'équation

$$\int \frac{\partial y}{\Delta(y, c')} = m \cdot \frac{\varpi'}{\varpi} \cdot \int \frac{\partial x}{\Delta(x, c)}.$$

Rien n'est plus simple que de trouver l'expression de y . Il suffit pour cela de chercher les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$.

Désignons par $\lambda\delta$ et $\lambda\delta'$ une racine quelconque de ces deux équations, on aura, pour déterminer δ et δ' , ces deux équations:

$$\lambda'(\varepsilon\delta + a) = 0; \quad \lambda'(\varepsilon\delta' + a) = \frac{1}{\varepsilon};$$

ce qui donne:

$$\delta = -a + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + \frac{k'}{\varepsilon}\omega'i; \quad \delta' = -a + \frac{k}{\varepsilon}\varpi' + (k' + \frac{1}{2})\frac{\omega'}{\varepsilon}i,$$

c'est-à-dire:

$$\delta = -a + \frac{k}{m}\varpi + \frac{k'}{n'}\omega i; \quad \delta' = -a + \frac{k}{m}\varpi + (k' + \frac{1}{2})\frac{\omega}{n'}i,$$

k et k' étant des nombres entiers. Pour trouver a , il suffit de remarquer que $\lambda\theta$ ne change pas de valeur en mettant $\varpi - \theta$ au lieu de θ . On aura donc

$$\lambda'(\varepsilon\varpi - \varepsilon\theta + a) = \lambda'(\varepsilon\theta + a),$$

ce qui donne

$$a = \frac{1}{2}\{2\mu + 1 - m\}\varpi_1 + \mu'\omega_1 i\}.$$

Dans le cas où m est impair, on pourra toujours faire $a = 0$.

Connoissant les valeurs de δ et δ' , on aura immédiatement les racines des deux équations $\varphi x = 0$, $fx = 0$, et par suite l'expression des fonctions φx et fx en factorielles. Les formules les plus simples répondent aux cas de $m = 1$ ou $n' = 1$, et elles sont les seules dont il s'agit, comme il est aisé de voir par l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n'}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega}$. On pourra aussi se servir des expressions de la fonction $\lambda\theta$ en produits infinis rapportées plus haut. J'ai fait voir cela dans un mémoire, présenté à M. Schumacher pour son journal.

9. Le cas où un des modules c peut être transformé en son complément $\sqrt{1-c^2} = b$, mérite une attention particulière. En vertu de l'équation $\frac{\varpi'}{\omega'} = \frac{n}{m} \cdot \frac{\varpi}{\omega}$, on aura dans ce cas

$$\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\Delta(y, b)} = \sqrt{(m \cdot n)} \cdot \frac{\partial x}{\Delta(x, c)}.$$

Le module c sera déterminé par une équation algébrique qui paroît être résoluble par les radicaux; au moins cela aura lieu effectivement si $\frac{m}{n}$ est un carré parfait. Dans tous les cas il est facile d'exprimer c par des produits infinis. En effet, si $\frac{\varpi}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)}$, on a:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{c} &= \sqrt[n]{2} \cdot e^{-\frac{1}{8}\pi\sqrt{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{\left(1 + e^{-2\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1 + e^{-4\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right) \dots}{\left(1 + e^{-\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1 + e^{-2\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right) \dots} \\ &= \frac{\left(1 - e^{-\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1 - e^{-3\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right) \dots}{\left(1 + e^{-\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right)\left(1 + e^{-3\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}\right) \dots}. \end{aligned}$$

Si deux modules c' et c peuvent être transformés l'un dans l'autre, ils auront entre eux une relation algébrique. Mais généralement il paraît impossible d'en tirer la valeur de c' en c à l'aide de radicaux*), mais il est remarquable, que cela a toujours lieu si c peut être transformé en son complément. Par exemple si $c^2 = \frac{1}{2}$.

Les équations modulaires jouissent d'ailleurs de la propriété remarquable, que toutes leurs racines peuvent être exprimées rationnellement par deux entre elles. De même on pourra exprimer toutes les racines par l'une d'elles à l'aide de radicaux.

10. On pourra développer la fonction $\lambda\theta$ de la manière suivante:

$$\lambda\theta = \frac{\theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + \dots}{1 + b'\theta^4 + b''\theta^6 + \dots},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries toujours convergentes. En faisant

$$\begin{aligned} \varphi\theta &= \theta + a\theta^3 + a'\theta^5 + \dots \\ f\theta &= \theta + b'\theta^4 + b''\theta^6 + \dots \end{aligned}$$

ces deux fonctions auront la propriété exprimée par les deux équations:

$$\begin{aligned} \varphi(\theta' + \theta) \cdot \varphi(\theta' - \theta) &= (\varphi\theta \cdot f\theta')^2 - (\varphi\theta' \cdot f\theta)^2, \\ f(\theta' + \theta) \cdot f(\theta' - \theta) &= (f\theta \cdot f\theta')^2 - c^2(\varphi\theta \cdot \varphi\theta')^2, \end{aligned}$$

où θ' et θ sont deux variables indépendantes. Ainsi p. ex. si l'on fait $\theta' = \theta$, on a

$$f(2\theta) = (f\theta)^2 - c^2(\varphi\theta)^2.$$

Ces fonctions jouissent de beaucoup de propriétés remarquables.

*) Dans le cas par ex. où y est de la forme:

$$\sqrt{\frac{c^5}{c'}} \cdot \frac{x(a^2 - x^2)(a_1^2 - x^2)}{(1 - a^2 x^2)(1 - a_1^2 x^2)} = y,$$

l'équation entre c' et c est du sixième degré. Or je suis parvenu à démontrer rigoureusement, que si une équation du sixième degré est résoluble à l'aide de radicaux, cette équation sera décomposable ou en deux autres du troisième degré, dont les coefficients dépendent d'une équation du second degré, ou elle sera décomposable en trois équations du second degré, dont les coefficients sont déterminés par une équation du troisième degré. L'équation entre c' et c ne paraît guère être décomposable de cette sorte.

11. Les formules présentées dans ce qui précède ont lieu avec quelques restrictions, le module c étant quelconque, réel ou imaginaire.

Première partie.

Des fonctions elliptiques en général.

Chapitre I.

Propriétés générales des fonctions elliptiques.

Les fonctions elliptiques jouissent comme on sait de cette propriété remarquable, que la somme d'un nombre quelconque de ces fonctions peut être exprimée par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant une certaine expression algébrique et logarithmique. La découverte de cette propriété est due à M. Legendre. La démonstration que cet illustre géomètre en a donnée, est fondée sur l'intégration algébrique de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}}.$$

L'objet de ce chapitre sera de démontrer cette propriété des fonctions elliptiques, mais en s'appuyant sur des considérations différentes de celles de Mr. Legendre.

§. 1.

Démonstration d'un théorème fondamental.

Nous commencerons par établir un théorème général qui servira de fondement de tout ce qui va être exposé dans ce mémoire et qui en même tems exprime une propriété très remarquable des fonctions elliptiques.

Théorème I. Soient fx et φx deux fonctions quelconques entières de x , l'une paire, l'autre impaire, et dont les coefficients soient supposés variables. Cela posé si l'on décompose la fonction entière paire

$$(fx)^2 - (\varphi x)^2 (\Delta x)^2$$

en facteurs de la forme $x^2 - x_1^2$, en sorte que

$$1. (fx)^2 - (\varphi x)^2 (\Delta x)^2 = A. (x^2 - x_1^2) (x^2 - x_2^2) (x^2 - x_3^2) \dots (x^2 - x_\mu^2)$$

où A est indépendant de l'indéterminée x , je dis qu'on aura :

$$2. Hx_1 + Hx_2 + Hx_3 + \dots + Hx_\mu = C - \frac{\alpha}{2\Delta\alpha} \cdot \log \left\{ \frac{fa + \varphi a \cdot \Delta a}{fa - \varphi a \cdot \Delta a} \right\},$$

où a désigne le paramètre de la fonction IIx , en sorte que

$$3. \quad IIx = \int \frac{\partial x}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x}.$$

La quantité C est la constante d'intégration.

Démonstration. Supposons d'abord que tous les coefficients des diverses puissances de x dans fx et ϕx soient des quantités variables indépendantes. Dans ce cas toutes les quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ seront évidemment inégales entre elles et fonctions de ces variables. En désignant par x l'une quelconque entre-elles, l'équation (1.) donnera

$$4. \quad (fx)^2 - (\phi x)^2 (\Delta x)^2 = 0,$$

et de là:

$$5. \quad fx + \phi x \cdot \Delta x = 0.$$

Cela posé, faisons pour abréger

$$\psi x = (fx)^2 - (\phi x)^2 (\Delta x)^2,$$

et désignons par $\psi'x$ la dérivée de cette fonction par rapport à x seul. De même désignons par la caractéristique δ la différentiation qui se rapporte aux seules variables indépendantes. Puis en différentiant, on tire de l'équation (4.):

$$\psi'x \cdot \partial x + 2fx \cdot \partial fx - 2\phi x \cdot \partial fx \cdot (\Delta x)^2 = 0;$$

mais en vertu de (5.) on a:

$$fx = -\phi x \cdot \Delta x,$$

$$\phi x (\Delta x)^2 = -fx \cdot \Delta x,$$

donc en substituant:

$$\psi'x \cdot \partial x - 2\Delta x (\phi x \cdot \partial fx - fx \cdot \partial \phi x).$$

De là, en divisant par $\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \Delta x$, on tire:

$$\frac{\partial x}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x} = \frac{2(\phi x \cdot \partial fx - fx \cdot \partial \phi x)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \psi'x},$$

et intégrant:

$$IIx = \int \frac{2(\phi x \cdot \partial fx - fx \cdot \partial \phi x)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot \psi'x}.$$

Maintenant en faisant $x = x_1, x_2, \dots, x_\mu$, ajoutant les résultats et faisant pour abréger:

$$2(\phi x \cdot \partial fx - fx \cdot \partial \phi x) = \theta x,$$

on obtiendra:

$$6. \quad \Pi x_1 + \Pi x_2 + \dots + \Pi x_\mu$$

$$= \int \left(\frac{\theta x_1}{\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) \psi' x_1} + \frac{\theta x_2}{\left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right) \psi' x_2} + \dots + \frac{\theta x_\mu}{\left(1 - \frac{x_\mu^2}{a^2}\right) \psi' x_\mu} \right)$$

Mais θx étant une fonction entière de x^2 dont le degré est évidemment inférieur à celui de la fonction ψx , le second membre, suivant un théorème connu sur la décomposition des fonctions fractionnaires, se réduira à

$$\frac{\int a \theta a}{2 \psi a},$$

c'est-à-dire en substituant la valeur de θa et celle de ψa , à :

$$a \int \frac{\varphi a \cdot \delta f a - f a \cdot \delta \varphi a}{(f a)^2 - (\varphi a)^2 (\Delta a)^2}.$$

Cette intégrale se trouvera facilement; en effet Δa étant constant, on aura en intégrant d'après les règles connues :

$$C - \frac{a}{2 \Delta a} \log \left\{ \frac{f a + \varphi a \cdot \Delta a}{f a - \varphi a \cdot \Delta a} \right\},$$

où C est la constante d'intégration. Cette fonction étant mise à la place du second membre de l'équation (6.), donnera précisément la formule (2.) qu'il s'agissoit de démontrer.

La propriété de la fonction $\Pi(x)$, exprimée par la formule (2.), est d'autant plus remarquable, qu'elle aura lieu en supposant la fonction Δx racine carrée d'une fonction quelconque entière et paire de x . En effet la démonstration précédente est fondée sur cette seule propriété de la fonction Δx . Donc on a de cette sorte une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes *).

La formule (2.) étant démontré pour le cas, où les quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ sont inégales entre elles, il est évident qu'elle aura lieu encore en attribuant aux variables indépendantes des relations quelconques qui pourront aussi rendre plusieurs des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ égales entre elles.

Il y a à observer, que les signes des radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_\mu$ ne sont pas arbitraires. Ils doivent être pris tels qu'ils satisfassent aux équations 7. $f x_1 + \varphi x_1 \cdot \Delta x_1 = 0$; $f x_2 + \varphi x_2 \cdot \Delta x_2 = 0$; $\dots$ $f x_\mu + \varphi x_\mu \cdot \Delta x_\mu = 0$, qu'on tire de l'équation (5.), en mettant pour x les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_\mu$.

*) Voyez sur cet objet un mémoire inséré dans le tome III. page 313. de ce journal. On en trouve un théorème beaucoup plus général: tome IV. page 200.

La formule (2.) exprime une propriété de la fonction de la troisième espèce $\Pi(x)$. Or rien n'est plus facile que d'en déduire des propriétés semblables des fonctions:

$$8. \quad \varpi x = \int \frac{\partial x}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \varpi_0 x = \int \frac{x^2 \partial x}{\Delta x}.$$

D'abord si l'on fait a infini, on a $\Pi x = \varpi x$; mais il est clair, que la partie logarithmique de la formule (2.) s'évanouira dans ce cas; le second membre se réduira donc à une constante, et par conséquent on aura:

$$(9.) \quad \varpi x_1 + \varpi x_2 + \dots + \varpi x_\mu = C.$$

Egalement si l'on développe les deux membres de l'équation (2.) suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$, on aura, en comparant les coefficients de $\frac{1}{a^2}$ dans les deux membres:

$$10. \quad \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \dots + \varpi_0 x_\mu = C - p,$$

où p est une fonction algébrique des variables, savoir le coefficient de $\frac{1}{a^2}$ dans le développement de la fonction

$$\frac{a}{2\Delta a} \log \left\{ \frac{fa + \varphi a \cdot \Delta a}{fa - \varphi a \cdot \Delta a} \right\}$$

suitant les puissances ascendantes de $\frac{1}{a}$.

En vertu des formules (2. 9. 10.) il est clair, qu'en désignant par ψx une fonction quelconque de la forme:

$$11. \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi x = \int \left(A + B \cdot x^2 + \frac{a}{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{\alpha_1}{1 - \frac{x_1^2}{a_1^2}} + \dots + \frac{\alpha_\nu}{1 - \frac{x_\nu^2}{a_\nu^2}} \right) \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}, \\ \text{on aura:} \\ \psi x_1 + \psi x_2 + \dots + \psi x_\mu = C - B \cdot p - \frac{a \cdot a}{2\Delta a} \log \left\{ \frac{fa + \varphi a \Delta a}{fa - \varphi a \Delta a} \right\} \\ \quad - \frac{\alpha_1 a_1}{2\Delta a_1} \log \left\{ \frac{fa_1 + \varphi a_1 \Delta a_1}{fa_1 - \varphi a_1 \Delta a_1} \right\} \dots - \frac{\alpha_\nu a_\nu}{2\Delta a_\nu} \log \left\{ \frac{fa_\nu + \varphi a_\nu \Delta a_\nu}{fa_\nu - \varphi a_\nu \Delta a_\nu} \right\}. \end{array} \right.$$

On voit que cette équation a lieu quelle que soit la constante A .

§. 2.

Propriété fondamentale des fonctions elliptiques, tirée des formules précédentes.

Dans ce qui précède les quantités $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu$ sont regardées comme fonctions des coefficients variables dans fx et φx . Supposons maintenant qu'on détermine ces coefficients de manière qu'un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ prend des valeurs données mais variables.

Soient

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

des variables indépendentes. Alors les coefficients dans fx , ϕx deviendront des fonctions de ces quantités. En les substituant dans l'équation

$$(fx)^2 - (\phi x)^2 (\Delta x)^2 = 0,$$

le premier membre sera divisible par le produit

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \dots (x^2 - x_m^2),$$

et le quotient, égalé à zéro, donnera une équation du degré $\mu - m$ par rapport à x^2 , dont les racines seront les $\mu - m$ quantités:

$$x_{m+1}^2, x_{m+2}^2, \dots, x_{\mu}^2,$$

qui par suite sont des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Le cas le plus simple et le plus important est celui, où le nombre $\mu - m$ a la moindre valeur possible. Pour avoir ce minimum, il faut donner aux fonctions fx et ϕx la forme la plus générale pour laquelle le degré de l'équation $(fx)^2 - (\phi x)^2 (\Delta x)^2 = 0$ est égal à μ .

Il est facile de voir que le plus grand nombre de coefficients possible à introduire dans fx et ϕx , est μ . Mais, puisqu'en vertu de la forme des équations (7.) on peut supposer un de ces coefficients égal à l'unité, sans diminuer la généralité, on n'aura réellement qu'un nombre de $\mu - 1$ indéterminées. On pourra donc faire $m = \mu - 1$, en sorte que toutes les quantités $x_1, x_2, \dots, x_{\mu}$, excepté une seule, seront des variables indépendentes. Par là on aura immédiatement la propriété fondamentale des fonctions elliptiques dont il a été question au commencement du chapitre.

Il y a deux cas différens à considérer, savoir μ pair ou impair.

Cas I. μ étant pair et $= 2n$.

A. Si la fonction fx est paire et ϕx impaire, il est clair que fx doit être du degré $2n$, et ϕx du degré $2n - 3$. Faisons donc:

$$12. \begin{cases} fx = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots + a_{n-1} x^{4n-2} + x^{2n}, \\ \phi x = (b_0 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \dots + b_{n-2} x^{2n-4})x \end{cases}$$

et

$$13. (fx)^2 - (\phi x)^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \dots (x^2 - x_{2n-1}^2)(x^2 - y^2),$$

où nous avons mis y au lieu de x_{2n} , qui sera une fonction des variables $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$.

Les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-2}$ seront exprimés en fonctions de $x_1, x_2, \dots$ à l'aide des $\mu - 1$ équations (7.), savoir:

$$13'. fx_1 + \phi x_1 \cdot \Delta x_1 = 0; fx_2 + \phi x_2 \cdot \Delta x_2 = 0; \dots; fx_{2n-1} + \phi x_{2n-1} \cdot \Delta x_{2n-1} = 0.$$

Ces équations, étant linéaires par rapport aux inconnues, donneront celles-ci en fonctions rationnelles des quantités:

$$x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{2n-1}.$$

Il est clair qu'on pourra donner aux radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{2n-1}$ des signes arbitraires.

Pour avoir la valeur de y , faisons dans l'équation (12.) $x = 0$. Cela donne

$$a_0^2 = x_1^2 x_2^2 \dots x_{2n-1}^2 \cdot y^2,$$

d'où l'on tire:

$$14. \quad y = -\frac{a_0}{x_1 \cdot x_2 \dots x_{2n-1}}.$$

La quantité y est donc une fonction rationnelle des variables $x_1, x_2, \dots$ et des radicaux correspondants.

Si maintenant y a cette valeur et qu'on fait

$$\Delta x_{2n} = -\Delta y,$$

les formules (2. 9. 10.) donneront:

$$15. \quad \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 + \dots + \varpi x_{2n-1} = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \dots + \varpi_0 x_{2n-1} = \varpi_0 y - b_{n-2} + C, \\ \Pi x + \Pi x_2 + \dots + \Pi x_{2n-1} = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \left\{ \frac{fa + \varphi a \cdot \Delta a}{fa - \varphi a \cdot \Delta a} \right\} + C. \end{cases}$$

Quant aux fonctions $\varpi y, \varpi_0 y, \Pi y$, il faut bien observer que le signe du radical Δy n'est pas toujours le même. Il sera dans tous les cas déterminé par la dernière des équations (7.) qui, en mettant pour y_{2n} et Δx_{2n} leurs valeurs y et $-\Delta y$, deviendra:

$$fy - \Phi y \cdot \Delta y.$$

On en tire

$$16. \quad \Delta y = \frac{fy}{\Phi y},$$

et cela fait voir que le radical Δy , comme y , est une fonction rationnelle des quantités $x_1, x_2, \dots, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots$.

La fonction y a la propriété d'être zéro en même tems que les variables $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$. En effet si l'on fait

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{2n-1} = 0,$$

l'équation (13.) ne pourra subsister à moins que tous les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-2}$ ne soient égaux à zéro, donc cette équation se réduit à:

$$x^{4n} = x^{4n-2}(x^2 - y^2),$$

donc on aura $y = 0$.

On pourroit donner le signe contraire au second membre de l'équation (14.). Celui que nous avons choisi est tel que le radical Δy se réduit à $+1$, en supposant $x_1 = x_2 = x_3 = \dots x_{2n-1} = 0$, et en même tems $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots \Delta x_{2n-1} = +1$. Pour démontrer cela, supposons $x_1, x_2, \dots x_{2n-1}$ infiniment petits, on aura dans ce cas:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots \Delta x_{2n-1} = 1,$$

et les équations (13') font voir que $x_1, x_2, \dots x_{2n-1}$ satisfont à l'équation:

$$17. \quad x^{2n} + a_{n-1}x^{2n-2} + b_{n-2}x^{2n-3} + \dots + b_0x + a_0 = 0.$$

Cette équation étant du degré $2n$, doit avoir encore une racine. En la désignant par z , on aura:

$$a_0 = z.x_1.x_2 \dots x_{2n-1},$$

donc en vertu de l'équation (14.):

$$z = -y.$$

L'équation est donc satisfaite en faisant $x = -y$. Or cela donne

$$y^{2n} + a_{n-1}y^{2n-2} + \dots + a_1y^2 + a_0 = (b_0 + b_1y^2 + \dots + b_{n-2}y^{2n-4})y,$$

donc en vertu de (16.):

$$18. \quad \Delta y = +1.$$

On pourra encore remarquer que y se réduit pour des valeurs infiniment petites de $x_1, x_2, \dots x_{2n-1}$ à $x_1 + x_2 + \dots + x_{2n-1}$. Cela fait voir l'équation (17.), qui, n'ayant pas de second terme, donnera la somme des racines égale à zéro, c'est-à-dire:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2n-1} - y = 0,$$

donc:

$$19. \quad y = x_1 + x_2 + \dots + x_{2n-1}.$$

B. Si fx est impair et ϕx pair, fx doit être du degré $2n-1$ et ϕx du degré $2n-2$. Donc on aura dans ce cas un nombre de $2n-1$ coefficients indéterminés, et on parviendra à des formules semblables aux (15.); mais la fonction y aura une valeur différente. On démontrera aisément qu'elle sera égale à $\frac{1}{cy}$, la valeur de y étant déterminée par l'équation (14.).

Cas II. Si μ est un nombre impair et $= 2n+1$.

A. Si fx est impair et ϕx pair, on aura:

$$20. \quad \begin{cases} fx = (a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \dots + a_{n-1}x^{2n-2} + x^{2n})x, \\ \phi x = b_0 + b_1x^2 + b_2x^4 + \dots + b_{n-1}x^{2n-2}, \end{cases}$$

$$21. \quad (fx)^2 - (\phi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\dots(x^2-x_{2n}^2)(x^2-y^2).$$

Les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}; b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ sont déterminés par les $2n$ équations linéaires:

$$22. f x_1 + \varphi x_1 \cdot \Delta x_1 = 0; f x_2 + \varphi x_2 \cdot \Delta x_2 = 0; \dots f x_{2n} + \varphi x_{2n} \cdot \Delta x_{2n} = 0.$$

La fonction y le sera par l'équation:

$$23. y = \frac{b_0}{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2n}},$$

qu'on obtiendra, en faisant dans (21.) $x = 0$.

Enfin le radical Δy est déterminé par

$$24. \Delta y = \frac{f y}{\varphi y}.$$

Cela posé on aura:

$$25. \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 + \dots + \varpi x_{2n} = \varpi y + C, \\ \varpi_0 x_1 + \varpi_0 x_2 + \dots + \varpi_0 x_{2n} = \varpi_0 y - b_{n-1} + C, \\ H x_1 + H x_2 + \dots + H x_{2n} = H y - \frac{a}{2 \Delta a} \log \left\{ \frac{f a + \varphi a \cdot \Delta a}{f a - \varphi a \cdot \Delta a} \right\} + C. \end{cases}$$

Les fonctions y et Δy sont, comme dans le cas précédent, des fonctions rationnelles des variables $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ et des radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{2n}$, et on démontrera de la même manière, qu'on aura pour des valeurs infiniment petites de $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$,

$$26. y = x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}; \Delta y = +1,$$

si l'on suppose en même tems que les radicaux $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{2n}$ se réduisent à $+1$. y s'évanouira simultanément avec les variables.

Les formules (25.) pourront d'ailleurs être déduites sur le champ de celles du premier cas, en y faisant $x_{2n-1} = 0$, et changeant ensuite n en $n+1$.

B. Si $f x$ est pair et φx impair, on parviendra à des formules semblables. La valeur qui en résultera pour la fonction y , sera égale à $\frac{1}{c y}$, où y est déterminé par la formule (23.).

On voit donc par les formules (15. 25.), qu'on pourra toujours exprimer la somme d'un nombre donné de fonctions par une seule fonction de la même espèce, en y ajoutant, pour les fonctions de la première espèce, une constante, pour celles de la seconde espèce une certaine fonction algébrique, et pour celles de la troisième espèce une fonction logarithmique.

En faisant attention qu'une intégrale quelconque de la forme

$$\int \frac{\theta x \cdot \partial x}{\Delta x},$$

peut être réduite aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$ et à un certain nombre de fonctions de la troisième espèce, en y ajoutant une expression algébrique et logarithmique, il est clair qu'en faisant

$$\psi x = \int \frac{\theta x \cdot \partial x}{\Delta x},$$

on aura

$$27. \psi x_1 + \psi x_2 + \psi x_3 \dots = \psi y + v + C,$$

ou v est exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

En vertu des formules (15. 25.) il est clair que la fonction v ne change pas de valeur, si l'on ajoute à la fonction rationnelle θx une quantité constante quelconque, de sorte qu'on peut supposer également

$$\psi x = \int (A + \theta x) \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Je dis maintenant que la fonction ψ est la seule qui puisse satisfaire à l'équation (27.). En effet si l'on différentie cette équation par rapport à l'une des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots$, par exemple à x_1 , on aura:

$$\psi' x_1 \cdot \partial x_1 = \psi' y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right) \cdot \partial x_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right) \cdot \partial x.$$

Cela posé, si l'on suppose toutes les quantités $x_2, x_3, \dots y$ égales à des constantes déterminées, on aura, en mettant x pour x_1 , et faisant

$$\psi' y = A, \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = p, \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = q:$$

$$\psi' x \cdot \partial x = A \cdot q \partial x + p \partial x,$$

d'où l'on tire:

$$\psi x = \int (Aq + p) \partial x.$$

La fonction ψx ne pourra donc renfermer qu'une seule constante indéterminée A , et par conséquent:

$$\psi x = \int (A + \theta x) \frac{\partial x}{\Delta x}$$

est son expression générale.

Les propriétés exprimées par les formules de ce paragraphe appartiennent donc exclusivement aux fonctions elliptiques. C'est pourquoi je les ai nommées fondamentales.

Dans les formules que nous avons données, y a une valeur unique, mais on pourra satisfaire aux mêmes formules, en mettant au lieu de y une expression algébrique contenant une constante arbitraire. En effet, pour avoir une telle expression, il suffit de supposer une des variables $x_1, x_2, x_3, \dots$ égale à une constante arbitraire, et la valeur de y qu'on obtiendra par là, sera la plus générale possible, comme on sait par

la théorie de l'intégration des équations différentielles du premier ordre, dont l'intégrale complète ne contient qu'une seule constante arbitraire.

A l'aide des formules (15. 25.) on pourra exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions par une seule fonction. Il est facile, d'en tirer les formules suivantes:

$$28. \begin{cases} \frac{\mu_1}{\mu} \varpi x_1 + \frac{\mu_2}{\mu} \varpi x_2 + \dots + \frac{\mu_n}{\mu} \varpi x_n = C + \varpi y, \\ \frac{\mu_1}{\mu} \varpi_0 x_1 + \frac{\mu_2}{\mu} \varpi_0 x_2 + \dots + \frac{\mu_n}{\mu} \varpi_0 x_n = \varpi_0 y - p + C, \\ \frac{\mu_1}{\mu} \Pi x_1 + \frac{\mu_2}{\mu} \Pi x_2 + \dots + \frac{\mu_n}{\mu} \Pi x_n = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \left\{ \frac{fa + \varphi a \Delta a}{fa - \varphi a \Delta a} \right\}, \end{cases}$$

où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \mu$ désignent des nombres entiers quelconques, et y est une fonction algébrique des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, de même que les coefficients dans fa et φa . Pour avoir ces formules, il suffit de supposer dans (13.) et (21.) un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \dots, y$ égales entre elles.

Pour déterminer $y, fx, \varphi x$, on aura cette équation:

$$29. (fx)^2 - (\varphi x)^2 (1 - x^2) (1 - c^2 x^2) \\ = (x^2 - x_1^2)^{\mu_1} (x^2 - x_2^2)^{\mu_2} \dots (x^2 - x_n^2)^{\mu_n} (x^2 - y^2)^\mu,$$

qui doit avoir lieu pour une valeur quelconque de x .

§. 3.

Application au cas, où deux fonctions sont données.

Pour réduire deux fonctions à une seule, il suffit de supposer dans les formules (25.):

$$n = 1.$$

Cela donne

$$fx = a_0 x + x^3, \quad \varphi x = b_0,$$

et pour déterminer les deux constantes a_0 et b_0 , on aura les deux équations:

$$a_0 x_1 + x_1^3 + b_0 \Delta x_1 = 0, \quad a_0 x_2 + x_2^3 + b_0 \Delta x_2 = 0.$$

qui donnent:

$$a_0 = \frac{x_2^3 \Delta x_1 - x_1^3 \Delta x_2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1}, \quad b_0 = \frac{x_2 x_1^3 - x_1 x_2^3}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1}.$$

Connoissant b_0 , on aura la valeur de y par la formule (23.), savoir pour $n = 1$:

$$y = \frac{b_0}{x_1 x_2},$$

donc:

$$30. y = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1},$$

ou bien en multipliant en haut et en bas par $x_1 \Delta x_2 - x_2 \Delta x_1$:

$$31. \quad y = \frac{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}{1 - c^2 x_1^2 x_2^2}.$$

Si l'on exprime a_0 et b_0 en x_1, x_2, y , on aura ces expressions très simples:

$$32. \quad b_0 = x_1 \cdot x_2 \cdot y; \quad a_0 = \frac{1}{2} \{c^2 x_1^2 x_2^2 y^2 - x_1^2 - x_2^2 - y^2\}.$$

L'expression de a_0 se tire de l'équation

$$(a_0 x + x^3) - b_0^2 (1 - x^2) (1 - c^2 x^2) = (x^2 - x_1^2) (x^2 - x_2^2) (x^2 - y^2),$$

en égalant entre eux les coefficients de x^4 dans les deux membres.

Les fonctions a_0 et y étant déterminées comme on vient de voir, les formules (25.) donneront, en faisant $n = 1$:

$$33. \quad \begin{cases} \varpi x_1 + \varpi x_2 = \varpi y + C, \\ \bar{\varpi}_0 x_1 + \bar{\varpi}_0 x_2 = \bar{\varpi}_0 y - x_1 x_2 y + C, \\ \Pi x_1 + \Pi x_2 = \Pi y - \frac{a}{2 \Delta a} \log \left\{ \frac{a_0 a + a^3 + x_1 x_2 \cdot y \Delta a}{a_0 a + a^3 - x_1 x_2 \cdot y \Delta a} \right\} + C. \end{cases}$$

Quant à la valeur du radical Δy , elle est donnée par l'équation (24.):

$$\Delta y = \frac{fy}{\varphi y} = \frac{a_0 y + y^3}{b_0},$$

c'est-à-dire:

$$34. \quad \Delta y = \frac{a_0 + y^2}{x_1 x_2}.$$

Pour réduire la différence de deux fonctions à une seule, il suffit d'échanger les signes de x_2 dans les formules précédentes. La valeur de y deviendra par là:

$$35. \quad y = \frac{x_1 \Delta x_2 - x_1 \Delta x_2}{1 - c^2 x_1^2 x_2^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 \Delta x_2 + x_2 \Delta x_1}.$$

Si dans les formules (33.) on fait x_2 égal à une constante arbitraire, on aura la condition qui doit avoir lieu entre les variables de deux fonctions, si elles doivent être réductibles l'une à l'autre. En faisant $x_2 = e, x_1 = x$, on aura:

$$36. \quad y = \frac{x \Delta e + e \Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2} \quad \text{et} \quad \varpi x = \varpi y + C.$$

En différentiant, il viendra

$$37. \quad \frac{\partial y}{\Delta y} = \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

L'intégrale complète de cette équation est donc exprimée par l'équation algébrique (36.), e étant la constante arbitraire. Parmi les intégrales particulières il y a à remarquer les suivantes:

$$1) \quad y = x, \text{ qui répond à } e = 0; \quad \Delta y = \Delta x,$$

$$2) \quad y = \pm \frac{1}{cx}, \text{ qui répond à } e = \frac{1}{c}; \quad \Delta y = \mp \frac{\Delta x}{cx^2},$$

$$3) y = \sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1-c^2x^2}\right)}, \text{ qui répond à } e=1; \Delta y = \frac{(c^2-1)x}{1-c^2x^2} \text{ et}$$

$$4) y = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{\left(\frac{1-c^2x^2}{1-x^2}\right)}, \text{ qui répond à } e = \frac{1}{c}; \Delta y = \frac{(1-c^2)x}{(1-x^2)c}.$$

§. 4.

Application au cas, où toutes les fonctions données sont égales.

Si l'on fait dans les formules (15. 25.).

$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x$; $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \dots = \Delta x$,
on aura celles-ci:

$$38. \begin{cases} \mu \varpi x = \varpi y + C, \\ \mu \varpi_0 x = \varpi_0 y - p + C, \\ \mu \Pi x = \Pi y - \frac{a}{2\Delta a} \log \left\{ \frac{fa + \varphi a \cdot \Delta a}{fa - \varphi a \cdot \Delta a} \right\} + C, \end{cases}$$

où

$$39. (fz)^2 - (\varphi z)^2 (1-z^2)(1-c^2z^2) = (z^2-x^2)^\mu (z^2-y^2),$$

z étant l'indéterminée.

La fonction y est déterminée par les équations (14. 23.):

$$40. y = -\frac{a_0}{x^\mu}, \quad y = \frac{b_0}{x^\mu}.$$

La première a lieu si $\mu = 2n-1$, la seconde si $\mu = 2n$. Les équations (13'. 22.) qui doivent déterminer les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$ se réduiront dans le cas que nous considérons à une seule, savoir

$$fx + \varphi x \cdot \Delta x = 0,$$

mais en vertu des principes du calcul différentiel, cette équation doit avoir encore lieu, en la différentiant par rapport à x seule un nombre quelconque de fois moindre que μ . On aura donc en totalité μ équations linéaires entre les μ inconnus, d'où l'on tire leurs valeurs en fonctions rationnelles de la variable x et du radical Δx . Connoissant $a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$, on aura la valeur de Δy à l'aide de l'équation:

$$\Delta y = \frac{fy}{\varphi y}.$$

On pourroit déterminer de cette sorte toutes les quantités nécessaires, mais pour mieux approfondir les propriétés de la fonction y , nous allons entamer le problème d'une autre manière, qui conduira successivement aux valeurs de y , correspondentes aux valeurs 1, 2, 3 etc. de μ .

Désignons par x_μ la valeur de y , qui répond à μ . On aura

$$\varpi x_\mu = C + \mu \varpi x,$$

donc:

mais si l'on fait

$$\varpi(x_\mu + m) = C + \varpi x_\mu + \varpi x_m,$$

$$y = \frac{x_m \Delta x_\mu + x_\mu \Delta x_m}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2},$$

on aura, en vertu de (36.):

$$\varpi x_m + \varpi x_\mu = \varpi y,$$

donc:

$$41. \quad \varpi x_{\mu+m} = C + \varpi y.$$

La valeur la plus générale de $x_{\mu+m}$, qui satisfera à cette équation est:

$$x_{\mu+m} = \frac{y \Delta e + e \Delta y}{1 - c^2 e^2 y^2},$$

où e est une constante. Pour la déterminer, soit x infiniment petit; on aura

$$x_m = mx, \quad x_\mu = \mu x, \quad x_{\mu+m} = (m + \mu)x, \quad \Delta x_m = \Delta x_\mu = 1,$$

donc:

$$y = (m + \mu)x, \quad \Delta y = 1.$$

L'équation (41.) donnera:

$$(m + \mu)x = (m + \mu)x \cdot \Delta e + e,$$

donc $e = 0$, $\Delta e = 1$ et par suite $x_{m+\mu} = y$, c'est-à-dire:

$$42. \quad x_{\mu+m} = \frac{x_\mu \Delta x_m + x_m \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

On aura de la même manière:

$$43. \quad x_{\mu-m} = \frac{x_\mu \Delta x_m - x_m \Delta x_\mu}{1 - c^2 x_m^2 x_\mu^2}.$$

La première de ces formules servira à trouver $x_{\mu+m}$, lorsqu'on connoit x_m et x_μ ; on pourra donc former successivement les fonctions

$$x_2, x_3, x_4, x_5, \dots,$$

en remarquant que $x_1 = x$, $\Delta x_1 = \Delta x$.

Si $m = 1$, on trouvera:

$$44. \quad x_{\mu+1} = x_{\mu-1} + \frac{2x_\mu \Delta x}{1 - c^2 x^2 x_\mu^2}.$$

En remarquant que

$$x_0 = x, \quad x_1 = x,$$

cette formule fait voir que x_μ est une fonction rationnelle de x , si μ est un nombre impair, et que x_μ est de la forme $p \cdot \Delta x$, où p est rationnel, si μ est un nombre pair. Dans le premier cas $\frac{\Delta x_\mu}{\Delta x}$ est rationnel et Δx_μ l'est dans le second. On voit également que x_μ s'évanouira en même tems que Δx , si μ est un nombre pair. Les quantités

$$x_{2\mu+1}, \quad \frac{\Delta x_{2\mu+1}}{\Delta x}, \quad \frac{x_{2\mu}}{\Delta x}, \quad \Delta x_{2\mu}$$

sont donc des fonctions rationnelles de x .

Si l'on multiplie entre-elles les deux formules (42. 43.) il viendra:

$$44'. \quad x_{\mu+m} \cdot x_{\mu-m} = \frac{x_{\mu}^2 - x_m^2}{1 - c^2 x_{\mu}^2 x_m^2},$$

équation, qui paroît exprimer la plus simple relation qui puisse être établie entre les fonctions x_{μ} .

En y faisant $m = \mu - 1$, on aura:

$$45. \quad x_{2\mu-1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x_{\mu}^2 - x_{\mu-1}^2}{1 - c^2 x_{\mu}^2 x_{\mu-1}^2}.$$

De même si l'on fait $m = \mu$, on aura:

$$46. \quad x_{2\mu} = \frac{2x_{\mu} \cdot \Delta x_{\mu}}{1 - c^2 x_{\mu}^4}.$$

Ces deux formules semblent être les plus commodes pour le calcul des fonctions $x_2, x_3, x_4, \dots$.

Pour trouver les expressions les plus simples de x_{μ} , supposons:

$$47. \quad x_{\mu} = \frac{p_{\mu}}{q_{\mu}}, \quad \Delta x_{\mu} = \frac{r_{\mu}}{q_{\mu}^2},$$

où p_{μ}^2, q_{μ} sont des fonctions entières de x , n'ayant pas de diviseur commun. En mettant ces valeurs dans l'équation (46.), on aura:

$$\frac{p_{2\mu}}{q_{2\mu}} = \frac{2p_{\mu} q_{\mu} \cdot r_{\mu}}{q_{\mu}^4 - c^2 p_{\mu}^4}.$$

Or il est évident que la fraction du second membre est réduite à sa plus simple expression; donc on aura séparément:

$$48. \quad p_{2\mu} = 2p_{\mu} q_{\mu} r_{\mu}; \quad q_{2\mu} = q_{\mu}^4 - c^2 p_{\mu}^4.$$

En faisant les mêmes substitutions dans l'équation (45.), on obtiendra

$$49. \quad \frac{x \cdot p_{2\mu-1}}{q_{2\mu-1}} = \frac{p_{\mu}^2 \cdot q_{\mu-1}^2 - q_{\mu}^2 \cdot p_{\mu-1}^2}{q_{\mu}^2 \cdot q_{\mu-1}^2 - c^2 p_{\mu}^2 \cdot p_{\mu-1}^2}.$$

Or je dis que la fraction du second membre est réduite à sa plus simple expression. En effet si l'on avoit pour une même valeur de x :

$$p_{\mu}^2 q_{\mu-1}^2 - q_{\mu}^2 p_{\mu-1}^2 = 0, \quad q_{\mu}^2 q_{\mu-1}^2 - c^2 p_{\mu}^2 p_{\mu-1}^2 = 0,$$

on auroit encore:

$$x_{\mu}^2 = x_{\mu-1}^2, \quad 1 - c^2 x_{\mu}^2 x_{\mu-1}^2 = 0.$$

Mais on a en général

$$x_{2\mu-1} = \frac{x_{\mu} \cdot \Delta x_{\mu-1} + x_{\mu-1} \cdot \Delta x_{\mu}}{1 - c^2 x_{\mu}^2 x_{\mu-1}^2} = \frac{x_{\mu}^2 - x_{\mu-1}^2}{x_{\mu} \Delta x_{\mu-1} - x_{\mu-1} \Delta x_{\mu}},$$

donc aussi:

$$x_{\mu} \Delta x_{\mu-1} = x_{\mu-1} \Delta x_{\mu} = 0,$$

ou bien:

$$x_{\mu}^2 \{1 - x_{\mu-1}^2\} \{1 - c^2 x_{\mu-1}^2\} = 0 = x_{\mu}^2 \{1 - x_{\mu}^2\} \{1 - c^2 x_{\mu}^2\},$$

ce qui est impossible, car on doit avoir:

$$x_\mu^2 = \pm \frac{1}{c}.$$

Cela posé, l'équation (49.) donnera:

$$50. \quad p_{2\mu-1} = \frac{1}{x} \cdot \{p_\mu^2 \cdot q_{\mu-1}^2 - q_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2\}; \quad q_{2\mu-1} = q_\mu^2 \cdot q_{\mu-1}^2 - c^2 p_\mu^2 \cdot p_{\mu-1}^2.$$

Si donc on détermine successivement les fonctions

$$p_2, q_2, p_3, q_3, p_4, q_4, \dots$$

par les équations (48. 50.), $\frac{p_\mu}{q_\mu}$ sera toujours réduit à sa plus simple expression.

On pourra faire $p_1 = x, q_1 = 1$. D'après la forme des expressions (48. 50.), il est clair que

- 1) $p_{2\mu-1}$ est une fonction entière et impaire de x du degré $(2\mu-1)^2$,
- 2) $p_{2\mu} = p' \cdot \Delta x$, où p' est une fonction entière et impaire du degré $(2\mu)^2 - 3$,
- 3) q_μ est une fonction entière et paire du degré $\mu^2 - 1$ ou μ^2 , selon que μ est impair ou pair.

Les fonctions $x_{2\mu-1}$ et $x_{2\mu}$ auront donc la forme suivante:

$$51. \quad x_{2\mu-1} = \frac{x \cdot \{A_0 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \dots + A_{(2\mu-1)^2-1} \cdot x^{(2\mu-1)^2-1}\}}{1 + A_2' x^2 + A_4' x^4 + \dots + A_{(2\mu-1)^2-1}' \cdot x^{(2\mu-1)^2-1}},$$

$$52. \quad x_{2\mu} = \frac{x \cdot \Delta x \cdot \{B_0 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + \dots + B_{4\mu^2-4} \cdot x^{(2\mu)^2-4}\}}{1 + B_2' x^2 + B_4' x^4 + \dots + B_{4\mu^2}' \cdot x^{(2\mu)^2}}.$$

On aura par exemple:

$$53. \quad x_2 = \frac{2x \Delta x}{1 - c^2 x^4}; \quad x_3 = x \cdot \frac{3 - 4(1 + c^2)x^2 + 6c^2 x^4 - c^4 x^8}{1 - bc^2 x^4 + 4c^2(1 + c^2)x^6 - 3c^4 x^8}.$$

Il est facile de voir que les coefficients $A_0, A_2, \dots, A_2', A_4', \dots, B_0, B_2, \dots, B_2', B_4', \dots$ seront des fonctions entières de c^2 . On a toujours

$$A_0 = 2\mu - 1, \quad B_0 = 2\mu \quad \text{et} \quad A_2' = B_2' = 0.$$

La fonction $x_{2\mu}$ est, comme on voit, irrationnelle; or on peut facilement trouver une fonction rationnelle y qui satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial y}{\Delta y} = 2\mu \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Une fonction de cette sorte est la suivante:

$$54. \quad y = \sqrt{\left(\frac{1 - x_{2\mu}^2}{1 - c^2 x_{2\mu}^2}\right)} = \frac{\Delta x_{2\mu}}{1 - c^2 x_{2\mu}^2},$$

car on a en vertu de (37.):

$$\frac{\partial y}{\Delta y} = \frac{\partial x_{2\mu}}{\Delta x_{2\mu}}$$

et y est rationnelle, puisque les fonctions $\Delta x_{2\mu}$ et $x_{2\mu}^2$ le sont. On verra aisément que cette fonction y aura la forme:

$$55. \quad y = \frac{1 + \alpha \cdot x^2 + \dots + \beta \cdot x^{(2\mu)^2}}{1 + \alpha' \cdot x^2 + \dots + \beta' \cdot x^{(2\mu)^2}}.$$

Pour $\mu = 1$, on aura:

$$56. \quad y = \frac{1 - 2x^2 + c^2 x^4}{1 - 2c^2 x^2 + c^2 x^4}.$$

Nous verrons dans la suite, comment les fonctions x_μ et y peuvent être décomposées en facteurs et en fractions partielles.

Nous ferons voir aussi que les équations précédentes sont toujours résolubles algébriquement par rapport à x , en sorte qu'on puisse exprimer x en x_μ à l'aide de radicaux.

Chapitre II.

Sur la relation la plus générale qui existe entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques.

Après avoir établi dans le chapitre précédent les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques, nous allons maintenant en faire d'applications au problème général, que nous nous sommes proposé. Nous ferons voir qu'on pourra en ramener la solution à celle de quelques autres plus simples.

§. 1.

Sur la forme dont l'intégrale d'une différentielle quelconque algébrique est susceptible, en supposant cette intégrale exprimable par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

Soient $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu$ un nombre quelconque de variables, liées entre elles par des équations algébriques dont le nombre est moindre que celui des variables. Soient $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ des fonctions algébriques quelconques de ces variables et supposons que la différentielle

$$y_1 \cdot \partial x_1 + y_2 \cdot \partial x_2 + \dots + y_\mu \cdot \partial x_\mu$$

soit complète et que son intégrale soit exprimable à l'aide de fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques, en sorte que l'on ait:

$$\begin{aligned} 58. \quad & \int (y_1 \partial x + y_2 \partial x_2 + \dots + y_\mu \partial x_\mu) \\ & = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu \\ & \quad + \alpha_1 \psi_1(t_1) + \alpha_2 \psi_2(t_2) + \dots + \alpha_n \psi_n(t_n), \end{aligned}$$

où $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des quantités constantes, $u, v_1, v_2, \dots, v_\nu, t_1, t_2, \dots, t_n$ des fonctions algébriques des variables $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, et $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$ des fonctions elliptiques quelconques

des trois espèces avec des modules et des paramètres quelconques. Désignons respectivement par $c_1, c_2, \dots, c_n$ les modules de ces fonctions, et faisons pour abréger:

$$58. \pm \sqrt{[(1-x^2)(1-c_m^2 x^2)]} = \Delta_m x,$$

en sorte qu'on ait en général:

$$59. \psi_m x = \int \frac{\theta' \cdot \partial x}{\Delta_m x},$$

où θ est une fonction rationnelle de x^2 de l'une des trois formes:

$$1; x^2; \frac{1}{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

selon que $\psi_m x$ est une fonction de la première, de la seconde ou de la troisième espèce. Nous pourrions même supposer que θ' soit une fonction rationnelle quelconque de x .

On pourra regarder un certain nombre des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ comme variables indépendantes. Supposons que les m premières

$$60. x_1, x_2, x_3, \dots, x_m,$$

le soient: dans ce cas toutes les quantités:

$$61. x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_\mu, t_1, t_2, \dots, t_n, u, v_1, v_2, \dots, v_\nu; y_1, y_2, \dots, y_\mu$$

seront des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Cela posé, imaginons une fonction algébrique θ telle qu'on puisse exprimer toutes les fonctions:

$$62. u, v_1, v_2, \dots, v_\nu; t_1, t_2, \dots, t_n, \Delta_1(t_1), \Delta_2(t_2), \dots, \Delta_n(t_n)$$

rationnellement en

$$63. \theta, x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu, y_1, y_2, y_3, \dots, y_\mu.$$

Il existera une infinité de fonctions θ qui jouiront de cette propriété. Une telle fonction sera p. ex. la somme de toutes les fonctions (62.), multipliées chacune par un coefficient indéterminé et constant. Cela est facile de démontrer par la théorie des équations algébriques. La quantité θ , étant une fonction algébrique des variables $x_1, x_2, \dots$, pourra donc satisfaire à une équation algébrique, dans laquelle tous les coefficients sont des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \dots$. Or au lieu de supposer ces coefficients rationnels en $x_1, x_2, \dots$, nous les supposerons rationnels en

$$64. x_1, x_2, x_3, \dots, x_\mu, y_1, y_2, y_3, \dots, y_\mu.$$

Cette supposition admise, on simplifiera beaucoup le raisonnement.

Soit donc

$$65. \quad V = 0$$

l'équation en θ , désignons son degré par δ et supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible, que la fonction θ puisse être racine d'une autre équation de la même forme, mais dont le degré est moindre que δ .

Imaginons maintenant qu'on différencie l'équation (57.) par rapport aux variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_m$. Il est facile de voir, que la différentielle qu'on trouve sera de la forme

$$66. \quad p_1 \cdot \partial x_1 + p_2 \cdot \partial x_2 + \dots + p_m \cdot \partial x_m = 0,$$

où $p_1, p_2, \dots, p_m$ seront des fonctions rationnelles des quantités $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_\mu, y_1, y_2, \dots, y_\mu, u, v_1, v_2, v_3, \dots, v_\nu, t_1, t_2, \dots, t_3, \dots, t_n, \Delta_1(t_1), \Delta_2(t_2), \dots, \Delta_n(t_n)$.

Donc en introduisant la fonction θ ; $p_1, p_2, \dots, p_m$ deviendront des fonctions rationnelles de

$$67. \quad \theta, x_1, x_2, \dots, x_\mu, y_1, y_2, \dots, y_\mu.$$

Cela posé, l'équation (66.) donnera séparément

$$68. \quad p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 0, \dots, p_m = 0,$$

et il est clair que si ces équations sont satisfaites, l'équation proposée (57.) le sera également. Maintenant les équations (68.) sont autant d'équations en θ de la même forme que $V = 0$, ou pourront aisément être réduites à cette forme; mais suivant l'hypothèse $V = 0$ est une équation irréductible en θ , donc il suit d'un théorème connu, que toutes les équations (68.) seront encore satisfaites, en mettant au lieu de θ une quelconque des racines de l'équation $V = 0$. Donc l'équation (57.) aura lieu quelle que soit la valeur de θ , pourvu qu'elle satisfasse à $V = 0$.

Désignons par

$$69. \quad \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\delta$$

les racines de l'équation $V = 0$ et par

$$70. \quad u', u'', \dots, u^{(\delta)}; v'_m, v''_m, \dots, v^{(\delta)}_m; t'_m, t''_m, \dots, t^{(\delta)}_m$$

les valeurs correspondantes des fonctions u, v_m, t_m . L'équation (57.), en substituant dans le second membre les expressions des quantités $u, v_1, v_2, \dots, t_1, t_2, \dots$, donnera $\Delta(t_1), \Delta(t_2), \dots$ en fonctions rationnelles de $\theta, x_1, x_2, \dots, x_\mu, y_1, y_2, \dots, y_\mu$; substituant ensuite au lieu de θ successivement les δ valeurs $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\delta$, l'équation (57.) donnera, dis-je, δ équations semblables qui, ajoutées ensemble, conduiront à celle-ci:

$$71. \quad \left\{ \begin{aligned} &\delta \cdot f(y_1 \partial x_1 + y_2 \partial x_2 + \dots + y_\mu \partial x_\mu) = u' + u'' + \dots + u^{(\delta)} \\ &+ A_1 \cdot \{\log v'_1 + \log v''_1 + \dots + \log v^{(\delta)}_1\} + \dots + A_n \cdot \{\log v'_\nu + \log v''_\nu + \dots + \log v^{(\delta)}_\nu\} \\ &+ \alpha_1 \cdot \{\psi_1(t'_1) + \psi_1(t''_1) + \dots + \psi_1(t^{(\delta)}_1)\} + \dots + \alpha_n \cdot \{\psi_n(t'_n) + \psi_n(t''_n) + \dots + \psi_n(t^{(\delta)}_n)\}. \end{aligned} \right.$$

Le second membre de cette équation pourra encore être réduit à une forme beaucoup plus simple. Considérons d'abord sa partie algébrique

$$72. \quad u' + u'' + \dots + u^{(\delta)} = U.$$

Cette fonction est exprimée rationnellement en

$$x_1, x_2, \dots, x_\mu, y_1, y_2, \dots, y_\mu, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\delta,$$

mais elle est en même tems symétrique par rapport à $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\delta$, donc en vertu d'un théorème connu des fonctions symétriques et rationnelles, on pourra exprimer la fonction U rationnellement en

$$73. \quad x_1, x_2, \dots, x_\mu, y_1, y_2, \dots, y_\mu$$

et par les coefficients de l'équation $V=0$; mais ceux-ci sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des quantités (73.), donc la fonction U le sera également.

Soit maintenant

$$74. \quad \log V_m = \log v'_m + \log v''_m + \dots + \log v_m^{(\delta)},$$

on aura

$$V_m = v'_m \cdot v''_m \cdot \dots \cdot v_m^{(\delta)},$$

donc la fonction V_m est aussi une fonction rationnelle des quantités (73. 69.) et symétrique par rapport à $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\delta$; donc on démontrera de la même manière, que V_m pourra s'exprimer rationnellement par les quantités (73.) seules.

Il reste à considérer la partie elliptique de l'équation (71.); or d'après les formules du chapitre précédent, on pourra toujours faire

$$75. \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_m(t'_m) + \psi_m(t''_m) + \dots + \psi_m(t_m^{(\delta)}) \\ = \psi_m(T_m) + p + B_1 \log q_1 + B_2 \log q_2 + \dots + B_r \log q_r \end{array} \right.$$

où toutes les quantités

$$76. \quad T_m, \Delta_m(T_m), p, q_1, q_2, \dots, q_r$$

sont des fonctions rationnelles des fonctions

$$t'_m, t''_m, \dots, t_m^{(\delta)}, \Delta_m(t'_m), \Delta_m(t''_m), \dots, \Delta_m(t_m^{(\delta)});$$

or celles-ci sont des fonctions rationnelles des quantités (69. 73.), et il est clair qu'elles seront symétriques par rapport à $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\delta$, donc enfin on pourra exprimer les fonctions (76.) rationnellement par les quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu; y_1, y_2, \dots, y_\mu$.

En vertu de ce que nous allons de voir, on pourra donc mettre le second membre de l'équation (71.) sous la forme:

$$\begin{aligned} & r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \dots + A^{(k)} \log \varrho^{(k)} \\ & + \alpha_1 \cdot \psi_1(T_1) + \alpha_2 \cdot \psi_2(T_2) + \dots + \alpha_n \cdot \psi_n(T_n). \end{aligned}$$

Donc nous sommes parvenu à ce théorème général:

Théorème II. Si une intégrale quelconque de la forme

$$f(y_1 \partial x_1 + y_2 \partial x_2 + \dots + y_\mu \partial x_\mu),$$

où $y_1, y_2, \dots, y_\mu$ sont des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, liées entre-elles par un nombre quelconque d'équations algébriques, peut être exprimée par des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques de sorte qu'on ait:

$$f(y_1 \partial x_1 + y_2 \partial x_2 + \dots + y_\mu \partial x_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu \\ + \alpha_1 \psi_1(t_1) + \alpha_2 \psi_2(t_2) + \dots + \alpha_n \psi_n(t_n),$$

où $A_1, A_2, \dots, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont des constantes; $u, v_1, v_2, \dots, t_1, t_2, \dots$ des fonctions algébriques de $x_1, x_2, \dots$ et $\psi_1, \psi_2, \dots$ des fonctions elliptiques quelconques; on pourra toujours exprimer cette intégrale de la manière suivante:

$$\delta \cdot f(y_1 \partial x_1 + y_2 \partial x_2 + \dots + y_\mu \partial x_\mu) = r + A' \log \xi' + A'' \log \xi'' + \dots + A^{(k)} \log \xi^{(k)} \\ + \alpha_1 \cdot \psi_1(\theta_1) + \alpha_2 \cdot \psi_2(\theta_2) + \dots + \alpha_n \cdot \psi_n(\theta_n),$$

δ étant un nombre entier; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les mêmes que dans l'équation; $A', A'', \dots$ des constantes, et

$$\theta_1; \Delta_1(\theta_1); \theta_2; \Delta_2(\theta_2); \dots, \theta_n; \Delta_n(\theta_n); r, \xi', \xi'', \dots, \xi^{(k)}$$

des fonctions rationnelles des quantités:

$$x_1, x_2, \dots, x_\mu; y_1, y_2, \dots, y_\mu.$$

Ce théorème a non seulement beaucoup d'importance dans la solution de notre problème général; mais il est encore le fondement de tout ce qui concerne l'application des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques à la théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques. J'en ai tiré un grand nombre de résultats nouveaux et généraux que je soumettrai au jugement des géomètres dans une autre occasion.

Comme corollaire de ce théorème il y a à remarquer le suivant:

Théorème III. Si une intégrale de la forme

$$f(y_1 \partial x_1 + y_2 \partial x_2 + \dots + y_\mu \partial x_\mu)$$

peut être exprimée par une fonction algébrique et logarithmique de la forme

$$u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu,$$

on pourra toujours supposer que $u, v_1, v_2, \dots, v_\nu$ soient des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \dots, x_\mu, y_1, y_2, \dots, y_\mu$. Si donc on a l'intégrale $\int y \partial x$, où y est liée à x par une équation algébrique quelconque, on pourra supposer que u, v_1, v_2 etc. soient des fonctions rationnelles de y et x^*).

*) J'ai fondé sur ce théorème une nouvelle théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques, que je n'ai pu encore publier jusqu'à présent. Cette théorie franchit beaucoup les ré-

§. 2.

Application du théorème du paragraphe précédent à la relation générale qui existe entre des fonctions algébriques, logarithmiques et elliptiques.

On peut tirer immédiatement du théorème général démontré dans le paragraphe précédent, plusieurs propositions importantes, relatives à la théorie des fonctions elliptiques.

Soit

77. $\alpha_1 \psi_1(x_1) + \alpha_2 \psi_2(x_2) + \dots + \alpha_\mu \psi_\mu(x_\mu) = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu$,
une relation quelconque entre les fonctions elliptiques

$$\psi_1 x_1, \psi_2 x_2, \dots, \psi_\mu x_\mu,$$

dont les modules sont respectivement $c_1, c_2, \dots, c_\mu$. Si pour abréger on fait $\pm \sqrt{[(1-x^2)(1-c_m^2 x^2)]} = \Delta_m x$, le premier membre sera la même chose que

$$\int \left\{ \frac{\alpha_1 \cdot r_1}{\Delta_1 x_1} \cdot \partial x_1 + \frac{\alpha_2 \cdot r_2}{\Delta_2 x_2} \cdot \partial x_2 + \dots + \frac{\alpha_\mu \cdot r_\mu}{\Delta_\mu x_\mu} \cdot \partial x_\mu \right\},$$

où $r_1, r_2, \dots, r_\mu$ seront respectivement des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \dots, x_\mu$. Donc en vertu du théorème III. on pourra énoncer le suivant:

Théorème IV. Si l'équation (77.) a lieu en supposant que $u, v_1, v_2, \dots, v_\nu$ soient des fonctions algébriques des quantités $x_1, x_2, \dots, x_\mu$: on pourra toujours, sans diminuer la généralité, supposer, que $u, v_1, v_2, \dots, v_\nu$ soient exprimées rationnellement

$$\text{en } x_1, x_2, \dots, x_\mu, \Delta_1 x_1, \Delta_2 x_2, \dots, \Delta_\mu x_\mu.$$

En écrivant l'équation générale (77.) de cette manière:

$$78. \int \left\{ \frac{\alpha_1 r_1 \partial x_1}{\Delta_1 x_1} + \frac{\alpha_2 r_2 \partial x_2}{\Delta_2 x_2} + \dots + \frac{\alpha_m r_m \partial x_m}{\Delta_m x_m} \right\} \\ = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu - \alpha_{m+1} \psi_{m+1} x_{m+1} - \dots - \alpha_\mu \psi_\mu x_\mu,$$

on aura en vertu du théorème II. le suivant:

Théorème V. Si l'équation (77.) a lieu, on en pourra toujours tirer une autre de la forme:

$$79. \delta \alpha_1 \psi_1 x_1 + \delta \alpha_2 \psi_2 x_2 + \dots + \delta \alpha_m \psi_m x_m + \alpha_{m+1} \psi_{m+1} \theta_1 + \dots + \alpha_\mu \psi_\mu \theta_{\mu-m} \\ = r + A' \log \varrho' + A'' \log \varrho'' + \dots + A^{(k)} \log \varrho^{(k)},$$

sultats connus, et son but est d'opérer toutes les réductions possibles des intégrales des formules algébriques, à l'aide des fonctions algébriques et logarithmiques. On parvient par là à réduire au plus petit nombre possible les intégrales qui représentent sous une forme finie toutes les intégrales d'une même classe.

δ étant un nombre entier et les quantités

$$\theta_1, \Delta_{m+1}\theta_1, \theta_2, \Delta_{m+2}\theta_2, \dots, \theta_{\mu-m}\Delta_{\mu}\theta_{\mu-m}, \\ r, \varrho', \varrho'', \dots, \varrho^{(k)}$$

des fonctions rationnelles de

$$x_1, x_2, \dots, x_m, \Delta_1x_1, \Delta_2x_2, \dots, \Delta_mx_m.$$

On aura encore comme corollaire:

Théorème VI. Si une relation quelconque entre les fonctions elliptiques $\psi_1x_1, \psi_2x_2, \dots, \psi_{\mu}x_{\mu}$ des trois espèces a la forme exprimée par l'équation (77.), on en tirera une autre de la forme:

$$80. \delta\alpha_m\psi_mx = -\alpha_1\psi_1\theta_1 - \alpha_2\psi_2\theta_2 - \dots - \alpha_{m-1}\psi_{m-1}\theta_{m-1} \\ - \alpha_{m+1}\psi_{m+1}\theta_{m+1} - \dots - \alpha_{\mu}\psi_{\mu}\theta_{\mu} \\ + r + A'\log\varrho' + A''\log\varrho'' + \dots + A^{(k)}\log\varrho^{(k)},$$

δ étant un nombre entier et toutes les quantités

$$\theta_1, \Delta_1\theta_1; \theta_2, \Delta_2\theta_2; \dots, r, \varrho', \varrho'', \dots$$

des fonctions rationnelles de la variable x et du radical correspondant Δ_mx . Toutes ces fonctions pourront donc se mettre sous la forme:

$$p + q\Delta_mx,$$

où p et q sont des fonctions rationnelles de x seul.

Voilà le théorème qui nous conduira, comme nous le verrons plus bas, à la solution de notre problème.

Si l'on suppose toutes les variables $x_1, x_2, \dots, x_{\mu}$ égales entre elles et à x , et les fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{\mu}$ ayant le même module, que nous désignerons par c , le premier membre de l'équation (77.) sera la même chose que $\int \frac{r\partial x}{\Delta x}$, où r est une fonction rationnelle de x ; donc en vertu du théorème II. on pourra énoncer le suivant

Théorème VII. Si entre les fonctions $\varpi x, \varpi_0 x, \Pi_1 x, \Pi_2 x, \dots, \Pi_{\mu} x$, où $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{\mu}$ désignent des fonctions de la troisième espèce, avec des paramètres quelconques, mais avec le même module c qu'ont les deux fonctions de la première et de la seconde espèce ϖx et $\varpi_0 x$, il existe une relation quelconque de la forme:

$$81. \begin{cases} \alpha\varpi x + \alpha_0\varpi_0 x + \alpha_1\Pi_1 x + \alpha_2\Pi_2 x + \dots + \alpha_{\mu}\Pi_{\mu} x \\ = u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \dots + A_r\log v_r, \end{cases}$$

on pourra toujours supposer que les quantités

$$u, v_1, v_2, \dots, v_r$$

soient de la forme $p + q\Delta x$, où p et q sont des fonctions rationnelles de x seul.

Ce théorème est encore d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Nous en développerons dans le chapitre IV. des conséquences importantes pour notre objet.

§. 3.

Réduction du problème général.

Reprenons la formule du théorème VI. En la différentiant, le résultat sera de la forme:

$$P + Q \Delta_m x,$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x ; donc on aura séparément $P=0$, $Q=0$, donc encore $P-Q.\Delta_m x=0$, c. à d. la formule (80.) aura lieu en faisant varier le signe du radical $\Delta_m x$. Or en désignant par $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ etc. les valeurs correspondantes de $\theta_1, \theta_2, \dots$, cela donne

$$-\delta \alpha_m . \psi_m x = -\Sigma \alpha . \psi \theta' + v',$$

où pour abrégé nous avons mis le signe de sommation Σ ; v' étant la partie algébrique et logarithmique. En retranchant cette équation de (80.), on trouvera

$$82. \quad 2\delta \alpha_m . \psi_m x = \Sigma \alpha \{ \psi \theta' - \psi \theta \} + v - v'.$$

Cela posé, désignons par c le module de la fonction ψ et par Δx la fonction $\pm \sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}$; on aura, selon ce qu'on a vu dans le chapitre I. (35.):

$$\psi \theta' - \psi \theta = \psi y - v'',$$

en faisant

$$y = \frac{\theta' \Delta \theta - \theta \Delta \theta'}{1 - c^2 \theta^2 \theta'^2},$$

v'' étant une expression algébrique et logarithmique.

Soient maintenant

$$\theta = p + q \Delta_m x, \quad \Delta \theta = r + \varrho \Delta_m x,$$

où p, q, r, ϱ sont des fonctions rationnelles de x . En changeant le signe du radical $\Delta_m x$, on aura les valeurs de θ' et $\Delta \theta'$, savoir

$$\theta' = p - q \Delta_m x, \quad \Delta \theta' = r - \varrho \Delta_m x.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de y , il est clair que cette fonction prendra la forme:

$$83. \quad y = t . \Delta_m x,$$

où t est rationnel en x . En vertu de la formule (34.) on voit que Δy sera aussi rationnel en x .

Si maintenant on fait

$$z = \frac{y \Delta e + e \Delta y}{1 - c^2 e^2 y^2},$$

où e est constant, on aura encore :

$$\psi y = \psi z + v''',$$

donc :

$$\psi \theta' - \psi \theta = \psi z + v_1.$$

Or je dis qu'on pourra faire ensorte que z soit une fonction rationnelle de x . En effet il suffit pour cela, d'attribuer à la constante e une valeur qui fait $\Delta e = 0$.

Soit par exemple $e = 1$, on aura

$$84. \quad z = \frac{\Delta y}{1 - c^2 y^2} \text{ et de là } \Delta z = \frac{c^2 - 1}{1 - c^2 y^2} \cdot y,$$

mais y^2 et Δy , comme nous venons de voir, sont des fonctions rationnelles de x : donc z le sera également.

La formule (82.) prendra donc la forme suivante :

$$85. \quad 2\delta \alpha_m \cdot \psi_m x = \Sigma a \psi z + V,$$

où V est une fonction algébrique et logarithmique, qui en vertu du théorème II. pourra se mettre sous la forme :

$$u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots$$

toutes les quantités $u, v_1, v_2, \dots$ étant de la forme $p + q \cdot \Delta_m x$.

En développant le second membre de l'équation (85.), on aura aussi la formule :

$$86. \quad \begin{cases} 2\delta \alpha_m \cdot \psi_m x = \alpha_1 \cdot \psi_1 z_1 + \alpha_2 \cdot \psi_2 z_2 + \dots + \alpha_{m-1} \cdot \psi_{m-1} z_{m-1} \\ \quad + \alpha_{m+1} \cdot \psi_{m+1} z_{m+1} + \dots + \alpha_\mu \cdot \psi_\mu z_\mu + V, \end{cases}$$

où en vertu des deux équations (84. 83.) toutes les quantités

$$z_1, \frac{\Delta_1 z_1}{\Delta_m x}; \quad z_2, \frac{\Delta_2 z_2}{\Delta_m x}; \quad z_3, \frac{\Delta_3 z_3}{\Delta_m x}; \quad \dots \quad z_\mu, \frac{\Delta_\mu z_\mu}{\Delta_\mu x}$$

sont des fonctions rationnelles de la variables x . Cette formule est donc une suite nécessaire de la formule générale (77.) Il faut faire attention que δ est un nombre entier et que les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ sont précisément les mêmes dans les deux formules. C'est une remarque essentielle.

A l'aide de la formule (86.) on pourra maintenant réduire la formule générale (77.) à une autre plus simple. En effet, en éliminant la fonction ψ_m entre ces deux équations, on trouvera une équation de la même forme que la proposée, mais qui contiendra un nombre moindre

de fonctions elliptiques. Faisons $m = \mu$ et mettons x_μ pour x dans la formule (86.). On aura:

$$2\delta\alpha_\mu \cdot \psi_\mu x_\mu = \alpha_1 \cdot \psi z_1 + \alpha_2 \cdot \psi z_2 + \dots + \alpha_{\mu-1} \cdot \psi z_{\mu-1} + V.$$

En éliminant la fonction $\psi_\mu x_\mu$ entre les deux équations il viendra:

$$87. \alpha_1 \{2\delta\psi_1 x_1 - \psi z_1\} + \alpha_2 \{2\delta\psi_2 x_2 - \psi z_2\} + \dots + \alpha_{\mu-1} \{2\delta\psi_{\mu-1} x_{\mu-1} - \psi z_{\mu-1}\} = V'.$$

Mais 2δ étant un nombre entier, on pourra, en vertu de ce que nous avons vu dans le chapitre précédent, trouver des fonctions algébriques $x'_1, x'_2, \dots, x'_{\mu-1}$ telles que

$$2\delta\psi_1 x_1 - \psi z_1 = \psi_1 x'_1 + V_1,$$

$$2\delta\psi_2 x_2 - \psi z_2 = \psi_2 x'_2 + V_2$$

etc.

donc la formule (87.) donnera celle-ci:

$$88. \begin{cases} \alpha_1 \psi_1 x'_1 + \alpha_2 \psi_2 x'_2 + \dots + \alpha_{\mu-1} \psi_{\mu-1} x'_{\mu-1} = \\ u' + A'_1 \log v'_1 + A'_2 \log v'_2 + \dots + A'_{\nu'} \log v'_{\nu'}. \end{cases}$$

Cette équation a précisément la même forme que l'équation proposée; seulement elle ne contient la fonction ψ_μ . On pourra la traiter de la même manière et en chasser une des fonctions, par exemple $\psi_{\mu-1}$. En continuant ainsi, on parviendra enfin à une équation qui ne contiendra que des fonctions algébriques et logarithmiques, et qui ne présentera plus de difficulté. On voit donc que le problème général pourra être réduit à celui-ci:

Satisfaire de la manière la plus générale à l'équation

$$89. \begin{cases} \psi x = \beta_1 \psi_1 y_1 + \beta_2 \psi_2 y_2 + \dots + \beta_n \psi_n y_n \\ + u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_\nu \log v_\nu, \end{cases}$$

où $\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ désignent des fonctions elliptiques des trois espèces, et en supposant que

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

soient des fonctions rationnelles de x ; et que $\Delta_1 y_1, \Delta_2 y_2, \dots, \Delta_n y_n$ soient de la forme $p \cdot \Delta x$, où p est rationnelle en x , et Δx le radical dans la fonction ψx .

Soient

$$\Delta_1 y_1 = p_1 \cdot \Delta x, \Delta_2 y_2 = p_2 \cdot \Delta x, \dots, \Delta_n y_n = p_n \cdot \Delta x.$$

Supposons que ces équations soient satisfaites, et soit

$$\psi x = \int \frac{\theta x \partial x}{\Delta x}, \psi_1 x = \int \frac{\theta_1 x \partial x}{\Delta_1 x}, \dots, \psi_n x = \int \frac{\theta_n x \partial x}{\Delta_n x},$$

où $\theta x, \theta_1 x, \dots, \theta_n x$ seront toujours des fonctions rationnelles suivant

la nature des fonctions $\psi, \psi_1, \dots, \psi_n$, on aura :

$$\psi_m y_m = \int \frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\Delta x};$$

or $\frac{\theta_m y_m}{p_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x}$ est une fonction rationnelle de x , donc l'intégrale du second membre pourra être réduite à la forme :

$$\psi_m y_m = A \varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi'(x, a') + A'' \Pi''(x, a'') + \dots,$$

où r est une expression algébrique et logarithmique. En transformant toutes les fonctions $\psi x, \psi_1 y_1, \psi_2 y_2, \dots$ de cette manière, l'équation (87.) prendra cette forme :

$$90. \begin{cases} A \varpi x + A_0 \varpi_0 x + \alpha_1 \Pi(x, a_1) + \alpha_2 \Pi(x, a_2) + \dots + \alpha_\mu \Pi(x, a_\mu) \\ = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots \end{cases}$$

En vertu de ce que nous venons de voir il est clair que la solution du problème (89.) pourra être réduite à celle des suivants :

Problème A. Trouver tous les cas possibles où l'on peut satisfaire à l'équation :

$$91. (1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = p^2(1 - x^2)(1 - c^2 x^2),$$

en supposant y et p fonctions rationnelles de l'indéterminée x et c et c' étant des constantes.

Problème B. L'équation (91.) étant satisfaite, réduire les trois fonctions :

$$\varpi(y, c'), \varpi_0(y, c'), \Pi(y, c', a)$$

à la forme :

$$r + A \varpi x + A_0 \varpi_0 x + A' \Pi(x, a') + A'' \Pi(x, a'') + \dots$$

où r est une expression algébrique et logarithmique.

Problème C. Trouver la relation la plus générale entre les fonctions qui ont le même module et la même variable, c'est-à-dire : trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour exprimer une fonction de la forme :

$$\alpha \varpi x + \alpha_0 \varpi_0 x + \alpha_1 \Pi'(x, a_1) + \alpha_2 \Pi'(x, a_2) + \dots,$$

par des fonctions algébriques et des logarithmes.

La solution complète de ces trois problèmes sera l'objet principal de nos recherches ultérieures. Nous allons commencer par le dernier qui est le plus simple.

Chapitre III.

Relation la plus générale entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques de la même variable et du même module; ou solution du problème C.

Soient comme précédemment

$$\Delta x = \pm \sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)},$$

ϖx , $\varpi_0 x$ les fonctions elliptiques de deux premières espèces et $\Pi' \alpha_1$, $\Pi' \alpha_2$, ... $\Pi' \alpha_\mu$ des fonctions de la troisième espèce, ayant pour paramètres α_1 , α_2 , ... α_μ , ensorte que

$$\varpi x = \int \frac{\partial x}{\Delta x}, \quad \varpi_0 x = \int \frac{x^2 \partial x}{\Delta x}, \quad \Pi' \alpha_m = \int \frac{\partial x}{\left(1 - \frac{x^2}{\alpha_m^2}\right) \Delta x}.$$

Cela posé, il s'agit de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation:

$$92. \quad \begin{cases} \beta_0 \varpi x + \beta_1 \varpi_0 x + \beta_1 \Pi' \alpha_1 + \beta_2 \Pi' \alpha_2 + \dots + \beta_n \Pi' \alpha_n \\ = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \dots + A_r \log v_r. \end{cases}$$

En vertu du théorème on peut supposer que u , v_1 , v_2 , ... v_r soient de la forme $p + q \Delta x$, où p et q sont rationnels en x .

Nous supposons, ce qui est permis, qu'il soit impossible de trouver une relation semblable, qui ne contenoit toutes les fonctions:

$$\Pi' \alpha_1; \Pi' \alpha_2; \dots \Pi' \alpha_n.$$

Nous supposons encore qu'aucun des paramètres α_1 , α_2 , ... α_n ne soit égal à ± 1 ou à $\pm \frac{1}{c^2}$; car dans le cas contraire on pourroit, comme on sait, réduire la fonction correspondante de la troisième espèce aux fonctions ϖx et $\varpi_0 x$.

Cela posé désignons le premier membre de l'équation (92.) par ψx et le second par $u + \sum A \log v$. On aura donc

$$93. \quad \psi x = u + \sum A \log v.$$

Il est clair, que cette équation aura lieu encore si le radical Δx change de signe. Donc en désignant par u' et v' les valeurs correspondantes de u et v , on aura:

$$-\psi x = u' + \sum A \log v'.$$

Cela donne

$$2\psi x = u - u' + \sum A \log \left\{ \frac{v}{v'} \right\}.$$

Mettons ici $-x$ au lieu de $+x$, on pourra supposer que Δx reste invariable; la fonction ψx changera de signe et par conséquent on aura, en

désignant par u'' , u''' , v'' , v''' les valeurs correspondantes de u , u' , v , v' :

$$-2\psi x = u'' - u''' + \sum A \log \left\{ \frac{v''}{v'''} \right\}.$$

De là on tire:

$$\psi x = \frac{1}{4}(u - u' - u'' + u''') + \frac{1}{4} \sum A \log \left\{ \frac{v \cdot v'''}{v' \cdot v''} \right\}.$$

Soit

$$v = p + qx + (p' + q'x) \Delta x,$$

où p , q , p' , q' sont des fonctions paires, on aura:

$$v' = p + qx - (p' + q'x) \Delta x,$$

$$v'' = p - qx + (p' - q'x) \Delta x,$$

$$v''' = p - qx - (p' - q'x) \Delta x,$$

donc:
$$v \cdot v''' = p^2 - q^2 x^2 - (p'^2 - q'^2 x^2) \Delta^2 x + 2x(pq' - qp') \Delta x,$$

$$v' \cdot v'' = p^2 - q^2 x^2 - (p'^2 - q'^2 x^2) \Delta^2 x - 2x(pq' - qp') \Delta x,$$

par conséquent on aura:

$$\frac{v \cdot v'''}{v' \cdot v''} = \frac{fx + qx \cdot \Delta x}{fx - qx \cdot \Delta x},$$

où fx et qx seront des fonctions entières, dont l'une est paire et l'autre impaire. Nous supposons, ce qui est permis, qu'elles n'ont pas de diviseur commun.

La partie algébrique $\frac{1}{4}(u - u' + u''' - u'')$ est évidemment de la forme $r \cdot \Delta x$, où r est une fonction impaire de x . En écrivant A au lieu de $\frac{1}{4}A$, l'expression de ψx prendra la forme suivante:

$$94. \quad \psi x = r \Delta x + \sum A \log \left\{ \frac{fx + qx \cdot \Delta x}{fx - qx \cdot \Delta x} \right\}.$$

Quant aux coefficients $A_1, A_2, \dots, A_\nu$, nous pourrions supposer, qu'ils soit impossible d'avoir entre eux une relation de cette forme:

$$95. \quad m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_\nu A_\nu = 0,$$

où $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ sont des nombres entiers. En effet, si cette équation avoit lieu, on auroit:

$$\sum A \log v = \frac{1}{m_\nu} \left\{ A_1 \log \left(\frac{v_1^{m_\nu}}{v_1^{m_1}} \right) + A_2 \log \left(\frac{v_2^{m_\nu}}{v_2^{m_2}} \right) + \dots + A_{\nu-1} \log \left(\frac{v_{\nu-1}^{m_\nu}}{v_{\nu-1}^{m_{\nu-1}}} \right) \right\}.$$

c'est-à-dire:

$$\sum A \log v = A'_1 \log v'_1 + A'_2 \log v'_2 + \dots + A'_{\nu-1} \log v'_{\nu-1},$$

où le second membre contient un nombre moindre de logarithmes que le premier. On pourra donc répéter cette réduction jusqu'à ce qu'une équation telle que (95.) est impossible. Cela posé, il faut prendre la différentielle des deux membres et comparer entre elles les fonctions algébriques qui en résultent.

Considérons d'abord la partie logarithmique du second membre de la formule (94.). Soit pour abréger :

$$96. \quad \varphi = \log \left\{ \frac{fx + \varphi x \cdot \Delta x}{fx - \varphi x \cdot \Delta x} \right\},$$

on aura, en différenciant, un résultat de la forme :

$$97. \quad \partial \varphi = \frac{v \cdot \partial x}{\{(fx)^2 - (\varphi x)^2 \Delta^2 x\} \Delta x},$$

où v est une fonction paire et entière de x , savoir :

$$98. \quad v = 2 \cdot (fx \cdot \varphi' x - \varphi x \cdot f' x) \Delta^2 x - 2fx \cdot \varphi x \cdot \{(1 + c^2)x - 2c^2 x^3\}.$$

En faisant :

$$99. \quad \theta x = (fx)^2 - (\varphi x)^2 (\Delta x)^2,$$

on pourra aussi mettre v sous cette forme :

$$100. \quad v \varphi x = 2f' x \cdot \theta x - fx \cdot \theta' x,$$

équation facile à vérifier.

Cela posé, décomposons la fonction entière θx en facteurs de la forme $(x^2 - a^2)^m$, et faisons en conséquence :

101. $(fx)^2 - (\varphi x)^2 (\Delta x)^2 = (x^2 - a_1^2)^{m_1} (x^2 - a_2^2)^{m_2} \dots (x^2 - a_\mu^2)^{m_\mu} = \theta x$.
L'équation (100.) fait voir que si θx a le facteur $(x^2 - a^2)^m$, v aura nécessairement celui $(x^2 - a^2)^{m-1}$; donc la fonction fractionnaire $\frac{v}{\theta x}$ pourra être décomposée de la manière suivante :

$$102. \quad \frac{v}{\theta x} = t + \frac{\beta'_1}{a_1^2 - x^2} + \frac{\beta'_2}{a_2^2 - x^2} + \dots + \frac{\beta'_\mu}{a_\mu^2 - x^2},$$

où t est la partie entière, $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_\mu$ des constantes. D'abord je dis que t est une constante. En effet l'expression (98.) de v fait voir que le degré de cette fonction ne pourra jamais surpasser celui de θx . Pour trouver les coefficients $\beta'_1, \beta'_2, \dots$, soit β' l'un quelconque entre eux, correspondant au facteur $(x^2 - a^2)^m$ de θx . On aura :

$$\beta' = \frac{v(a^2 - x^2)^m}{\theta x} \text{ pour } x = a,$$

mais si l'on fait

$$\theta x = R \cdot (a^2 - x^2)^m,$$

on aura en vertu de (100.):

$$\frac{v(a^2 - x^2)^m}{\theta x} = \frac{2 \cdot f' x}{\varphi x} (a^2 - x^2) - \frac{fx}{\varphi x} \cdot \frac{\partial R}{R \cdot \partial x} (a^2 - x^2) + 2mx \cdot \frac{fx}{\varphi x},$$

donc en faisant $x = a$:

$$\beta' = 2ma \cdot \frac{fa}{\varphi a}.$$

Or on a

$$(fa)^2 - (\varphi a)^2 (\Delta a)^2 = 0,$$

donc :

$$fa + \phi a . \Delta a = 0,$$

et par suite :

$$\beta' = -2ma . \Delta a.$$

On a donc :

$$103. \quad \frac{v}{\theta x} = k - \frac{2m_1 a_1 \Delta a_1}{a_1^2 - x^2} - \frac{2m_2 a_2 \Delta a_2}{a_2^2 - x^2} - \dots - \frac{2m_\mu a_\mu \Delta a_\mu}{a_\mu^2 - x^2}.$$

En multipliant par $\frac{\partial x}{\Delta x}$, on aura la valeur de $\partial \rho$. La formule (94.) donnera donc, en différentiant :

$$\begin{aligned} \beta + \beta_0 x^2 + \frac{\alpha_1^2 \beta_1}{\alpha_1^2 - x^2} + \frac{\alpha_2^2 \beta_2}{\alpha_2^2 - x^2} + \dots + \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\alpha_n^2 - x^2} &= \frac{\partial r}{\partial x} . \Delta^2 x - 2r \{ (1+c^2)x - 2c^2 x^3 \} \\ &+ A_1 . \left\{ k_1 - \frac{2m_1 a_1 \Delta a_1}{a_1^2 - x^2} - \frac{2m_2 a_2 \Delta a_2}{a_2^2 - x^2} - \dots \right\} \\ &+ A_2 . \left\{ k_2 - \frac{2m'_1 a'_1 \Delta a'_1}{a_1'^2 - x^2} - \frac{2m'_2 a'_2 \Delta a'_2}{a_2'^2 - x^2} - \dots \right\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

En substituant une fonction rationnelle quelconque de x au lieu de r , on voit sans peine qu'il sera impossible de satisfaire à cette équation, à moins que r ne soit égal à zéro. En se rappelant que nous avons supposé qu'il soit impossible de trouver une relation entre un nombre moindre des fonctions $\Pi' \alpha_1, \Pi' \alpha_2, \dots, \Pi' \alpha_n$ et ayant égard à l'impossibilité d'une équation de la forme (95.), on verra aisément que tous les coefficients :

$$A_1, A_2, \dots, A_\nu$$

doivent être réels, excepté un seul. Soit donc

$$A_1 = A_2 = \dots = A_\nu = 0 \text{ et } A = 1,$$

on aura :

$$\begin{aligned} &\beta + \beta_0 x^2 + \frac{\alpha_1^2 \beta_1}{\alpha_1^2 - x^2} + \frac{\alpha_2^2 \beta_2}{\alpha_2^2 - x^2} + \dots + \frac{\alpha_n^2 \beta_n}{\alpha_n^2 - x^2} \\ &= k - \frac{2m_1 a_1 \Delta a_1}{a_1^2 - x^2} - \frac{2m_2 a_2 \Delta a_2}{a_2^2 - x^2} - \dots - \frac{2m_\mu a_\mu \Delta a_\mu}{a_\mu^2 - x^2}, \end{aligned}$$

donc :

$$\beta = k_1, \beta_0 = 0, \alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \dots$$

$$\beta_1 = -\frac{2m_1 \Delta a_1}{a_1}, \beta_2 = -\frac{2m_2 \Delta a_2}{a_2}, \dots$$

Cela posé, la formule générale (94.) prendra la forme :

$$\begin{aligned} 104. \quad \beta . \varpi x - \frac{2m_1 \Delta a_1}{a_1} . \Pi' \alpha_1 - \frac{2m_2 \Delta a_2}{a_2} \Pi' \alpha_2 - \dots - \frac{2m_n \Delta a_n}{a_n} \Pi' \alpha_n \\ = \log \left\{ \frac{fx + \varphi x . \Delta x}{fx - \varphi x . \Delta x} \right\} + C, \end{aligned}$$

où les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ doivent satisfaire à l'équation

$$105. (fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha_1^2)^{m_1}(x^2-\alpha_2^2)^{m_2}\dots(x^2-\alpha_n^2)^{m_n},$$

l'une des fonctions $fx, \varphi x$ étant paire et l'autre impaire.

Telle est donc la relation la plus générale entre des fonctions rapportées au même module et à la même variable.

Il est remarquable que la fonction de la seconde espèce n'entre point dans cette relation.

Quant à la quantité constante β qui multiplie la fonction de la première espèce ϖx , elle pourra sous certaines conditions se réduire à zéro.

L'équation (105.) qui donne les relations nécessaires entre les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ est précisément de la même forme que celle que nous avons considéré dans le chapitre I. En regardant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ comme des variables, elle donnera en vertu du théorème I.:

$$106. \begin{cases} m_1 \Pi \alpha_1 + m_2 \Pi \alpha_2 + \dots + m_n \Pi \alpha_n = C - \frac{a}{2 \Delta a} \log \left\{ \frac{fa + \varphi a \cdot \Delta a}{fa - \varphi a \cdot \Delta a} \right\}, \\ m_1 \varpi \alpha_1 + m_2 \varpi \alpha_2 + \dots + m_n \varpi \alpha_n = C \end{cases}$$

$$\text{où } \Pi \alpha = \int \frac{\partial \alpha}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right) \Delta \alpha}.$$

Les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ satisfont donc à l'équation différentielle:

$$107. \frac{m_1 \partial \alpha_1}{\Delta \alpha_1} + \frac{m_2 \partial \alpha_2}{\Delta \alpha_2} + \dots + \frac{m_n \partial \alpha_n}{\Delta \alpha_n} = 0.$$

Pour avoir toutes les fonctions de la troisième espèce qui seront réductibles indéfiniment à la première espèce, il faut faire $n=1$. En posant $\alpha_1 = \alpha, m_1 = m$, on a:

$$108. \Pi' \alpha = \frac{\beta \alpha}{2m \Delta \alpha} \varpi x - \frac{\alpha}{2m \Delta \alpha} \cdot \log \left\{ \frac{fx + \varphi x \cdot \Delta x}{fx - \varphi x \cdot \Delta x} \right\}.$$

Pour trouver dans ce cas le paramètre α , on aura l'équation:

$$109. (fx)^2 - (\varphi x)^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2-\alpha^2)^m,$$

ce qui fait dépendre α d'une équation qui généralement est du degré m^2 .

Le cas le plus simple est celui où $m=2$. On aura dans ce cas:

$$\varphi x = \frac{1}{c} \sqrt{-1}, \quad fx = \alpha x,$$

donc:

$$(x^2-\alpha^2)^2 = x^4 - \left\{ \frac{1+c^2}{c^2} - \alpha^2 \right\} x^2 + \frac{1}{c^2} = \left(x^2 \pm \frac{1}{c} \right)^2;$$

donc α pourra avoir les deux valeurs $\frac{1}{\sqrt{c}}, + \frac{1}{\sqrt{-c}}$. Les valeurs correspondantes de α sont $1 - \frac{1}{c}, 1 + \frac{1}{c}$. On aura:

$\Pi' \left(\frac{1}{\sqrt{c}} \right) = \int \frac{\partial x}{(1-cx^2) \Delta x} = k \varpi x + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{c}-1}{c(c-1)} \cdot \log \left\{ \frac{(c-1)x + \sqrt{c}-1}{(c-1)x - \sqrt{c}-1} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} \right\},$
où l'on pourra varier le signe de c .

Si $m = 3$, on aura dans le cas fx impair:

$$fx = x^3 + ax, \quad \varphi x = b,$$

donc:

$$(x^3 + ax)^2 - b^2(1-x^2)(1-c^2x^2) = (x^2 - \alpha^2)^3.$$

De là on tire:

$\alpha^3 = b$, $\alpha^3 + a\alpha + b\Delta\alpha = 0$, $2a - c^2b^2 = -3\alpha^2$, $\alpha^2 + (1+c^2)b^2 = 3\alpha^4$,
donc en éliminant a et b , on trouvera:

$$\alpha = \frac{1}{2} \{ c^2 \alpha^6 - 3\alpha^2 \},$$

$$\Delta\alpha = \frac{1}{2} (1 - c^2 \alpha^4).$$

Si donc α est une racine de l'équation, on aura:

$$\Pi'\alpha = \int \frac{\partial x}{(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}) \Delta x} = k \cdot \varpi x - \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{1 - c^2 \alpha^4} \cdot \log \left\{ \frac{x^3 + \frac{1}{2}(c^2 \alpha^6 - 3\alpha^2)x + \alpha^3}{x^3 + \frac{1}{2}(c^2 \alpha^6 - 3\alpha^2)x - \alpha^3} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} \right\},$$

Généralement la quantité α sera pour un m quelconque racine de l'une de deux équations:

$$110. \quad x_m = 0; \quad x_m = \frac{1}{\alpha},$$

où x_m est la fonction de x que nous avons considéré dans le §. 4. du chapitre I., et qui est telle qu'on ait

$$\frac{\partial x_m}{\Delta x_m} = m \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

et en même tems

$$x_m = 0 \text{ pour } x = 0.$$

Il y a encore à remarquer, que si l'on désigne par α une racine de $x_m = 0$, $\frac{1}{c\alpha}$ en sera une de l'équation $x_m = \frac{1}{\alpha}$. Pour prouver que α satisfait à une des équations (110.), il suffit de remarquer qu'on a (39.):

$$111. \quad p^2 - q^2(\Delta x)^2 = (x^2 - \alpha^2)^m (x^2 - \alpha_m^2),$$

où α_m désigne la même fonction de α , que x_m l'est de x . En multipliant les deux équations (109. 111.) membre par membre, il viendra:

$$(pfx \pm q\varphi x \Delta^2 x)^2 - (p\varphi x \pm qfx)^2 (\Delta x)^2 = (x^2 - \alpha^2)^{2m} (x^2 - \alpha_m^2).$$

Or on tire des mêmes équations:

$$p^2 (fx)^2 - q^2 (\varphi x)^2 (\Delta x)^2 = (x^2 - \alpha^2)^m \cdot R,$$

où R est une fonction entière. De là on voit que l'une des deux fonctions

$$pfx + q\varphi x \cdot \Delta^2 x, \quad pfx - q\varphi x \cdot \Delta^2 x$$

sera divisible par $(x^2 - \alpha^2)^m$; donc en divisant l'équation par $(x^2 - \alpha^2)^{2m}$, le résultat sera de la forme:

$$r^2 - \varrho^2 (\Delta x)^2 = x^2 - \alpha_m^2,$$

où l'une des fonction r et ϱ sera paire et l'autre impaire. On doit donc avoir d'abord $\varrho = 0$, et ensuite $r^2 = x^2 - \alpha_m^2$, et de là $\alpha_m = 0$, ou $\alpha_m = \frac{1}{0}$. Réciproquement si l'une de ces équations a lieu, il est clair par la forme de (111.), qu'on pourra satisfaire à l'équation (109.). Il y a à remarquer que dans le cas que nous considérons, β ne pourra jamais être zéro. Donc il n'existe de fonction de la troisième espèce, exprimable par des fonctions algébriques et logarithmiques.

Le cas particulier le plus remarquable de la formule générale (105.) est celui, où $n = 3$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Dans ce cas, en faisant $\alpha_3 = \alpha$, $\Delta \alpha_3 = -\Delta \alpha$, on aura :

$$112. \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} \cdot II' \alpha_1 + \frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2} II' \alpha_2 = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} II' \alpha + \beta \cdot \varpi x - \frac{1}{2} \log \left(\frac{fx + \varphi x \Delta x}{fx - \varphi x \Delta x} \right),$$

où

$$113. \begin{cases} fx = x^3 + ax, & \varphi x = b, \text{ ensorte que} \\ (x^3 + ax)^2 - b^2(1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \alpha_1^2)(x^2 - \alpha_2^2), \end{cases}$$

d'où l'on tire, comme dans le paragraphe 3. du chapitre I. :

$$114. \begin{cases} \alpha = \frac{\alpha_1 \Delta \alpha_2 + \alpha_2 \Delta \alpha_1}{1 - c^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2}; \\ b = \alpha \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2; & a = \frac{1}{2} \cdot \{c^2 \alpha^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 - \alpha^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\}; \\ \frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2}; & \beta = c^2 \alpha \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2. \end{cases}$$

Les deux paramètres α_1, α_2 sont donc arbitraires.

Comme cas particulier on remarquera celui où α_2 est infini. On aura dans ce cas

$$\alpha = \pm \frac{1}{c \alpha_1}.$$

On pourra donc réduire l'une à l'autre deux fonctions, dont les paramètres sont respectivement $\alpha, \frac{1}{c\alpha}$. La formule correspondante pour effectuer cette réduction est :

$$115. II' \alpha + II' \left(\frac{1}{c\alpha} \right) = \varpi x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\Delta \alpha} \cdot \log \left\{ \frac{x \Delta \alpha + \alpha \Delta x}{x \Delta \alpha - \alpha \Delta x} \right\}.$$

Pour trouver toutes les fonctions réductibles l'une à l'autre, il suffit de faire dans la formule (104.) $n = 2$. Cela donne

$$116. m_1 \cdot \frac{\Delta \alpha_1}{\alpha_1} II' \alpha_1 + m_2 \cdot \frac{\Delta \alpha_2}{\alpha_2} II' \alpha_2 = \beta \cdot \varpi x - \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{fx + \varphi x \Delta x}{fx - \varphi x \Delta x} \right\},$$

où les paramètres α_1 et α_2 sont liées entre eux par l'équation :

$$117. (fx)^2 - (\varphi x)^2 \cdot (1 - x^2)(1 - c^2 x^2) = (x^2 - \alpha_1^2)^{m_1} (x^2 - \alpha_2^2)^{m_2}$$

et cela donnera une seule équation entre α_1 et α_2 .

(La continuation dans le cahier prochain.)

20.

Beweise verschiedener Sätze.

(Von Herrn Th. Clausen zu Altona.)

Es ist:

$$\int^m y \partial x^m = \frac{1}{1.2.3\dots m} \left\{ x^m y - x^{m-1} \int x \partial y + \frac{m.m-1}{1.2} x^{m-2} \int x^2 \partial y - \dots \pm \int x^m \partial y \right\}.$$

Differentiirt man nemlich den Ausdruck, so findet man:

$$\begin{aligned} \int^{m-1} y \partial x^{m-1} &= \frac{1}{1.2.3\dots m} \left\{ x^m \partial y - m x^{m-1} \partial y + \frac{m.m-1}{1.2} x^m \partial y - \dots \pm x^m \partial y \right\} \\ &+ \frac{1}{1.2.3\dots m-1} \left\{ x^{m-1} y - (m-1) x^{m-2} \int x \partial y + \frac{m-1.m-2}{1.2} \int x^2 \partial y - \dots \pm \int x^{m-1} \partial y \right\}; \end{aligned}$$

da aber $1 - m + \frac{m.m-1}{1.2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2} \dots = (1-1)^m = 0$ ist, so ist:

$$\begin{aligned} &\int^{m-1} y \partial x^{m-1} \\ &= \frac{1}{1.2.3\dots m-1} \left\{ x^{m-1} y - (m-1) x^{m-2} \int x \partial y + \frac{m-1.m-2}{1.2} \int x^2 \partial y - \dots \pm \int x^{m-1} \partial y \right\}. \end{aligned}$$

Man sieht nun leicht, daß eine nochmalige Differentiation geben wird:

$$\begin{aligned} &\int^{m-2} y \partial x^{m-2} \\ &= \frac{1}{1.2.3\dots m-2} \left\{ x^{m-2} y - (m-2) x^{m-3} \int x \partial y + \frac{m-2.m-3}{1.2} \int x^2 \partial y - \dots \pm \int x^{m-2} \partial y \right\}, \end{aligned}$$

und daß eine fortgesetzte Differentiation zuletzt die identische Gleichung

$$y = y$$

gibt, wodurch also der obige Ausdruck bewiesen ist.

Es sei $\tan \varphi = a$, $\tan \varphi' = a'$, $\tan \varphi'' = a''$, ...; wir haben dann:

$$\tan(\varphi + \varphi') = \frac{a + a'}{1 - a a'},$$

$$\tan(\varphi + \varphi' + \varphi'') = \frac{\frac{a + a'}{1 - a a'} + a''}{1 - a'' \frac{a + a'}{1 - a a'}} = \frac{a + a' + a'' - a a' a''}{1 - (a a' + a a'' + a' a'')},$$

$$\begin{aligned} \tan(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \varphi''') &= \frac{\frac{a + a' + a'' - a a' a''}{1 - (a a' + a a'' + a' a'')} + a'''}{1 - a''' \frac{a + a' + a'' - a a' a''}{1 - (a a' + a a'' + a' a'')}} \\ &= \frac{a + a' + a'' + a''' - (a a' a'' + a a' a''' + a a'' a''') + a' a' a'' a'''}{1 - (a a' + a a'' + a a''' + a' a'' + a' a''' + a'' a''') + a a' a' a''}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man durch $(1)_m$ die Summe der Größen $a, a', a'', a''', \dots$
 $\dots a^{(m-1)}$; durch $(2)_m$ die Summe der Producte je 2 und 2 $\dots$
 $aa' + aa'' + \dots$; durch $(3)_m$ die Summe der Producte je 3 und 3, u. s. w.,
 so deuten die obigen Gleichungen auf den allgemeinen Ausdruck:

$$(a.) \quad \tan(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \dots + \varphi^{(m-1)}) = \frac{(1)_m - (3)_m + (5)_m - \text{etc.}}{1 - (2)_m + (4)_m - \text{etc.}}.$$

Bildet man die Producte je n und n der $m+1$ Größen, $a, a', a'', \dots a^{(m)}$

$$\begin{array}{c} a^{(m)} a^{(m-1)} a^{(m-2)} \dots \\ \vdots \\ a^{(m-1)} a^{(m-2)} a^{(m-3)} \dots \\ \vdots \\ a^{(m-2)} a^{(m-3)} \dots \\ \vdots \end{array}$$

so sieht man leicht, daß die Summe der mit $a^{(m)}$ multiplicirten Glieder
 $= (n-1)_m$ ist, und daß die Summe der übrigen $(n)_m$, folglich

$$(b.) \quad n_{m+1} = a^{(m)}(n-1)_m + (n)_m \dots$$

Nimmt man nun an, daß der obige Ausdruck (a.) für m Größen richtig
 sei, so folgt daraus für $m+1$ Größen:

$$\begin{aligned} \tan(\varphi + \varphi' + \dots + \varphi^{(m-1)} + \varphi^{(m)}) &= \frac{\frac{(1)_m - (3)_m + (5)_m - \dots + a^{(m)}}{1 - (2)_m + (4)_m - \dots} + a^{(m)}}{1 - a^{(m)} \frac{(1)_m - (3)_m + (5)_m - \dots}{1 - (2)_m + (4)_m - \dots}} \\ &= \frac{(1)_m + a^{(m)} - [(3)_m + a^{(m)}(2)_m] + [(5)_m + a^{(m)}(4)_m] - \dots}{1 - [(2)_m + a^{(m)}(1)_m] + [(4)_m + a^{(m)}(3)_m] - \dots}, \end{aligned}$$

und durch Hülfe der Gleichung (b.):

$$\tan(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \dots + \varphi^{(m)}) = \frac{(1)_{m+1} - (3)_{m+1} + (5)_{m+1} - \dots}{1 - (2)_{m+1} + (4)_{m+1} - \dots}.$$

Der Ausdruck (a.) gilt also dann auch für die Anzahl $m+1$, wenn er
 für m gilt, und überhaupt allgemein, da er für $m=1, 2, 3$ und 4
 richtig ist.

Aus diesem Satze folgt das bemerkenswerthe Resultat, daß wenn
 die Wurzeln einer beliebigen Gleichung $\tan \varphi, \tan \varphi', \dots$ sind, man
 die Summe $\varphi + \varphi' + \varphi''$ etc. bestimmen könne, ohne die Gleichung erst
 aufzulösen; da die Größen $(1)_m, (2)_m$ etc. die respectiven Coefficienten
 der Gleichung sind.

Sei $f x$ eine beliebige Function von x , und $\alpha^n = 1$; überdies φ eine solche Function, daß

$$\varphi[f(x)] = f(\alpha x),$$

so ist

$$\varphi^n(y) = y.$$

Denn

$$\varphi^2[f(x)] = \varphi[f(\alpha x)] = f(\alpha^2 x),$$

$$\varphi^3[f(x)] = \varphi[f(\alpha^2 x)] = f(\alpha^3 x),$$

$\vdots$

$$\varphi^n[f(x)] = \varphi[f(\alpha^{n-1} x)] = f(\alpha^n x) = f(x),$$

wo $\varphi^n(y) = \varphi(\varphi(\varphi(\dots\varphi(y))))$ ist.

Dieser Satz giebt eine allgemeine Regel zur Erfindung der von Babbage benannten periodischen Functionen.

Altona, den 3. August 1828.

21.

Summirung verschiedener nach den Sinussen oder Cosinussen vielfacher Bogen fortgehender Reihen.

(Von Herrn Th. Clausen zu Altona.)

Der größte Theil dieser Reihen, deren numerische Coefficienten mit den Coefficienten bekannter, nach den Potenzen der veränderlichen Gröſſe entwickelter Functionen übereinstimmen, läßt sich durch einen endlichen Ausdruck summiren. Diesen gebe ich hier für die vorzüglichsten Reihen, deren Coefficienten nach bekannten Gesetzen gebildet sind.

1. Die Coefficienten seien die des Binomii, oder:

$$y = 1 + \frac{m}{1} z \cos \varphi + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} z^2 \cos 2 \varphi + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 \cos 3 \varphi + \dots$$

Man hat bekanntlich:

$$\cos \varphi = \frac{e^{\varphi \sqrt{-1}} + e^{-\varphi \sqrt{-1}}}{2};$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{\varphi \sqrt{-1}} - e^{-\varphi \sqrt{-1}}}{2 \sqrt{-1}};$$

wodurch man erhält:

$$2y = (1 + z e^{\varphi \sqrt{-1}})^m + (1 + z e^{-\varphi \sqrt{-1}})^m.$$

Ferner ist

$$e^{\varphi \sqrt{-1}} = \cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1};$$

$$e^{-\varphi \sqrt{-1}} = \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1};$$

folglich:

$$2y = (1 + z \cos \varphi + z \sin \varphi \sqrt{-1})^m + (1 + z \cos \varphi - z \sin \varphi \sqrt{-1})^m.$$

Ich setze:

$$1 + z \cos \varphi = \beta \cos \psi,$$

$$z \sin \varphi = \beta \sin \psi,$$

wodurch sich der obige Ausdruck in

$$\begin{aligned} 2y &= \beta^m (\cos \psi + \sin \psi \sqrt{-1})^m + \beta^m (\cos \psi - \sin \psi \sqrt{-1})^m \\ &= \beta^m (e^{m\psi \sqrt{-1}} + e^{-m\psi \sqrt{-1}}) \end{aligned}$$

verwandelt, und also:

$$y = \beta^m \cos m \psi.$$

Aus dem Obigen haben wir:

$$\beta^2 = 1 + 2z \cos \varphi + z^2 \quad \text{und} \quad \tan \psi = \frac{\alpha \sin \varphi}{1 + \alpha \cos \varphi},$$

folglich ist:

$$(1.) \quad y = (1 + 2z \cos \varphi + z^2)^{\frac{m}{2}} \cos m. \left(\arctan \frac{z \sin \varphi}{1 + z \cos \varphi} \right).$$

Eine zweite Reihe mit denselben Coefficienten ist:

$$x = \frac{m}{1} z \sin \varphi + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} z^2 \sin 2\varphi + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 \sin 3\varphi + \dots$$

Durch Zerlegung findet sich:

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{-1} &= (1 + z e^{\varphi\sqrt{-1}})^m - (1 + z e^{-\varphi\sqrt{-1}})^m \\ &= (1 + z \cos \varphi + z \sin \varphi \sqrt{-1})^m - (1 + z \cos \varphi - z \sin \varphi \sqrt{-1})^m \\ &= \beta^m (\cos \psi + \sin \psi \sqrt{-1})^m - \beta^m (\cos \psi - \sin \psi \sqrt{-1})^m \\ &= \beta^m (e^{m\psi\sqrt{-1}} - e^{-m\psi\sqrt{-1}}), \end{aligned}$$

folglich

$$x = \beta^m \sin m\psi,$$

$$(2.) \quad x = (1 + 2z \cos \varphi + z^2)^{\frac{m}{2}} \sin m. \left(\arctan \frac{z \sin \varphi}{1 + z \cos \varphi} \right).$$

Für den Fall $z = 1$ ist:

$$\beta \cos \psi = 1 + \cos \varphi = 2 \cos \frac{1}{2} \varphi,$$

$$\beta \sin \psi = \sin \varphi = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi,$$

mithin $\beta = 2 \cos \frac{1}{2} \varphi$, $\tan \psi = \tan \frac{1}{2} \varphi$ oder $\psi = \frac{1}{2} \varphi$; es wird also:

$$(3.) \quad 1 + \frac{m}{1} \cos \varphi + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \cos 2\varphi + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos 3\varphi \dots = 2^m \cos \frac{1}{2} \varphi^m \cos \frac{1}{2} m\varphi,$$

$$(4.) \quad \frac{m}{1} \sin \varphi + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \sin 2\varphi + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin 3\varphi \dots = 2^m \cos \frac{1}{2} \varphi^m \sin \frac{1}{2} m\varphi.$$

2. Die Coefficienten seien die der Entwicklung von $\log \text{nat}(1 - z)$.

Sei

$$y = z \cos \varphi + \frac{1}{2} z^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{3} z^3 \cos 3\varphi + \frac{1}{4} z^4 \cos 4\varphi + \dots$$

so ist

$$2y = -\log(1 - z e^{\varphi\sqrt{-1}}) - \log(1 - z e^{-\varphi\sqrt{-1}}),$$

$$(5.) \quad y = -\frac{1}{2} \log(1 - 2z \cos \varphi + z^2).$$

Sei ferner

$$x = z \sin \varphi + \frac{1}{2} z^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{3} z^3 \sin 3\varphi + \frac{1}{4} z^4 \sin 4\varphi + \dots,$$

so ist

$$2x\sqrt{-1} = -\log(1 - z e^{\varphi\sqrt{-1}}) + \log(1 - z e^{-\varphi\sqrt{-1}}),$$

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1 - z e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1 - z e^{\varphi\sqrt{-1}}},$$

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} = \frac{z(e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}})}{2 - z(e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}})},$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{z \cdot \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}}{1 - z \cdot \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2}},$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{z \sin \varphi}{1 - z \cos \varphi},$$

und also:

$$(6.) \quad x = \operatorname{arctang} \frac{z \sin \varphi}{1 - z \cos \varphi}.$$

Für den Fall $z = 1$ ist wieder

$$(7.) \quad \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \cos 3\varphi + \frac{1}{4} \cos 4\varphi + \dots = -\log(2 \sin \frac{1}{2} \varphi),$$

$$(8.) \quad \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi + \dots = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi) = \frac{1}{2}(\pi - \varphi),$$

3. Die Coefficienten seien die der Entwicklung von e^z .

$$y = 1 + z \cos \varphi + \frac{1}{1.2} z^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{1.2.3} z^3 \cos 3\varphi + \dots$$

$$\begin{aligned} 2y &= e^{ze^{\varphi\sqrt{-1}}} + e^{ze^{-\varphi\sqrt{-1}}} \\ &= e^{z \cos \varphi + z \sin \varphi \sqrt{-1}} + e^{z \cos \varphi - z \sin \varphi \sqrt{-1}} \\ &= e^{z \cos \varphi} (e^{z \sin \varphi \sqrt{-1}} + e^{-z \sin \varphi \sqrt{-1}}), \end{aligned}$$

$$(9.) \quad y = e^{z \cos \varphi} \cos(z \sin \varphi).$$

Ferner:

$$x = z \sin \varphi + \frac{1}{1.2} z^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{1.2.3} z^3 \sin 3\varphi + \dots$$

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{-1} &= e^{ze^{\varphi\sqrt{-1}}} - e^{ze^{-\varphi\sqrt{-1}}} \\ &= e^{z \cos \varphi + z \sin \varphi \sqrt{-1}} - e^{z \cos \varphi - z \sin \varphi \sqrt{-1}} \\ &= e^{z \cos \varphi} (e^{z \sin \varphi \sqrt{-1}} - e^{-z \sin \varphi \sqrt{-1}}), \end{aligned}$$

$$(10.) \quad x = e^{z \cos \varphi} \sin(z \sin \varphi).$$

Setzt man $z = 1$, so findet man:

$$(11.) \quad 1 + \cos \varphi + \frac{1}{1.2} \cos 2\varphi + \frac{1}{1.2.3} \cos 3\varphi + \dots = e^{\cos \varphi} \cos(\sin \varphi),$$

$$(12.) \quad \sin \varphi + \frac{1}{1.2} \sin 2\varphi + \frac{1}{1.2.3} \sin 3\varphi + \dots = e^{\cos \varphi} \sin(\sin \varphi).$$

4. Die Coefficienten seien die der Entwicklung von $\cos z$.

$$y = 1 - \frac{1}{1.2} z^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{1.2.3.4} z^4 \cos 4\varphi - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} z^6 \cos 6\varphi + \dots$$

$$\begin{aligned} 2y &= \cos(ze^{\varphi\sqrt{-1}}) + \cos(ze^{-\varphi\sqrt{-1}}) \\ &= \cos(z \cos \varphi + z \sin \varphi \sqrt{-1}) + \cos(z \cos \varphi - z \sin \varphi \sqrt{-1}) \\ &= 2 \cos(z \cos \varphi) \cos(z \sin \varphi \sqrt{-1}) \end{aligned}$$

$$(13.) \quad y = \cos(z \cos \varphi) \frac{e^{z \sin \varphi} + e^{-z \sin \varphi}}{2},$$

$$x = -\frac{1}{1.2} z^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{1.2.3.4} z^4 \sin 4\varphi - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} z^6 \sin 6\varphi + \dots$$

$$\begin{aligned}
 2x\sqrt{-1} &= \cos(ze^{q\sqrt{-1}}) - \cos(ze^{-q\sqrt{-1}}) \\
 &= \cos(z\cos\Phi + z\sin\Phi\sqrt{-1}) - \cos(z\cos\Phi - z\sin\Phi\sqrt{-1}) \\
 &= -2\sin(z\cos\Phi)\sin(z\sin\Phi\sqrt{-1})
 \end{aligned}$$

$$(14.) \quad x = -\sin(z\cos\Phi) \frac{e^{z\sin\Phi} - e^{-z\sin\Phi}}{2}.$$

Setzen wir wieder $z=1$, so verwandeln sich diese Ausdrücke in:

$$(15.) \quad 1 - \frac{1}{1.2}\cos 2\Phi + \frac{1}{1.2.3.4}\cos 4\Phi - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\cos 6\Phi \dots = \cos(\cos\Phi) \frac{e^{\sin\Phi} + e^{-\sin\Phi}}{2},$$

$$(16.) \quad -\frac{1}{1.2}\sin 2\Phi + \frac{1}{1.2.3.4}\sin 4\Phi - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\sin 6\Phi \dots = -\sin(\cos\Phi) \frac{e^{\sin\Phi} - e^{-\sin\Phi}}{2}.$$

5. Die Coefficienten seien die der Entwicklung von z :

$$y = z\cos\Phi - \frac{1}{1.2.3}z^3\cos 3\Phi + \frac{1}{1.2.3.4.5}z^5\cos 5\Phi - \dots$$

$$\begin{aligned}
 2y &= \sin(ze^{q\sqrt{-1}}) + \sin(ze^{-q\sqrt{-1}}) \\
 &= 2\sin(z\cos\Phi)\cos(z\sin\Phi\sqrt{-1})
 \end{aligned}$$

$$(17.) \quad y = \sin(z\cos\Phi) \frac{e^{z\sin\Phi} + e^{-z\sin\Phi}}{2},$$

$$x = z\sin\Phi - \frac{1}{1.2.3}z^3\sin 3\Phi + \frac{1}{1.2.3.4.5}z^5\sin 5\Phi - \dots$$

$$\begin{aligned}
 2x\sqrt{-1} &= \sin(ze^{q\sqrt{-1}}) - \sin(ze^{-q\sqrt{-1}}) \\
 &= 2\cos(z\cos\Phi)\sin(z\sin\Phi\sqrt{-1}),
 \end{aligned}$$

$$(18.) \quad x = \cos(z\cos\Phi) \frac{e^{z\sin\Phi} - e^{-z\sin\Phi}}{2}.$$

Für $z=1$ werden diese Ausdrücke:

$$(19.) \quad \cos\Phi - \frac{1}{1.2.3}\cos 3\Phi + \frac{1}{1.2.3.4.5}\cos 5\Phi - \dots = \sin(\cos\Phi) \frac{e^{\sin\Phi} - e^{-\sin\Phi}}{2},$$

$$(20.) \quad \sin\Phi - \frac{1}{1.2.3}\sin 3\Phi + \frac{1}{1.2.3.4.5}\sin 5\Phi - \dots = \cos(\cos\Phi) \frac{e^{\sin\Phi} + e^{-\sin\Phi}}{2},$$

6. Die Coefficienten seien die der Entwicklung von $\arcsin z$:

$$y = z\cos\Phi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}z^3\cos 3\Phi + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5}z^5\cos 5\Phi + \dots$$

$$2y = \arcsin(ze^{q\sqrt{-1}}) + \arcsin(ze^{-q\sqrt{-1}}).$$

Sei

$$\sin p = ze^{q\sqrt{-1}}, \quad \cos p = \sqrt{1 - z^2e^{2q\sqrt{-1}}},$$

$$\sin q = ze^{-q\sqrt{-1}}, \quad \cos q = \sqrt{1 - z^2e^{-2q\sqrt{-1}}},$$

so ist

$$2y = p + q \text{ und}$$

$$\cos(p+q) = \cos p \cos q - \sin p \sin q = \sqrt{(1 - 2z^2\cos 2\Phi + z^4) - z^2},$$

$$(21.) \quad y = \frac{1}{2} \arccos \{ \sqrt{(1 - 2z^2 + z^4) - z^2} \},$$

$$x = z\sin\Phi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}z^3\sin 3\Phi + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{5}z^5\sin 5\Phi + \dots$$

$$2x\sqrt{-1} = \arcsin(ze^{q\sqrt{-1}}) - \arcsin(ze^{-q\sqrt{-1}}) \\ = p - q,$$

$$2x = (q-p)\sqrt{-1},$$

$$e^{2x} + e^{-2x} = e^{(q-p)\sqrt{-1}} + e^{-(q-p)\sqrt{-1}} = 2\cos(q-p) = 2(\cos q \cos p + \sin q \sin p),$$

$$e^{2x} + e^{-2x} = 2[\sqrt{(1-2z^2\cos 2\phi + z^4)} + z^2],$$

$$e^{4x} - 2[\sqrt{(1-2z^2\cos 2\phi + z^4)} + z^2]e^{2x} + 1 = 0,$$

$$e^{2x} = \sqrt{(1-2z^2\cos 2\phi + z^4)} + z^2 \pm \sqrt{\{2z^4 - 2z^2\cos 2\phi + 2z^2\sqrt{(1-2z^2\cos 2\phi + z^4)}\}},$$

$$(22.) x =$$

$$\frac{1}{2} \log[z^2 + \sqrt{(1-2z^2\cos 2\phi + z^4)} \pm \sqrt{\{2z^4 - 2z^2\cos 2\phi + 2z^2\sqrt{(1-2z^2\cos 2\phi + z^4)}\}}].$$

7. Die Coefficienten seien die der Entwicklung von $\arctang z$:

$$y = z \cos \phi - \frac{1}{3}z^3 \cos 3\phi + \frac{1}{5}z^5 \cos 5\phi - \dots$$

$$2y = \arctang(ze^{q\sqrt{-1}}) + \arctang(ze^{-q\sqrt{-1}}).$$

Sei

$$\tang p = ze^{q\sqrt{-1}}, \quad \tang q = ze^{-q\sqrt{-1}},$$

so ist

$$\tang 2y = \tang(p+q) = \frac{z(e^{q\sqrt{-1}} + e^{-q\sqrt{-1}})}{1-z^2},$$

$$(23.) y = \frac{1}{2} \arctang \frac{2z \cos \phi}{1-z^2}.$$

$$x = z \sin \phi - \frac{1}{3}z^3 \sin 3\phi + \frac{1}{5}z^5 \sin 5\phi - \dots$$

$$2x\sqrt{-1} = \arctang(ze^{q\sqrt{-1}}) - \arctang(ze^{-q\sqrt{-1}}),$$

$$2x\sqrt{-1} = p - q,$$

$$\tang(p-q) = \frac{z(e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}})}{1+z^2} = \frac{2z \sin \phi \sqrt{-1}}{1+z^2}.$$

Nun ist

$$e^{4x} = e^{-2(p-q)\sqrt{-1}} = \frac{\cos(p-q) - \sin(p-q)\sqrt{-1}}{\cos(p-q) + \sin(p-q)\sqrt{-1}},$$

$$e^{4x} = \frac{1 - \tang(p-q)\sqrt{-1}}{1 + \tang(p-q)\sqrt{-1}} = \frac{1 + 2z \sin \phi + z^2}{1 - 2z \sin \phi + z^2},$$

folglich

$$(24.) x = \frac{1}{4} \log \frac{1 + 2z \sin \phi + z^2}{1 - 2z \sin \phi + z^2}.$$

8. Die Coefficienten seien die der Entwicklung von $\tang z$:

$$y = z \cos \phi + Az^3 \cos 3\phi + Bz^5 \cos 5\phi + \dots$$

$$2y = \tang(ze^{q\sqrt{-1}}) + \tg(ze^{-q\sqrt{-1}})$$

$$= \frac{\sin(ze^{q\sqrt{-1}}) \cos(ze^{-q\sqrt{-1}}) + \cos(ze^{q\sqrt{-1}}) \sin(ze^{-q\sqrt{-1}})}{\cos(ze^{q\sqrt{-1}}) \cos(ze^{-q\sqrt{-1}})},$$

es ist aber

$$\begin{aligned} \cos(z e^{\varphi\sqrt{-1}}) \cos(z e^{-\varphi\sqrt{-1}}) &= \frac{1}{2} \cos(z e^{\varphi\sqrt{-1}} + z e^{-\varphi\sqrt{-1}}) + \frac{1}{2} \cos(z e^{\varphi\sqrt{-1}} - z e^{-\varphi\sqrt{-1}}) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2z \cos \varphi) + \frac{1}{2} \cos(2z \sin \varphi \sqrt{-1}) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2z \cos \varphi) + \frac{1}{4} e^{2z \sin \varphi} + \frac{1}{4} e^{-2z \sin \varphi}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{\sin(2z \cos \varphi)}{\frac{1}{2} \cos(2z \cos \varphi) + \frac{1}{4} e^{2z \sin \varphi} + \frac{1}{4} e^{-2z \sin \varphi}}, \\ (25.) \quad y &= \frac{2 \sin(2z \cos \varphi)}{e^{2z \sin \varphi} + e^{-2z \sin \varphi} + 2 \cos(2z \cos \varphi)}, \\ x &= z \sin \varphi + Az^3 \sin 3\varphi + Bz^5 \sin 5\varphi + \dots \\ 2x\sqrt{-1} &= \operatorname{tang}(z e^{\varphi\sqrt{-1}}) - \operatorname{tang}(z e^{-\varphi\sqrt{-1}}) \\ &= \frac{\sin z(e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}})}{\cos(z e^{\varphi\sqrt{-1}}) \cos(z e^{-\varphi\sqrt{-1}})} \\ &= \frac{\sin 2(z \sin \varphi \sqrt{-1})}{\frac{1}{4} e^{2z \sin \varphi} + \frac{1}{4} e^{-2z \sin \varphi} + \frac{1}{2} \cos(2z \cos \varphi)} \\ &= \frac{e^{-2z \sin \varphi} - e^{2z \sin \varphi}}{\frac{1}{2} e^{2z \sin \varphi} + \frac{1}{2} e^{-2z \sin \varphi} + \cos(2z \cos \varphi)} \sqrt{-1}. \\ (26.) \quad x &= \frac{e^{2z \sin \varphi} - e^{-2z \sin \varphi}}{e^{2z \sin \varphi} + e^{-2z \sin \varphi} + 2 \cos(2z \cos \varphi)}. \end{aligned}$$

Altona, den 3 August 1828.

22.

Über die Potenzial-Functionen.

(Von Hrn. Prof. C. Gudermann zu Cleve.)

1.

Die cyklischen (trigonometrischen) Functionen $\sin k$, $\cos k$, $\tan k$ und $\cot k$ und die umgekehrten $\arcsin(z)$, $\arccos(z)$, $\arctan(z)$ und $\operatorname{arccot}(z)$ versagen allemal dann, wenn der Arcus (Winkel) imaginär wird. In einem solchen Falle pflegte man bisher jene in Exponential-Functionen, und die vier letzteren in logarithmische umzusetzen, welches in der That immer angeht, um die Unmöglichkeit wegfällen zu lassen. Hiermit ist aber ein Übelstand verbunden, welcher eben daher rührt, daß jene acht Functionen bei einem solchen Übergange vom unmöglichen Arcus zum möglichen in zwei Formen gezwängt werden müssen, so daß in vielen Fällen nicht nur lästige Umrechnungen erforderlich sind, sondern daß auch das Resultat nun in einer viel unbequemereren Gestalt, als vorhin erscheint, und dieses ist freilich am schlimmsten. Da nun aber die cyklischen Functionen nicht bloß in der Geometrie, sondern auch in der reinen Analysis selbst, täglich gebraucht werden, so kann mit Recht verlangt werden, dem Gebrauche derselben die größte Allgemeinheit zu geben, so daß arithmetische Ausdrücke, welche cyklische Functionen enthalten, dann, wenn dieselben oder ihr Arcus imaginär werden, ungeachtet der Abwerfung des Imaginären, sich nicht so unähnlich werden, wie bisher der Fall war. — Die allgemeine Arithmetik darf solche Beschränkungen, die nicht von ihr, sondern von der verschwisterten Geometrie herrühren, nicht dulden — ihre Formen müssen allgemeine sein.

Die berührten Weitläufigkeiten und Unbequemlichkeiten fallen weg, wenn wir die Beschränkung auf nur zwei Formen (Exponential- und Logarithmen-Ausdrücke) aufheben und statt derselben den vorigen cyklischen Ausdrücken eben so viele andere, also ebenfalls acht neue Formen für eben so viele Functionen gegenüberstellen, die dann am füglichsten hyperbolische Functionen (nach der gleichseitigen Hyperbel) heißen.

Die Analysis, als solche, kennt aber weder den Kreis, noch die Hyperbel, und daher mag eine Benennung hinzukommen, welche nicht mehr auf diese Curven hinweist. Die beiden Hauptarten der Functionen machen in der That ein einziges Geschlecht von Functionen aus, — sie mögen also zusammen Potenzial-Functionen heißen, weil ihnen bei ihrer analytischen Nachweisung der Begriff einer Potenz als Hauptbegriff zum Grunde liegt. Nicht geometrische, sondern arithmetische Benennungen würde man ja auch hier haben, wären diese Functionen der Analysis nicht durch die Geometrie zugeführt worden, sondern hätte die Analysis, völlig unabhängig von der Geometrie, dieselben hervorgehoben und ihre Beziehungen entwickelt.

2.

Man kann die Potenz u^x dergestalt zweitheilig $P+Q$ ausdrücken, daß auch ihr reciproker Werth u^{-x} dieselben zwei Theile P und Q hat, nur daß der zweite Theil Q ein entgegengesetztes Vorzeichen erhält. Setzt man in der That:

$$u^x = P + Q,$$

$$u^{-x} = P - Q,$$

so findet man rückwärts $P = \frac{u^x + u^{-x}}{2}$ und $Q = \frac{u^x - u^{-x}}{2}$.

Die Function P heiße Cosinus der Zahl x für die Grundzahl u , und eben so heiße Q Sinus der Zahl x für die Grundzahl u . Der Quotient $\frac{Q}{P}$ heiße Tangente und der reciproke $\frac{P}{Q}$ Cotangente der Zahl x für die Grundzahl u . Das gemeinschaftliche Argument x kann Arcus (eine Zahl) genannt werden. Die Bezeichnung sei folgende:

$$P = \text{Cos}(x, u); \quad Q = \text{Sin}(x, u); \quad \frac{Q}{P} = \text{Tang}(x, u) \quad \text{und} \quad \frac{P}{Q} = \text{Cot}(x, u).$$

Ist die Grundzahl u zugleich die Grundzahl $e = 2,71828\dots$ des natürlichen Logarithmensystems, so kann sie zu größerer Kürze in der Bezeichnung wegleiben, und man hat einfacher:

$$\text{Cos } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \text{Sin } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \text{Tang } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \quad \text{Cot } x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Die Potenzialfunctionen heißen in sofern selbst natürliche. Man findet z. B.

$$\text{Cos } 1 = 1,54308 \ 06348 \ 15243 \ 77847 \ 79053,$$

$$\text{Sin } 1 = 1,17520 \ 11936 \ 43801 \ 45688 \ 23812.$$

Also

$$e^{+1} = \text{Cos } 1 + \text{Sin } 1 = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02865 \text{ und}$$

$$e^{-1} = \text{Cos } 1 - \text{Sin } 1 = 0,36787\ 94411\ 71442\ 32159\ 55241.$$

3.

Setzt man nun $x\sqrt{-1}$ für x , so findet man ($\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet):

$$\text{Cos}(ix) = \cos x \text{ und umgekehrt } \cos(ix) = \text{Cos } x,$$

$$\text{Sin}(ix) = i \sin x \text{ und umgekehrt } \sin(ix) = i \text{Sin } x,$$

$$\text{Tang}(ix) = i \tan x \text{ und umgekehrt } \tan(ix) = i \text{Tang } x,$$

$$\text{Cot}(ix) = -i \cot x \text{ und umgekehrt } \cot(ix) = -i \text{Cot } x.$$

Die Potenzial-Functionen der einen Hauptart gehen also, wenn statt des Arcus x der unmögliche ix genommen wird, über in Potenzial-Functionen der anderen Hauptart: — also die hyperbolischen in cyklische und umgekehrt, die cyklischen in hyperbolische. Man findet z. B.

$$\cos 1 = 0,54030\ 23058\ 68039\ 71740\ 09367 = \text{Cos } i,$$

$$\sin 1 = 0,84147\ 09848\ 07896\ 50665\ 25024 = \frac{\text{Sin } i}{i},$$

und es ist dann:

$$e^i = \cos 1 + i \sin 1 = \text{Cos } i + \text{Sin } i,$$

$$e^{-i} = \cos 1 - i \sin 1 = \text{Cos } i - \text{Sin } i.$$

Schon hieraus ist die Leichtigkeit abzunehmen, mit der man arithmetische Ausdrücke mit Potenzial-Functionen, wenn der Arcus unmöglich ist, sogleich von der Unmöglichkeit befreien kann. Man hat nicht einmal nöthig, die Benennungen der Functionen abzuändern, sondern nur statt der lateinischen Vorsilben deutsche oder umgekehrt zu nehmen. Die kleinen, mit dem Factor oder Divisor i vorzunehmenden Rechnungen können immer im Kopfe bestritten werden, und sind kaum Rechnungen zu nennen. Die hyperbolischen Functionen sind ebenfalls periodisch, wie die cyklischen, sie haben aber unmögliche Perioden.

4.

Gerade diese Leichtigkeit der Übertragung hielt mich lange ab, eine umfassende Theorie der Potenzial-Functionen zu entwerfen, weil mir der Gegenstand, ungeachtet des grossen Nutzens, den die Einführung gerade der hyperbolischen Functionen in die Analysis stiftet, in theoretischer Hinsicht zu unbedeutend schien, da ja fast alle, die cyklischen Functionen betreffenden Beziehungen sogleich in die verwandten, für die hyperbolischen Functionen geltenden umgesetzt werden können. Was

noch zu leisten übrig sei, bestand nach meinem anfänglichen Dafürhalten in der Anfertigung logarithmisch-hyperbolischer Tafeln, ähnlich den logarithmisch-cyklischen, weil ohne dieselben die neue Terminologie blofs eine Erweiterung der alten gewesen wäre, und der ihr zum Grunde liegende einfache Hauptgedanke nur das Bedürfnis der genannten Tafeln lebhafter empfinden lasse. Ich begann die Anfertigung derselben, und die mehrjährige, obgleich häufig unterbrochene Arbeit führte mich nicht selten zu theoretischen Betrachtungen über die hyperbolischen Functionen und ihre Brauchbarkeit in der Analysis. So entstand wider meinen anfänglichen Willen eine Theorie der Potenzial-Functionen überhaupt, welche ich den berechneten Tafeln beizufügen und dem Publikum nächstens zu übergeben gedenke, weil sie Resultate enthält, die ich der Aufmerksamkeit der Analysten nicht unwürdig halte.

5.

Um eines anzuführen, weil es auf die Construction der Tafeln Bezug hat, bilde ich die Gleichung $\text{Cos } \varphi \cdot \text{cos } k = 1$, welche eine Beziehung zwischen den beiden Arcus φ und k ausdrückt, die ich durch $\varphi = \mathfrak{L}k$ und umgekehrt $k = l\varphi$ bezeichne. Ich nenne $\mathfrak{L}k$ die dem Arcus k zugehörige Längen-Zahl, und $l\varphi$ die dem Arcus φ zugehörige Longitudinal-Zahl. Man hat dann zunächst:

$$\mathfrak{L}lk = l\mathfrak{L}k = k; \quad \mathfrak{L}0 = l0 = 0; \quad \mathfrak{L}-k = -\mathfrak{L}k \text{ und } l-k = -lk.$$

$$\mathfrak{L}(ik) = i.lk \text{ und } l(ik) = i.\mathfrak{L}k.$$

In Anwendung dieser Functionen $\mathfrak{L}k$ und lk hat man dann ferner die folgenden Formeln:

$$\text{Cos } k = \frac{1}{\text{cos } lk} \quad \text{und} \quad \text{cos } k = \frac{1}{\text{Cos } \mathfrak{L}k},$$

$$\text{Sin } k = \text{tang } lk \quad - \quad \text{sin } k = \mathfrak{Tang } \mathfrak{L}k,$$

$$\mathfrak{Tang } k = \text{sin } lk \quad - \quad \text{tang } k = \text{Sin } \mathfrak{L}k,$$

$$\text{Cot } k = \frac{1}{\text{sin } lk} \quad - \quad \text{cot } k = \frac{1}{\text{Sin } \mathfrak{L}k},$$

$$\mathfrak{Tang } \frac{1}{2}k = \text{tang } \frac{1}{2}lk \quad - \quad \text{tang } \frac{1}{2}k = \mathfrak{Tang } \frac{1}{2}\mathfrak{L}k.$$

Man wird bei diesen Formeln nicht übersehen, daß die hyperbolischen Functionen in Anwendung von lk eben so auf die cyklischen, wie umgekehrt die cyklischen Functionen in Anwendung von $\mathfrak{L}k$ auf die hyperbolischen zurückgebracht werden. Ich übergehe die zusammengesetzteren Formeln, und mache nur noch aufmerksam darauf, daß wenn

man Tafeln anfertigt, woraus man für jeden Werth von k den zugehörigen Werth von $\mathfrak{L}k$ entnehmen kann, diese Tafeln auch umgekehrt dazu dienen, zu einer Zahl die zugehörige Zahl lk daraus abzulesen. Solche Tafeln habe ich für die Zunahme eines Winkels von Minute zu Minute, zwischen den Grenzen $k=0$ und $k=\frac{\pi}{2}$, mit sieben Dezimalziffern berechnet und sie so eingerichtet, daß sie mit gleicher Bequemlichkeit bei beiden Kreis-Eintheilungen gebraucht werden können. Dadurch sind also die hyperbolischen Functionen auf die cyklischen und umgekehrt auch diese auf jene in völlig gleicher Weise zurückgeführt.

6.

Durch diese Tabellen ist also die Möglichkeit gegeben, zu jedem Arcus den Werth einer beliebigen hyperbolischen Function, und umgekehrt, aus ihr den Arcus zu finden. Ungeachtet der Vermittelung geht die Arbeit bei einiger Fertigkeit einfach, schnell und bequem von Statuten, so daß man sich also fortan ohne Unterschied der Potenzial-Functionen bedienen kann, gleichviel, ob sie hyperbolische oder cyklische sind. Für die letzten 12 Centesimal-Grade sind die Dezimalbrüche aus besonderem Grunde in 10 Dezimalstellen berechnet, und in einer Nebentabelle niedergelegt.

Dabei fand sich ein Fehler in der Angabe des natürlichen Logarithmen der Zahl 1099, welcher nicht 7,0021 (1)595 4403, sondern 7,0021 5595 4403 ist. Der Fehler steht in dem *Thesaurus logarithmorum* von Vega und in den Tafeln von Callet. Ich bringe ihn hiermit zur allgemeinen Kenntniß, damit ihn Jeder in seinen Tafeln verbessern möge.

Es giebt Reihen, welche nach vorgenommener Reversion andere Reihen hervorgehen lassen, welche ihnen selbst nicht nur ähnlich sind, sondern mit ihnen sogar so weit übereinstimmen, daß nur noch eine Abweichung in den Vorzeichen vor den einzelnen Gliedern Statt findet. Diese Beschaffenheit haben die Reihen:

$$\mathfrak{L}k = k + \frac{k^3}{3^9} + 5 \cdot \frac{k^5}{5^9} + 61 \cdot \frac{k^7}{7^9} + 1385 \cdot \frac{k^9}{9^9} + 50521 \cdot \frac{k^{11}}{11^9} + 2702765 \cdot \frac{k^{13}}{13^9} \\ + 199360981 \cdot \frac{k^{15}}{15^9} + 193915121415 \cdot \frac{k^{17}}{17^9} + 2404879661671 \cdot \frac{k^{19}}{19^9} + \text{etc.}$$

und

$$lk = k - \frac{k^3}{3^9} + 5 \cdot \frac{k^5}{5^9} - 61 \cdot \frac{k^7}{7^9} + 1385 \cdot \frac{k^9}{9^9} - 50521 \cdot \frac{k^{11}}{11^9} + \text{etc.},$$

worin $3^0 = 1.2.3$; $5^0 = 1.2.3.4.5$; $7^0 = 1.2.3.4.5.6.7$; u. s. w. ist. Setzt man nemlich z. B. in der zweiten Reihe $\mathfrak{L}k$ für k , so hat man, weil $l(\mathfrak{L}k) = k$ ist:

$$k = \mathfrak{L}k - \frac{(\mathfrak{L}k)^3}{3^0} + 5 \cdot \frac{(\mathfrak{L}k)^5}{5^0} - 61 \cdot \frac{(\mathfrak{L}k)^7}{7^0} + \dots$$

und dieselbe Reihe wird man auch finden, wenn man die erste Reihe umkehrt. Es ist übrigens auch:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(v \cdot \frac{\pi}{2}\right) &= \log \frac{1+v}{1-v} - \log \frac{3+v}{3-v} + \log \frac{5+v}{5-v} - \log \frac{7+v}{7-v} \dots \\ &= S(-1)^a \log \frac{2a+1+v}{2a+1-v}. \end{aligned}$$

Doch, wozu in dieser Ankündigung solche Einzelheiten, da für alle kein Raum vorhanden ist. Daher werde ich auch die geschlossenen Ausdrücke für $\mathfrak{L}k$ und lk übergehen.

7.

Wenn das Argument oder der Arcus k der Functionen $\cos k$, $\sin k$, $\tan k$, $\cot k$ gröfser als vier ist, also auch $\mathfrak{L}k > 4$ ist, so geht die Benutzung der Tabelle für $\mathfrak{L}k$ nicht ganz so leicht von Statten, als für $\mathfrak{L}k < 4$; daher berechnete ich die briggschen Logarithmen der Functionen $\cos k$, $\sin k$ und $\tan k$ selbst für eine Zunahme um $\Delta k = 0,001$ in 9 Decimälziffern bis zu der Weite hin, über welche hinaus keine Tafeln mehr nöthig sind. Die Gröfse $\Delta k = 0,001$ ist klein genug, daß eine Einschaltung ohne die Anwendung der zweiten Differenzen, und also in grofser Leichtigkeit möglich ist. Es hätte zum beabsichtigten Zwecke hingereicht, diese Tabelle von $k = 4$ an fortgehen zu lassen; statt dessen fängt sie schon mit $k = 2$ an, so daß nun schon die briggschen Logarithmen der hyperbolischen Functionen des Arcus k in Tabellen gebracht sind, und nur noch die zwischen die Grenzen $k = 0$ und $k = 2$ fallenden fehlen. Wären auch diese berechnet, so wäre die Realisirung aller hyperbolischen Functionen eine unmittelbare, d. h. man hätte dabei dann die vermittelnde Function $\mathfrak{L}k$ nicht mehr nöthig, obgleich diese Function $\mathfrak{L}k$ an und für sich wichtig genug ist, und die für sie berechneten Tafeln also nie überflüssig sein werden.

Gern würde ich es sehen, wenn mir ein Anderer, dem mehr Hülfe, als mir, zu Gebote steht, vorgriffe, und die briggschen Logarithmen für die bezeichnete nicht eben grofse Lücke ebenfalls berechnete; denn es könnten Jahre hingehen, ehe ich, fast ohne alle Hülfe, die ab-

gebrochene lästige Arbeit wieder aufnahme, die ich auch gewiss nicht bis zu der gegenwärtigen Ausdehnung würde fortgeführt haben, hätte nicht die lebhaftere Vorstellung des Nutzens mir die nöthige Ausdauer verschafft und den Widerwillen vermindert, welchen der dabei nöthige Mechanismus des Interpolirens erzeugt.

8.

Was den Inhalt der diesen Tafeln beizufügenden Theorie betrifft, so werde ich darüber hier nicht ferner reden, sondern nur noch eine allgemeine Auflösung der unreinen cubischen Gleichungen mittheilen, wodurch die Cardanische Formel überflüssig wird, weil sie in der Bequemlichkeit nachsteht. Es sei:

$$x^3 = 3bx + c,$$

so sind die drei Wurzeln der Gleichung:

$$x = (2\sqrt{b}) \cdot \text{Cos}(\tfrac{1}{3}k),$$

$$x' = (2\sqrt{b}) \cdot \text{Cos}(\tfrac{1}{3}k + \tfrac{2}{3}\pi i),$$

$$x'' = (2\sqrt{b}) \cdot \text{Cos}(\tfrac{1}{3}k - \tfrac{2}{3}\pi i),$$

wenn man den Arcus k nach der Formel: $\text{Cos} k = \tfrac{1}{2}c \cdot b^{-\frac{1}{2}}$ bestimmt. Diese Auflösung ist ganz allgemein. Nach den besonderen Werthen von b und c müssen aber für die numerische Auflösung einzelne Fälle unterschieden und nach ihnen die allgemeinen Formeln modificirt werden.

1. Wenn b und c positiv und $\tfrac{1}{2}c \cdot b^{-\frac{1}{2}} > 1$ ist:

$$\text{Cos} k = \tfrac{1}{2}c \cdot b^{-\frac{1}{2}},$$

$$x = (2\sqrt{b}) \cdot \text{Cos} \tfrac{1}{3}k,$$

$$x' = -\frac{x}{2} + (\sqrt{3}b)i \cdot \text{Sin} \tfrac{1}{3}k,$$

$$x'' = -\frac{x}{2} - (\sqrt{3}b)i \cdot \text{Sin} \tfrac{1}{3}k.$$

2. Wenn b positiv, aber c negativ und die absolute Gröfse $\tfrac{1}{2}c \cdot b^{-\frac{1}{2}} > 1$ ist:

$$\text{Cos} k = -\tfrac{1}{2}c \cdot b^{-\frac{1}{2}},$$

$$x' = -(2\sqrt{b}) \cdot \text{Cos} \tfrac{1}{3}k,$$

$$x = -\frac{x'}{2} + i(\sqrt{3}b) \cdot \text{Sin} \tfrac{1}{3}k,$$

$$x'' = -\frac{x'}{2} - i(\sqrt{3}b) \cdot \text{Sin} \tfrac{1}{3}k.$$

3. Wenn b negativ ist, so hat man:

$$\text{Sin} k = \tfrac{1}{2}c \cdot (-b)^{\frac{1}{2}},$$

$$x = (2\sqrt{-b}).\sin \frac{1}{3}k,$$

$$x' = -\frac{x}{2} + i(\sqrt{-3b}).\cos \frac{1}{3}k,$$

$$x'' = -\frac{x}{2} - i(\sqrt{-3b}).\cos \frac{1}{3}k,$$

4. Wenn zwar b positiv, aber $\frac{1}{2}c.b^{-\frac{1}{2}} < 1$ ist, dann hat man

$$\cos k = \frac{1}{2}c.b^{-\frac{1}{2}},$$

$$x = (2\sqrt{b}).\cos \frac{1}{3}k,$$

$$x' = (2\sqrt{b}).\cos(\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}\pi) = -\frac{x}{2} + (\sqrt{3b}).\sin \frac{1}{3}k,$$

$$x'' = (2\sqrt{b}).\cos(\frac{1}{3}k - \frac{2}{3}\pi) = -\frac{x}{2} - (\sqrt{3b}).\sin \frac{1}{3}k.$$

In dem vierten und einzigen Falle kommen also die cyklischen Potenzial-Functionen in Gebrauch. Die Herleitung dieser speciellen Formeln aus den allgemeinen erfolgt nach sehr einfachen und allgemeinen Regeln; statt ihrer füge ich ein Beispiel bei, welches in Anwendung der vermittelnden Function gerechnet ist.

9.

Die Wurzeln der Gleichung $x^3 = 20514x - 1988260$ sind: -178 ; $89 + i.57$ und $89 - i.57$. Sehen wir, was die Rechnung giebt. Weil $\log(\frac{1}{2}c.b^{-\frac{1}{2}})$ positiv und c negativ ist, so rechnet man nach den Formeln 2. Setzt man, um die Vermittelung einzuführen, sogleich Ωk für k , so hat man:

$$\cos k = \frac{1}{-\frac{1}{2}c.b^{-\frac{1}{2}}}$$

und

$$x' = \frac{-2\sqrt{b}}{\cos l(\frac{1}{3}\Omega k)},$$

$$x = -\frac{x'}{2} + i(\sqrt{3b}).\operatorname{tang} l(\frac{1}{3}\Omega k),$$

$$x'' = -\frac{x'}{2} - i(\sqrt{3b}).\operatorname{tang} l(\frac{1}{3}\Omega k).$$

Also

$$\log \cos k = 9,7549504,5 - 10,$$

$$k = 0^{\circ}61482497 \text{ (neue Eintheilung),}$$

$$\Omega k = 0,3881493,$$

$$\frac{1}{3}\Omega k = 0,1293831,$$

$$l\frac{1}{3}\Omega k = 0^{\circ}24112271,$$

$$\text{also } \log x' = 2,2504200, \text{ ferner } \log(\sqrt{3b}).\operatorname{tang} l\frac{1}{3}\Omega k = 1,7558748,$$

$$\text{und } \log 178 = 2,2504200 \quad \text{und} \quad \log 57 = 1,7558748.$$

Also sind die Wurzeln, wie oben angegeben worden ist. Eine so große Übereinstimmung dieser mit sieben Decimalziffern geführten Rechnung hatte ich, angesehen die Größe der Zahlen b und c im behandelten Beispiele, selbst nicht erwartet. Es bedarf der Erinnerung nicht, daß die Rechnung noch ansehnlich kürzer würde gewesen sein, wenn man sie ohne die vermittelnde Function geführt und die Tafeln der logarithmisch-hyperbolischen Functionen selbst benutzt hätte.

Was endlich die Wahl der mit deutschen Buchstaben gedruckten Vorsilben: Cos, Sin, Tang, Cot, Arc. Sin, Arc. Cos, Arc. Tang; Arc. Cot und auch die des Zeichens $\mathcal{L}$ betrifft, so wird sie außerhalb Deutschland vielleicht nicht ganz gefallen. Man kann dafür lateinisch geschriebene Vorsilben mit großen Anfangsbuchstaben und so auch für $\mathcal{L}$ nehmen L , um durch diese großen Buchstaben die Unterscheidung von den cyklischen Functionen anzugeben. Auffallender aber ist allerdings die Unterscheidung durch die von mir genommenen deutschen Buchstaben. Möge meine Mühe nicht vergebens gewesen sein!

23.

Von der Zerlegung symmetrischer Polyöder.

In Folge des Lehrsatzes S. 100., 4ter Band dieses Journals.

(Von Herrn M.....)

Wenn in zwei dreiseitigen Pyramiden (Tetraëdern) drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten der einen dreien in einer Ecke zusammenstossenden Kanten der andern, und die von den ersten gebildeten ebenen Winkel den Winkeln, welche die letztern einschliessen, stückweise gleich sind, so sind die beiden Pyramiden, wie bekannt, entweder congruent oder symmetrisch. Sind aber ausserdem in der ersten Pyramide, und also auch in der zweiten, zwei dieser Kanten und die Winkel, welche sie mit der dritten bilden, unter sich gleich, so fällt der zuletzt genannte Fall weg, und beide Pyramiden sind congruent.

Es sei nun $Sabc\dots n$ eine n seitige Pyramide, um deren Grundfläche ein Kreis beschrieben werden kann, und deren Spitze S so liegt, daß die von dieser Spitze nach dem Mittelpunkt O der Grundfläche gezogene Gerade SO senkrecht auf letzterer steht, so wird sich um die Grundfläche $a'b'c'\dots n'$ der ihr symmetrischen Pyramide $S'a'b'c'\dots n'$ ein Kreis von gleichem Radius beschreiben lassen, und die von der Spitze S' nach dem Mittelpunkt O' der Grundfläche $a'b'c'\dots n'$ gezogene Gerade $S'O'$ wird senkrecht auf letzterer sein. Jede der beiden Pyramiden läßt sich nun in n dreiseitige Pyramiden $SOab$, $SObc$, $\dots$ $SOmn$ und $S'O'a'b'$, $S'O'b'c'$, $\dots$ $S'O'm'n'$ zerlegen, welche nach dem was anfangs bemerkt worden, respective congruent sind. Man kann demnach folgenden Satz aufstellen:

Von zwei symmetrischen n seitigen Pyramiden, deren Grundflächen centrisc nach den Ecken sind, und deren Spitzen senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundflächen liegen, läßt sich jede in n dreiseitige Pyramiden zerlegen, so daß die einen den andern einzeln genommen congruent sind.

Construirt man zu einem Polyöder P , durch dessen Eckpunkte eine Kugelfläche gelegt werden kann, ein ihm symmetrisches Polyöder

P' , indem man von den Eckpunkten $a, b, c, \dots$ des ersteren auf eine beliebige Ebene die Senkrechten $a\alpha, b\beta, c\gamma, \dots$ fällt, und auf den Verlängerungen derselben, jenseits der Ebene, gleiche Stücke $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \dots$ annimmt, und fällt man dann vom Mittelpuncte O des Polyöders P auf dieselbe Ebene eine Senkrechte $O\omega$, auf deren Verlängerung man $\omega O' = O\omega$ annimmt, so geht eine, aus dem Mittelpunct O' mit dem Radius $O\alpha$ beschriebene Kugelfläche durch alle Eckpunkte des Polyöders P' . Denn, weil $O\omega = \omega O'$; $\omega\alpha = \omega\alpha$; $\alpha\alpha = \alpha'\alpha$ und die Winkel $O\omega\alpha$, $O'\omega\alpha$, $\omega\alpha\alpha$ und $\omega\alpha\alpha'$ rechte sind, so ist das Viereck $O\omega\alpha\alpha \cong O'\omega\alpha\alpha'$; daher ist $O\alpha = O'\alpha'$, und aus ähnlichen Gründen ist $Ob = O'b'$, $Oc = O'c'$ u. s. w.; also ist $O\alpha = O'b' = O'c'$ u. s. w.

Jedes der Polyöder P und P' läßt sich nun, indem man eine jede Seitenebene zur Grundfläche und den Mittelpunct O , oder O' , zur Spitze annimmt, in so viele Pyramiden zerlegen, als das Polyöder Seitenflächen hat; die Pyramiden in dem einen Polyöder sind alsdann im Allgemeinen denen im andern symmetrisch, ihre Grundflächen sind centrisc nach den Ecken und ihre Spitzen liegen senkrecht über den Mittelpuncten dieser Grundflächen, was aus bekannten Eigenschaften der Kugel folgt. Da sich nun je zwei dieser Pyramiden, nach dem vorher aufgestellten Satze, in so viele congruente Tetraëder zerlegen lassen, als ihre Grundflächen Seitenlinien haben, jede Seitenlinie aber zu zwei Grundflächen gehört, so hat man folgenden Satz:

Von zwei symmetrischen Polyödern, welche centrisc nach den Ecken sind, läßt sich ein jedes in doppelt so viele Tetraëder zerlegen, als es Kanten hat, und zwar so, daß die Tetraëder in dem einen Polyöder denen im andern einzeln congruent sind.

Da jedes Tetraëder einen Mittelpunct der Ecken hat, so kann von zwei symmetrischen Tetraëdern (weil hier die Anzahl der Kanten gleich 6 ist) jedes in 12 Tetraëder zerlegt werden, so daß die des einen denen des andern einzeln congruent sind.

Von zwei beliebigen symmetrischen Polyödern kann aber ein jedes, wenn die Anzahl der Ecken gleich e ist, und wenn ε die Anzahl derjenigen Ecken bedeutet, welche mit einer bestimmten Ecke E in denselben Grenzflächen liegen, in $2(e-2)$ oder auch in $(2e-\varepsilon-4)$ Te-

träeder *) zerlegt werden, so daß die Tetraëder des einen denen des andern Polyëders symmetrisch sind, und jedes von solchen zwei symmetrischen Tetraëdern läßt sich, wie eben gezeigt, in 12 Tetraëder zerlegen, die einzeln congruent sind; daher der Lehrsatz:

Von zwei symmetrischen Polyëdern läßt sich ein jedes in $24(e-2)$ oder auch in $12(2e-e-4)$ Tetraëder zerlegen, so daß die einen den anderen congruent sind.

*) In jedem Polyëder nemlich ist bekanntermassen die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche gleich $4(e-2)$ rechten Winkeln. Ist das Polyëder von lauter Dreiecken begrenzt, so muß, weil in jedem Dreiecke die Summe der Winkel zwei rechte beträgt, die Anzahl der begrenzenden Dreiecke gleich $2(e-2)$ seyn. Ist aber das Polyëder auch von andern Figuren begrenzt, so läßt sich jedes dieser Polygone durch Diagonalen aus einem seiner Eckpunkte in Dreiecke zerlegen, ohne daß dadurch neue Winkelspitzen entstehen; daher ist auch dann noch die Anzahl aller Dreiecke gleich $2(e-2)$.

Nimmt man nun diese Dreiecke zu Grundflächen und einen Punkt innerhalb des Polyëders zur Spitze von Pyramiden, so ist der Körper in $2(e-2)$ Tetraëder getheilt.

Nimmt man aber den Eckpunkt *E* zur gemeinschaftlichen Spitze der Pyramiden, so erhält man offenbar e Pyramiden weniger, also $2(e-2)-e = 2e-e-4$.

Anm. d. Verf.

24.

Über einen allgemeinen, die Bernoullischen Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck.

(Von Herrn Prof. H. F. Scherk zu Halle.)

In einer vor einiger Zeit erschienenen Abhandlung *) über die numerischen Coëfficienten der Reihe, die man erhält, wenn man die Secante nach den graden Potenzen des Bogens entwickelt, habe ich unter andern auf die große Analogie aufmerksam gemacht, die zwischen den dort gegebenen independenten Ausdrücken jener Coëfficienten und der Bernoullischen Zahlen Statt findet. Man sieht aber sehr leicht, was auch schon dort erwähnt wurde, daß man beide Arten von Coëfficienten, die der Secantenreihe und die der Tangenten-, Cotangenten- und Cosecantenreihe, also die Bernoullischen Zahlen, gar nicht von einander zu trennen und als Coëfficienten verschiedener Reihen-Entwicklungen zu betrachten braucht. Bezeichnet **) man nemlich die 1ste, 2te, ... nte Bernoullische Zahl resp. durch $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$, ... $\overset{2n-1}{B}$, und den 1sten, 2ten, ... nten Secanten-Coëfficienten resp. durch $\overset{2}{B}$, $\overset{4}{B}$, ... $\overset{2n-1}{B}$, so hat man

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) &= \sec x + \tan x \\ &= 1 + \frac{2^2(2^2-1)}{1.2} \overset{1}{B} x + \frac{\overset{2}{B}}{1.2} x^2 + \frac{2^4(2^4-1)}{1.2.3.4} \overset{3}{B} x^3 + \frac{\overset{4}{B}}{1.2.3.4} x^4 + \dots \\ &\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1.2\dots 2n} \overset{2n-1}{B} x^{2n-1} + \frac{\overset{2n}{B}}{1.2\dots 2n} x^{2n} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Also sind die Secanten-Coëfficienten und die Bernoullischen Zahlen zugleich die Coëfficienten der nach den Potenzen von x entwickelten trigonometrischen Function $\tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right)$. Kann man daher auf irgend

*) S. meine „Mathematische Abhandlungen.“ Berlin, 1825, bei Reimer. Erste Abh.

**) Dem Zwecke dieses Aufsatzes gemäß, habe ich hier eine andere Bezeichnung als in der erwähnten Abhandlung gewählt. Was hier $\overset{1}{B}$, $\overset{2}{B}$, ... $\overset{2n-1}{B}$, $\overset{2n}{B}$ ist, wurde dort durch $\overset{1}{B}$, α , . . . $\overset{n}{B}$, α bezeichnet.

eine Weise den allgemeinen Ausdruck des Coëfficienten von x^n , es sei n gerade oder ungerade, in dieser Reihe in entwickelter oder unentwickelter Form angeben, so wird derselbe die Bernoullischen Zahlen und die Coëfficienten der Secantenreihe zugleich darstellen: jene, wenn man n ungerade, diese, wenn man n gerade annimmt. Mit der Entwicklung eines solchen Ausdrucks soll gegenwärtiger Aufsatz sich beschäftigen.

Da nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) = \\ \tan y + \frac{\partial \tan y}{\partial y} \cdot \frac{x}{2} + \frac{\partial^2 \tan y}{\partial y^2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n} \cdot \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot 2^n} + \text{etc.} \end{aligned}$$

nach der Differentiation $y = \frac{1}{4}\pi$ gesetzt, ist, so sieht man offenbar, daß es nur darauf ankömmt, $\frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n}$ zu finden, indem eigentlich $\frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n}$ schon der verlangte allgemeine Ausdruck, nur in unentwickelter Form, ist.

Es ist aber

$$\begin{aligned} \tan(y+k) &= \tan y + \frac{\partial \tan y}{\partial y} k + \frac{\partial^2 \tan y}{\partial y^2} \cdot \frac{k^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n} \cdot \frac{k^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \text{etc.} \\ &= \tan y + \sum \frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n} \cdot \frac{k^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}, \end{aligned}$$

die Summe für $n = 1, 2, 3 \dots$ genommen, und

$$\begin{aligned} \tan(y+k) &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{(y+k)\sqrt{-1}} - e^{-(y+k)\sqrt{-1}}}{e^{(y+k)\sqrt{-1}} + e^{-(y+k)\sqrt{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{2y\sqrt{-1}} - e^{-2k\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2k\sqrt{-1}}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(-1 + \frac{2e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}} + e^{-2k\sqrt{-1}}} \right). \end{aligned}$$

Entwickelt man also diesen Ausdruck nach den Potenzen von k , so ist der Coëfficient von $\frac{k^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = \frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n}$. Diese Entwicklung haben aber

Euler und Laplace bereits vorgenommen. Der erste hat nemlich gefunden, und der zweite direct bewiesen*), daß, wenn man

$$\frac{p-1}{p-e^n} = 1 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots + A_n u^n + \text{etc.} = 1 + \sum A_n u^n \quad (\text{für } n=1, 2, 3 \dots)$$

setzt, wo p und u beliebige Zahlen sind, und e die Zahl, deren natürlicher Logarithmus $= 1$ ist, bedeutet, man

$$A = \frac{A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \dots + A_n p^{n-n} + \dots + A_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-1)^n}$$

*) S. Euleri *Institut. calc. diff.* P. II. Cap. VII. §. 173 ff. und Lacroix *traité du calc. diff. etc.* Seconde édit. T. III. p. 107 ff.

habe, wobei

$$A_1^n = 1,$$

$$A_2^n = 2^n - (n+1),$$

$$A_3^n = 3^n - (n+1)2^n + \frac{(n+1)n}{1.2},$$

$$A_4^n = 4^n - (n+1)3^n + \frac{(n+1)n}{1.2}2^n - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}$$

sei. Setzt man hierin $p = -e^{2y\sqrt{-1}}$, $u = -2k\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\frac{p-1}{p-e^n} = \frac{e^{2y\sqrt{-1}}+1}{e^{2y\sqrt{-1}}+e^{-2k\sqrt{-1}}} = 1 + \sum (-1)^n (\sqrt{-1})^n 2^n A_k^n.$$

Also

$$\frac{e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+e^{-2k\sqrt{-1}}} = \frac{e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1} + \frac{e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1} \sum (-1)^n (\sqrt{-1})^n 2^n A_k^n.$$

Folglich

$$\begin{aligned} \tan(y+k) &= \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{e^{2y\sqrt{-1}}-1}{2e^{2y\sqrt{-1}}+1} + \frac{2e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1} \sum (-1)^n (\sqrt{-1})^n 2^n A_k^n \right) \\ &= \tan y + \frac{e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1} \sum (-1)^n (\sqrt{-1})^{n-1} 2^{n+1} A_k^n \quad (\text{für } n=1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit dem obigen Ausdrucke für

$$\tan(y+k) = \tan y + \sum \frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n} \cdot \frac{k^n}{1.2.3 \dots n},$$

für dieselben Werthe von n , so hat man

$$\frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n} = \frac{(-1)^n (\sqrt{-1})^{n-1} 2^{n+1} \cdot 1.2.3 \dots n \cdot e^{2y\sqrt{-1}}}{e^{2y\sqrt{-1}}+1} A_k^n.$$

Es ist aber, wenn für p sein Werth gesetzt wird:

$$\begin{aligned} A^n &= (-1)^{n-1} \frac{\{A_1^n e^{2(n-1)y\sqrt{-1}} - A_2^n e^{2(n-2)y\sqrt{-1}} + \dots + (-1)^{h-1} A_h^n e^{2(n-h)y\sqrt{-1}} + \dots + A_n^n\}}{(-1)^n \cdot 1.2.3 \dots n \cdot (e^{2y\sqrt{-1}}+1)^n} \\ &= -\frac{e^{(n-1)y\sqrt{-1}}}{1.2.3 \dots n (e^{2y\sqrt{-1}}+1)^n} \{A_1^n e^{(n-1)y\sqrt{-1}} - A_2^n e^{(n-3)y\sqrt{-1}} + \dots + (-1)^{h-1} A_h^n e^{(n-2h+1)y\sqrt{-1}} + \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n-1} A_n^n e^{-(n-1)y\sqrt{-1}}\} \\ &= -\frac{e^{(n-1)y\sqrt{-1}}}{1.2.3 \dots n (e^{2y\sqrt{-1}}+1)^n} R, \end{aligned}$$

wenn die in Klammern eingeschlossene Reihe durch R bezeichnet wird.

Demnach ist

$$\frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n} = \frac{(-1)^{n+1} (\sqrt{-1})^{n-1}}{\left(\frac{e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}}{2}\right)^{n+1}} R = \frac{(-1)^{n+1} (\sqrt{-1})^{n-1}}{\cos y^{n+1}} R.$$

Aus der Reihe R können die unmöglichen Quantitäten weggeschafft werden, wenn man die gleich weit von Anfang und Ende abstehenden Glieder zu einander setzt, und bemerkt, daß

$$A_1^n = A_n^n, A_2^n = A_{n-1}^n, \dots A_h^n = A_{n-h+1}^n *).$$

Alsdann ist nemlich:

$$\begin{aligned} (\sqrt{-1})^{n-1} R &= A_1^n \left\{ (-1)^{\frac{n-1}{2}} e^{(n-1)y\sqrt{-1}} + (-1)^{-\frac{(n-1)}{2}} e^{-(n-1)y\sqrt{-1}} \right\} \\ &+ A_2^n \left\{ (-1)^{\frac{n-3}{2}} e^{(n-3)y\sqrt{-1}} + (-1)^{-\frac{(n-3)}{2}} e^{-(n-3)y\sqrt{-1}} \right\} + \dots \\ &\dots + A_h^n \left\{ (-1)^{\frac{n-2h+1}{2}} e^{(n-2h+1)y\sqrt{-1}} + (-1)^{-\frac{(n-2h+1)}{2}} e^{-(n-2h+1)y\sqrt{-1}} \right\} + \text{etc.} \end{aligned}$$

*) Diese Eigenschaft der in Rede stehenden, bei Summationen von Reihen bekanntlich sehr häufig vorkommenden Coëfficienten erhält man sehr leicht aus der Art ihrer Entstehung. Es war nemlich

$$\frac{p-1}{p-e^u} = 1 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots + A_n u^n + \text{etc.}$$

wo

$$(1.) A = \frac{A_1 p^{n-1} + A_2 p^{n-2} + \dots + A_h p^{n-h} + \dots + A_{n-h+1} p^{h-1} + \dots + A_n}{1.2.3 \dots n (p-1)^n}.$$

Es sind also $A_1, A_2, \dots, A_n$ Functionen von p , hingegen $A_1^n, A_2^n, \dots$ von p unabhängig. Setzt man nun $\frac{1}{p}$ für p , so hat man

$$(2.) \left\{ \begin{aligned} \frac{\frac{1}{p}-1}{\frac{1}{p}-e^u} &= \frac{1-p}{1-p e^u} = 1-p + \frac{p(p-1)}{p-e^u} = 1-p A_1 u + p A_2 u^2 - \dots + (-1)^n p A_n u^n + \dots \\ &= 1 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n + \dots \end{aligned} \right.$$

wo

$$(3.) \left\{ \begin{aligned} a &= \frac{A_1 \left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + A_2 \left(\frac{1}{p}\right)^{n-2} + \dots + A_h \left(\frac{1}{p}\right)^{n-h} + \dots + A_{n-h+1} \left(\frac{1}{p}\right)^{h-1} + \dots + A_n}{1.2.3 \dots n \cdot \left(\frac{1}{p}-1\right)^n} \\ &= (-1)^n \frac{p \{ A_1^n + A_2^n p + \dots + A_h^n p^{h-1} + \dots + A_{n-h+1}^n p^{n-h+1} + \dots + A_n^n p^{n-1} \}}{1.2.3 \dots n (p-1)^n} \end{aligned} \right.$$

Nach (1.) ist $a = -p A_1$, $a = p A_2$, $\dots a = (-1)^n p A_n$, also wenn hierin für a und A ihre Werthe aus (1.) und (3.) substituirt werden:

$A_1^n + A_2^n p + \dots + A_h^n p^{h-1} + \dots + A_n^n p^{n-1} = A_1^n p^{n-1} + A_2^n p^{n-2} + \dots + A_{n-h+1}^n p^{h-1} + \dots + A_n^n$; und da diese Gleichung für jedes p gilt, so hat man offenbar:

$$A_1^n = A_n^n, A_2^n = A_{n-1}^n, \dots A_h^n = A_{n-h+1}^n.$$

Diese Gleichungen werden gewöhnlich auf eine andere Art, etwa aus der Theorie der Differenzen (s. z. B. Lacroix a. a. O. pag. 110 ff.) bewiesen, was aber die Kenntniß der Coëfficienten A_1, A_2 etc. voraussetzt. Die hier gegebene Beweisart kann auch in anderen Fällen auf eine ähnliche Weise angewandt werden, vorzüglich alsdann, wenn man die Coëfficienten noch nicht kennt.

Da aber für jedes ganze r , $(-1)^{\pm \frac{1}{2}r} = e^{\pm \frac{1}{2}r\pi\sqrt{-1}}$, also

$$(-1)^{\frac{1}{2}r} e^{r\gamma\sqrt{-1}} + (-1)^{-\frac{1}{2}r} e^{-r\gamma\sqrt{-1}} = e^{(\frac{1}{2}r\pi + r\gamma)\sqrt{-1}} + e^{-(\frac{1}{2}r\pi + r\gamma)\sqrt{-1}} = 2 \cos(\frac{1}{2}r\pi + \frac{1}{2}r\gamma)$$

ist, so wird

$$(\sqrt{-1})^{n-1} R = 2 A_1 \cos(n-1)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) + 2 A_2 \cos(n-3)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) + \dots \\ \dots + 2 A_h \cos(n-2h+1)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) + \text{etc.}$$

Das letzte Glied dieser Reihe ist, für ein gerades n , $= 2 A_{\frac{n}{2}} \cos(\frac{1}{2}\pi + \gamma)$,

und für ein ungerades n , $= A_{\frac{n+1}{2}}$.

Beide Fälle lassen sich entweder durch die Bezeichnung

$$(2-\nu) A_{\frac{n+\nu}{2}} \cos(1-\nu)(\frac{1}{2}\pi + \gamma),$$

wo $\nu = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$ ist, zusammenfassen, oder man kann auch die oben zusammengezogenen, von Anfang und Ende gleich weit abstehenden Glieder wieder von einander trennen, und

$$2 A_1 \cos(n-1)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) = A_1 \cos(n-1)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) + A_n \cos(1-n)(\frac{1}{2}\pi + \gamma), \\ 2 A_2 \cos(n-3)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) = A_2 \cos(n-3)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) + A_{n-1} \cos(3-n)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) \\ \text{etc.}$$

setzen, in welchem Falle man zwischen dem geraden und ungeraden n keinen Unterschied zu machen braucht. Für den gegenwärtigen, rein theoretischen Zweck möchte die zweite Art der ersten vorzuziehen sein. Hiernach hat man also

$$\frac{\partial^n \text{tang } y}{\partial y^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\cos y^{n+1}} \{ A_1 \cos(n-1)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) + A_2 \cos(n-3)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) + \dots + A_n \cos(1-n)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) \} \\ = \frac{(-1)^{n+1}}{\cos y^{n+1}} \sum A_h \cos(n-2h+1)(\frac{1}{2}\pi + \gamma) \quad (\text{für } h = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Hieraus hat man auch $\frac{\partial^n \text{cotang } y}{\partial y^n}$, wenn man $y - \frac{1}{2}\pi$ für y setzt, und dann durch n malige Differentiation der Gleichungen

$$\sec y = \frac{1}{2} \text{tang}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}y) + \frac{1}{2} \text{cotang}(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}y),$$

$$\text{cosec } y = \frac{1}{2} \text{tang } y + \frac{1}{2} \text{cotang } y,$$

auch die n ten Differentialquotienten der Secante und Cosecante.

Man setze nun in den Ausdruck für $\frac{\partial^n \text{tang } y}{\partial y^n}$, $y = \frac{1}{4}\pi$, so ist, da $\cos(n-2h+1)\frac{3}{4}\pi = \cos(n-2h+1)(\pi - \frac{1}{4}\pi) = (-1)^{n-2h+1} \cos \frac{(n-2h+1)}{4}\pi$, und $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{\partial^n \text{tang } y}{\partial y^n} = 2^{\frac{n+1}{2}} \sum A_h \cos \frac{(n-2h+1)}{4}\pi \quad (\text{für } h = 1, 2, 3, \dots, n),$$

folglich ist in der Reihe für $\text{tang}(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$ der Coefficient von x^n ,

$$= \frac{\partial^n \tan y}{\partial y^n} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^n} \quad (\text{für } y = \frac{1}{4}\pi)$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}} \sum A_h^n \cos \frac{(n-2h+1)\pi}{4}.$$

Nun ist aber in der Reihe für $\sec x + \tan x = \tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$ der Coefficient von x^{2n-1} ,

$$= \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} B$$

und von x^{2n} ,

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} \tilde{B},$$

das heisst, der Coefficient von x^n ist, wenn n ungerade ist,

$$= \frac{2^{n+1}(2^{n+1}-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)} \tilde{B}$$

und, wenn n gerade ist,

$$= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \tilde{B},$$

welche beide Fälle sich unter der Bezeichnung $\frac{2^{v n + v}(2^{v n + v} - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot (v n + 1)} \tilde{B}$, wo die obige Bedeutung von $v = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$ beibehalten ist, zusammenfassen lassen. Hieraus folgt also

$$\text{oder endlich} \quad \frac{2^{v n + v}(2^{v n + v} - 1)}{v n + 1} \tilde{B} = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \sum A_h^n \cos \frac{(n-2h+1)\pi}{4},$$

$$\tilde{B} = \frac{2(v n + 1)}{2^{(v+\frac{1}{2})(n+1)}(2^{v n + v} - 1)} \sum A_h^n \cos \frac{(n-2h+1)\pi}{4} \pi \quad (\text{für } h = 1, 2, 3, \dots, n),$$

welches der verlangte Ausdruck ist, der die n te Bernoullische Zahl, oder den n ten Secantencoefficienten angiebt, je nachdem n ungerade oder gerade angenommen wird.

Man kann übrigens gelegentlich bemerken, dass der Ausdruck für die n te Bernoullische Zahl, den man aus dem eben angegebenen erhält, wenn man $2n-1$ für n setzt, nach einigen leichten Reductionen folgende Gestalt annimmt:

$$B = \frac{2n}{2^{3n-2}(2^{2n}-1)} \left\{ \frac{1}{2} A_n - A_{n-2} + A_{n-4} - A_{n-6} + \dots + (-1)^{\frac{n-2+v}{2}} A_{2-v} \right\}.$$

Dieser hat vor dem zuerst von Laplace gegebenen, und dann auf verschiedene Arten bewiesenen Ausdruck *)

$$B = \frac{2n}{2^{2n-1}(2^{2n}-1)} \left\{ \frac{1}{2} A_n - A_{n-1} + A_{n-2} - A_{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} A_1 \right\}$$

den Vorzug, dass er für ein gerades n nur aus $\frac{1}{2}n$, für ein ungerades aus $\frac{n+1}{2}$ Gliedern besteht, während der Laplacesche immer eine Summe von n Gliedern ist.

*) Lacroix *traité etc.* p. 114. Vergl. Klügels Lexicon IV. Theil p. 608., Grunerts mathematische Abhandlungen p. 93. u. A.

25.

Démonstration nouvelle du théorème du binome.

(Par l'Editeur.)

Il y a plusieurs démonstrations différentes du binome; mais toutes celles que je connois, laissent encore, à ce que je crois, plus ou moins à désirer. Ou elles procèdent du cas particulier au cas général, par une sorte d'induction plus ou moins vicieuse, par laquelle on cache plutôt les difficultés qu'on ne les lève, ou elles supposent une partie plus ou moins grande de ce qu'il s'agit de démontrer, par exemple la forme de la série du développement; ou bien elles sont tellement métaphysiques, qu'elles, ne peuvent entrer convenablement dans une saine analyse mathématique; ou enfin elles sont incomplètes, surtout en ce qui regarde le reste de la série, dont le développement ne donne pas l'expression.

Donc une démonstration complète du théorème du binome, vraiment rigoureuse et générale, et en même tems tellement claire et élémentaire, qu'elle soit accessible aux premiers commençans, est encore à désirer. Ce théorème étant une des parties les plus essentielles et des plus remarquables des élémens, sa démonstration semble être importante pour les traités élémentaires de l'analyse et pour l'enseignement de cette science.

Je vais présenter ici une démonstration qui semble satisfaire à toutes les demandes qu'on puisse lui faire. Elle découle, comme corollaire, de la théorie nouvelle et générale des puissances et des facultés analytiques, dont j'ai tracé les premières idées dans un petit écrit en Allemand, sous le titre (*Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten etc. Berlin bei Reimer, 1823.*) et qui tire ses développemens de cette formule générale de développement, que j'ai nommée Théorème général de Taylor, pour le distinguer du théorème particulier connu sous ce nom, et qui, dans toute sa généralité, peut être démontré avec la même simplicité et rigueur qu'on remarquera dans la démonstration du théorème du binome qui va suivre. Je me propose de reproduire, à l'occasion, la théorie générale dont je parle, refondue et

complétée. La démonstration du binôme que je donne ici, est un échantillon de ce traité plus étendu.

Ecrivons l'équation identique

$$1. \quad a^{x+k} = a^x \cdot 1^k + k \cdot \frac{a^{x+k} - a^x \cdot 1^k}{k}.$$

Le facteur 1^k doit être ajouté aux termes a^x pour faire égaliser les nombres des racines différentes qui peuvent avoir lieu des deux cotés de l'équation.

Supposant pour abréger

$$2. \quad \frac{a^{x+k} - a^x \cdot 1^k}{k} = p,$$

on a :

$$3. \quad a^{x+k} = a^x \cdot 1^k + kp.$$

Cela posé, faisons augmenter x de 1 et en même tems diminuer k de 1, de sorte que la valeur de $x+k$ reste la même, l'équation (3.) se changera en

$$4. \quad a^{x+k} = a^{x+1} \cdot 1^k + (k-1)p_1,$$

en désignant par p_1 la valeur variée de p , et en remarquant que $1^{k-1} = 1^k$.

Retranchons l'équation (3.) de celle (4.), nous aurons :

$$5. \quad 0 = (a^{x+1} - a^x) 1^k + (k-1)(p_1 - p) - p.$$

Désignons, comme à l'ordinaire, la différence entre la valeur variée et la valeur primitive d'une quantité quelconque par Δ , mis devant le signe de la quantité, l'équation (5.) pourra être présentée sous la forme :

$$6. \quad 0 = \Delta(a^x \cdot 1^k) + (k-1)\Delta p - p.$$

Augmentons de nouveau dans cette équation x de 1, et diminuons k de 1, nous aurons

$$7. \quad 0 = \Delta(a^{x+1} \cdot 1^k) + (k-2)\Delta p_1 - p_1.$$

Retranchons de cette équation celle (6.), le reste sera

$$8. \quad 0 = \Delta(a^{x+1} \cdot 1^k) - \Delta(a^x \cdot 1^k) + (k-2)(\Delta p_1 - \Delta p) - \Delta p - (p_1 - p),$$

ou, parcequ'en vertu de l'algorithme de Δ , la différence de différences peut être désignée par Δ^2 :

$$9. \quad 0 = \Delta^2(a^x \cdot 1^k) + (k-2)\Delta^2 p - 2\Delta p.$$

La première répétition de l'opération qu'on vient de faire, donnera :

$$10. \quad 0 = \Delta^3(a^x \cdot 1^k) + (k-3)\Delta^3 p - 3\Delta^2 p,$$

et on pourra continuer cette opération à volonté.

En résumant les équations (3., 6., 9., 10.) et celles qui les suivent, on aura, en transportant en même tems au coté gauche les der-

niers termes des équations (3., 6., 9., 10. etc.), et en divisant les équations qu'on trouve par les coefficients de Δp , $\Delta^2 p$ etc.:

[illegible]

Substituant successivement ces équations l'une dans l'autre, on trouvera

$$12. \begin{cases} a^{x+k} = a^x \cdot 1^k + kp, \\ a^{x+k} = a^x \cdot 1^k + k \Delta(a^x \cdot 1^k) + k \cdot (k-1) \Delta^2 p, \\ a^{x+k} = a^x \cdot 1^k + k \Delta(a^x \cdot 1^k) + \frac{k \cdot k-1}{2} \Delta^2(a^x \cdot 1^k) + \frac{k \cdot k-1 \cdot k-2}{2} \Delta^3 p, \end{cases}$$

et généralement, si l'on substitue la valeur $\frac{a^{x+k} - a^x \cdot 1^k}{k}$ de p (2.):

$$13. \quad a^{x+k} = a^x \cdot 1^k + k \Delta(a^x \cdot 1^k) + \frac{k \cdot k-1}{2} \Delta^2(a^x \cdot 1^k) \dots$$

$$\dots + \frac{k \cdot k-1 \dots k-(n-1)}{2 \cdot 3 \dots n} \Delta^n(a^x \cdot 1^k)$$

$$+ \frac{k \cdot k-1 \dots (k-n)}{2 \cdot 3 \dots n} \Delta^n \left(\frac{a^{x+k} - a^x \cdot 1^k}{k} \right).$$

Mais $\Delta(a^x, 1^k)$ n'est autre chose que

$$a^{x+1} \cdot 1^{k-1} - a^x \cdot 1^k = (a^{x+1} - a^x) 1^k = a^x \cdot 1^k (a - 1);$$

donc $\Delta^2(a^x.1^k)$ est égal à $(a-1)\Delta(a^x.1^k) = a^x.1^k(a-1)^2$; $\Delta^3(a^x.1^k)$ est égal à $a^x.1^k(a-1)^3$ etc. Donc l'équation (13.) donne:

$$16. \quad a^{x+k} = a^x \cdot 1^k \left[1 + k(a-1) + \frac{k \cdot k-1}{2} (a-1)^2 + \dots + \frac{k \cdot (k-1) \dots [k-(n-1)]}{2 \cdot 3 \dots n} (a-1)^n \right] \\ + \frac{k \cdot (k-1) \dots (k-n)}{2 \cdot 3 \dots n} \Delta^n \left(\frac{a^{x+k} - a^x \cdot 1^k}{k} \right).$$

Faisant dans cette équation $x=0$ et écrivant $a+1$ au lieu de a , on aura :

$$15. (1+a)^k = 1^k \left[1 + ka + \frac{k \cdot k-1}{2} a^2 + \frac{k \cdot k-1 \cdot k-2}{2 \cdot 3} a^3 + \dots + \frac{k \cdot k-1 \dots [k-(n-1)]}{2 \cdot 3 \dots n} a^n \right] \\ + \frac{k(k-1) \dots (k-n)}{2 \cdot 3 \dots n} \Delta^n \left(\frac{(1+a)^{x(=0)+k} - (1+a)^{x(=0)} 1^k}{k} \right).$$

Voilà la formule connue de développement d'une puissance quelconque du binôme, mais complétée par l'expression de la valeur exacte du reste de la série, et en même tems du facteur 1^k , qui exprime les racines ou valeurs différentes que peut avoir l'expression $(1+a)^k$.

Comme on voit, il n'a été rien supposé arbitrairement; il n'y a non plus aucune condition ou restriction à faire pour les valeurs de la base et de l'exposant du binôme. Le développement a été fondé seulement sur une équation identique, et ne consiste qu'en transformations algébriques.

L'expression finale elle même n'est effectivement qu'identique, comme on peut le voir en développant l'expression du reste. Ce développement fait, tous les termes à droite se détruiront, excepté le seul terme $(1+a)^k$, et l'équation rentrera à l'expression identique $(1+a)^k = (1+a)^k$. Donc la démonstration du théorème de binôme, que nous venons de présenter, est parfaitement générale et rigoureuse, en même tems qu'elle est élémentaire.

Berlin, le 2. Avril 1829.

Précis d'une théorie des fonctions elliptiques.

(Suite du mémoire 19. cah. dern.)

(Par Mr. N. H. Abel de Christiania.)

Chapitre IV.

De l'équation $(1-y^2)(1-c'^2y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2x^2)$.

Considérons maintenant le problème (A.), savoir de satisfaire de la manière la plus générale à l'équation:

$$118. (1-y^2)(1-c'^2y^2) = r^2(1-x^2)(1-c^2x^2),$$

y et r étant des fonctions rationnelles de x . La méthode qui s'offre d'abord de résoudre ce problème est celle des coefficients indéterminés, mais cette méthode ne paroît guère applicable, si le degré de la fonction y est un peu élevé; au moins son application seroit très pénible. Je vais présenter une autre, plus simple et qui est, ce me semble, importante dans la théorie des fonctions elliptiques.

§. 1.

Réduction du problème à celui de satisfaire à l'équation:

$$\frac{\partial y}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta(x, c)}.$$

On voit d'abord que si l'équation dont il s'agit a lieu, on doit avoir nécessairement

$$r = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right),$$

où ε est constant.

Il est facile de voir que les deux facteurs $1-y^2$, $1-c'^2y^2$ ne peuvent s'évanouir en même tems, car dans ce cas on auroit $c'^2 = 1$, et ce cas a été excepté. On doit donc avoir séparément:

$$119. 1-y^2 = r_1^2 \cdot \varphi, \quad 1-c'^2y^2 = r_2^2 \cdot \varphi'$$

où r_1 et r_2 sont des fonctions rationnelles dont le produit est égal à r . Egalement on aura

$$\varphi \cdot \varphi' = (1-x^2)(1-c^2x^2).$$

Or, différentiant les deux équations (119.), on en tirera:

$$120. \quad \begin{cases} -2y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = r_1 \cdot \{r_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\varphi \frac{\partial r_1}{\partial x}\}, \\ -2c'^2 y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = r_2 \cdot \{r_2 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \varphi' \frac{\partial r_2}{\partial x}\}. \end{cases}$$

Mais il est clair que y ne pourra avoir aucun facteur commun, ni avec r_1 , ni avec r_2 , donc il faut que le numérateur de la fraction rationnelle $\frac{\partial y}{\partial x}$ soit divisible par r_1 et par r_2 ; mais ces deux fonctions ne pourront s'évanouir en même tems, donc on doit avoir:

$$121. \quad \frac{\partial y}{\partial x} = r_1 \cdot r_2 \cdot v = r \cdot v,$$

où v est une fonction rationnelle de x , qui ne devient pas infini en attribuant à x une valeur qui donne $r=0$. Soit $y = \frac{p}{q}$, où p et q sont deux fonctions entières de x sans diviseur commun, on aura évidemment:

$$122. \quad \begin{cases} r = \frac{\theta}{q^2}, \\ \text{donc:} \\ q^2 \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \theta \cdot v = \frac{q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x}}{\frac{\partial x}}. \end{cases}$$

Cela fait voir que v est une fonction entière. Or je dis que v se réduira à une constante. Désignons par m et n les degrés des fonctions p et q , et par μ et ν ceux de θ et v . Cela posé, il y a trois cas.

Cas I. $m > n$.

Dans ce cas l'équation

$$123. \quad (q^2 - p^2)(q^2 - c'^2 p^2) = \theta^2 (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$$

fait voir que

$$4m = 2\mu + 4;$$

mais comme on a

$$\theta \cdot v = \frac{q \frac{\partial p}{\partial x} - p \frac{\partial q}{\partial x}}{\frac{\partial x}},$$

on trouve

$$\mu + \nu = m + n - 1,$$

donc:

$$\nu < 2m - \mu - 1,$$

c'est-à-dire, puisque $2m - \mu = 2$:

$$\nu < 1,$$

donc:

$$\nu = 0,$$

et par conséquent v constant.

Cas II. $n < m$.

On aura de la même manière:

$$4n = 2\mu + 4; \quad 2n - \mu = 2, \\ \nu < 2n - \mu - 1, \quad \nu < 1, \quad \nu = 0,$$

donc aussi dans ce cas ν sera égal à une constante.

Cas III. $n = m$.

Dans ce cas il peut arriver que le degré de l'une des fonctions

$$q - p, \quad q + p, \quad q - c'p, \quad q + c'p$$

soit moindre que $n = m$. Soit donc par exemple

$$q - p = \Phi,$$

où le degré de Φ , que nous désignerons par $m - k$, ne pourra surpasser m .

On aura en vertu de (123.):

$$4m - k = 2\mu + 4,$$

d'où:

$$2m - \mu = 2 - \frac{1}{2}k;$$

maintenant si l'on substitue la valeur de $q = p + \Phi$, on aura:

$$\theta \cdot \nu = \frac{p \frac{\partial q}{\partial x} - q \frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial q}{\partial x}} = \frac{p \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \Phi \frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}},$$

donc:

$$\mu + \nu = m + m - k - 1 = 2m - k - 1, \quad \text{si } k > 0, \quad \text{et}$$

$$\mu + \nu = m + m - k - 2 = 2m - k - 2, \quad \text{si } k = 0.$$

Dans le premier cas on a

$$\nu = 2m - \mu - k - 1 = 1 - \frac{3}{2}k = 0,$$

et dans le second

$$\nu = 2m - \mu - 2 = 0.$$

Le degré de la fonction entière ν est donc dans tous les cas égal à zéro et par conséquent ν se réduit à une constante. En la désignant par ε , on aura:

$$124. \quad \varepsilon \cdot r = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Cela posé, l'équation

$$(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \cdot \varepsilon^{-2} \cdot (1 - x^2)(1 - c^2 x^2)$$

donnera celle-ci:

$$125. \quad \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2)]}} = \frac{\varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\partial x}}{\sqrt{[(1 - x^2)(1 - c^2 x^2)]}},$$

et le problème est ramené par là à celui de satisfaire de la manière la plus générale à cette équation en supposant y rationnel en x . En intégrant, on aura:

$$126. \quad \varpi(y, c') = \varepsilon \cdot \varpi(x, c) + C.$$

En comparant ce résultat à celui que nous avons démontré dans le chapitre II., on aura ce théorème:

Théorème VIII. „Si l'on a une relation quelconque entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques, et qu'on désigne par c le module de l'une d'elles prise à volonté, il se trouvera parmi les autres fonctions au moins une, dont le module est c' , et qui est telle, qu'on ait entre les fonctions de la première espèce, correspondantes respectivement aux modules c' et c , cette relation très simple:

$$\omega(y, c') = \varepsilon \cdot \omega(x, c) + C,$$

où y est une fonction rationnelle de x et ε une quantité constante.”

Ce théorème est de la plus grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques.

Il s'agit maintenant de trouver toutes les valeurs de y et des modules c' et c propres à satisfaire l'équation (125.). Si la fonction y contient des puissances de x supérieures à la première, elle jouira d'une certaine propriété, qui conduira à son expression générale, en supposant connue la solution complète dans le cas où y ne contient que la première puissance de x . C'est pourquoi nous donnerons d'abord la solution dans ce cas:

§. 2.

Solution du problème dans le cas de $y = \frac{\alpha + \beta \cdot x}{\alpha' + \beta' \cdot x}$.

En substituant cette valeur de y dans l'équation:

$$\varepsilon^2(1-y^2)(1-c'^2y^2) = (1-x^2)(1-c^2x^2) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

rien n'est plus facile, que de trouver toutes les solutions possibles. Je ne ferais que les transcrire:

- I. $c' = \pm c, \quad y = \pm x, \quad y = \pm \frac{1}{c x}, \quad \varepsilon = \pm 1,$
- II. $c' = \pm \frac{1}{c}, \quad y = \pm \frac{x}{c}, \quad y = \pm \frac{1}{x}, \quad \varepsilon = \pm c,$
- III. $c' = \pm \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^2, \quad y = \pm \left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right) \cdot \left(\frac{1+x\sqrt{c}}{1+x\sqrt{c}}\right), \quad \varepsilon = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1} \cdot (1+\sqrt{c})^2,$
- IV. $c' = \pm \left(\frac{1+\sqrt{c}}{1-\sqrt{c}}\right)^2, \quad y = \pm \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right) \cdot \left(\frac{1+x\sqrt{c}}{1+x\sqrt{c}}\right), \quad \varepsilon = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1} \cdot (1-\sqrt{c})^2,$
- V. $c' = \pm \left(\frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}} \cdot \frac{1+x\sqrt{-c}}{1+x\sqrt{-c}}, \quad \varepsilon = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1} \cdot (1+\sqrt{-c})^2,$
- VI. $c' = \pm \left(\frac{1+\sqrt{-c}}{1-\sqrt{-c}}\right)^2, \quad y = \pm \frac{1-\sqrt{-c}}{1+\sqrt{-c}} \cdot \frac{1+x\sqrt{-c}}{1+x\sqrt{-c}}, \quad \varepsilon = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1} \cdot (1-\sqrt{-c})^2.$

On voit que le module c' a six valeurs différentes. La fonction y en aura douze, car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de y . Ces formules nous seront utiles pour la solution du problème général.

§. 3.

Propriété générale de la fonction rationnelle y , qui satisfait à une équation de la forme:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Soit, pour abréger:

$$\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2 y^2)]} = \Delta' y \text{ et } \sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]} = \Delta x,$$

l'équation (125.) qu'il s'agit de satisfaire, prendra la forme:

$$127. \quad \frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

où y est supposée fonction rationnelle de x .

Soit

$$128. \quad y = \psi x$$

la fonction cherchée. Si, en réduisant ψx à sa plus simple expression, les puissances de la variable x qui y entrent s'élèvent jusqu'à la μ^{me} inclusivement; nous dirons que ψx est une fonction rationnelle de x du degré μ . Sa forme générale sera donc:

$$129. \quad \psi x = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_\mu x^\mu}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_\mu x^\mu},$$

le numérateur n'ayant de diviseur commun avec le dénominateur, et les deux coefficients A_μ et B_μ n'étant nuls à la fois.

Cela posé, si l'on considère x comme fonction de y , l'équation $y = \psi x$ donnera μ valeurs différentes à x , nécessairement inégales, en supposant y variable. Il est évident que toutes ces valeurs de x satisferont également à l'équation différentielle:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

En désignant donc par x et x' deux de ces valeurs, on aura en même tems:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x'}{\Delta x'}.$$

Donc, en égalant ces deux valeurs de $\frac{\partial y}{\Delta' y}$, on aura

$$\frac{\partial x'}{\Delta x'} = \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Cette relation aura toujours lieu entre deux racines quelconques de l'équation

$$y = \psi x.$$

Il est facile de tirer de là une équation algébrique entre x' et x . En effet l'intégrale complète de cette équation est en vertu de (36.):

$$130. \quad x' = \frac{x \Delta e + e \Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

où e est une constante. Maintenant x et x' étant tous deux racines de $y = \psi x$, on aura :

$$y = \psi x; \quad y = \psi x';$$

donc :

$$131. \quad \psi x' = \psi x,$$

et puisque y est variable, cette équation doit nécessairement avoir lieu pour une valeur quelconque de x . On aura donc immédiatement ce théorème :

Théorème IX. „Si une fonction rationnelle y de x , du degré μ , doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

il faut que cette fonction reste la même, en mettant pour x , μ valeurs différentes de la forme :

$$\frac{x \Delta e + e \Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

e étant constant.”

Ce théorème, nous conduira, comme nous verrons, de la manière la plus simple à l'expression générale de y . Il s'agit seulement de déterminer les valeurs convenables de la constante e ; car celles-ci étant trouvées, rien n'est plus facile que de trouver ensuite toutes les autres conditions nécessaires. Occupons nous d'abord de la recherche de cette constante.

§. 4.

Recherche des racines de l'équation $y = \psi x$.

Soit pour abréger :

$$132. \quad \theta x = \frac{x \Delta e + e \Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2},$$

nous aurons d'après ce que nous venons de voir (131.) :

$$133. \quad \psi(\theta x) = \psi x,$$

où le signe du radical Δx est évidemment arbitraire. Je remarque que cette équation, ayant lieu pour une valeur quelconque de x , subsistera encore en mettant θx au lieu de x . On aura donc :

$$\psi[\theta(\theta x)] = \psi(\theta x) = \psi x.$$

En mettant de nouveau θx au lieu de x et ainsi de suite, on trouve

$$y = \psi x = \psi(\theta x) = \psi(\theta^2 x) = \psi(\theta^3 x) = \dots = \psi(\theta^n x) = \text{etc.},$$

où l'on a écrit pour abrégé :

$$\theta^2 x = \theta \theta x, \quad \theta^3 x = \theta \theta^2 x, \quad \dots \text{etc.} \quad \theta^n x = \theta \theta^{n-1} x.$$

Il suit de là que toutes les quantités de la série

$$134. \quad x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^n x, \dots$$

seront des racines de l'équation $y = \psi x$. Maintenant cette équation, n'ayant qu'un nombre limité de racines, savoir μ , il faut nécessairement que plusieurs quantités de la série (134.) soient égales entre elles. Il s'agit de savoir si cela est possible. Pour cela il faut d'abord avoir l'expression générale de $\theta^n x$ en fonctions de x et e . Supposons pour le moment e indépendamment variable. On aura en vertu de l'équation

$$\theta^n x = \frac{\theta^{n-1} x \cdot \Delta e + e \Delta(\theta^{n-1} x)}{1 - c^2 e^2 (\theta^{n-1} x)^2}.$$

$$\frac{\partial(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{\partial(\theta^{n-1} x)}{\Delta(\theta^{n-1} x)} + \frac{\partial e}{\Delta e}.$$

En mettant dans cette équation successivement $n-1, n-2, \dots, 2, 1$ au lieu de n , et supposant, ce qui est permis, que les radicaux $\Delta(\theta^n x), \Delta(\theta^{n-1} x) \dots \Delta(\theta x), \Delta x$ conservent leurs signes dans deux équations consécutives, on aura sur le champ :

$$\frac{\partial(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{\partial x}{\Delta x} + n \cdot \frac{\partial e}{\Delta e}.$$

Cela posé, cherchons suivant le paragraphe 4. du chapitre I. une fonction rationnelle e_n de e telle, que

$$\frac{\partial e_n}{\Delta e_n} = n \cdot \frac{\partial e}{\Delta e},$$

on aura :

$$\frac{\partial(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{\partial x}{\Delta x} + \frac{\partial e_n}{\Delta e_n}.$$

Mais si l'on fait

$$x' = \frac{x \Delta e_n + e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 \Delta x},$$

on a :

$$\frac{\partial x'}{\Delta x'} = \frac{\partial x}{\Delta x} + \frac{\partial e_n}{\Delta e_n},$$

donc :

$$\frac{\partial(\theta^n x)}{\Delta(\theta^n x)} = \frac{\partial x'}{\Delta x'}.$$

Cette dernière équation donne

$$\theta^n x = \frac{x' \Delta e' + e' \Delta x'}{1 - c^2 e'^2 x'^2},$$

où e' est une constante.

Pour trouver cette constante, faisons $e = 0$; on aura $e_n = 0$ et $\Delta e_n = 1$. Donc la valeur de x' deviendra $x' = x$, et par conséquent celle de $\theta^n x$:

$$\theta^n x = \frac{x \Delta e' + e' \Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Mais puisque $\theta x = x$, on aura encore $\theta^n x = x$, donc:

$$x = \frac{x \Delta e' + e' \Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}.$$

Cette équation, devant avoir lieu pour une valeur quelconque de x , ne pourra subsister à moins qu'on n'ait séparément $e' = 0$, $\Delta e' = 1$; donc on aura:

$$\theta^n x = x',$$

c'est-à-dire:

$$135. \quad \theta^n x = \frac{x \Delta e_n + e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Telle sera l'expression de $\theta^n x$ pour une valeur quelconque du nombre entier n . Elle a en effet, comme on voit, la forme d'une racine quelconque de l'équation $y = \psi x$.

Cela posé, soient $\theta^m x$ et $\theta^{m+n} x$ deux quantités de la série, égales entre elles, dont il existera toujours suivant la remarque plus haut. On aura donc:

$$\theta^{m+n} x = \theta^m x,$$

mais $\theta^{m+n} x$ est évidemment la même chose que $\theta^n(\theta^m x)$, donc en mettant x pour $\theta^m x$, il viendra:

$$136. \quad \theta^n x = x.$$

Une équation de cette forme doit donc toujours avoir lieu quel que soit x . Si elle a lieu effectivement, il est clair que la série (134.) n'aura que n termes différents, car, $\theta^{n-1} x$, passé, les termes se reproduiront dans le même ordre, puisque $\theta^{n+1} x = \theta x$, $\theta^{n+2} x = \theta^2 x$ etc. Si l'on suppose, ce qui est permis, que n , dans l'équation $\theta^n x = x$, a la valeur la plus petite possible pour la même valeur de e , il est clair également que les n quantités

$$137. \quad x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^n x$$

seront nécessairement différentes entre elles. Car si l'on avoit par exemple

$$\theta^m x = \theta^{m+\mu} x,$$

il en résulteroit $\theta^\mu x = x$, ce qui est contre l'hypothèse, attendu que μ est moindre que n .

Il s'agit maintenant de satisfaire à l'équation

$$\theta^n x = x.$$

En y substituant l'expression de $\theta^n x$, donnée par la formule (135.), il viendra:

$$x = \frac{x \triangle e_n + e_n \triangle x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Or il est impossible de satisfaire à cette équation pour une valeur quelconque de x , à moins qu'on n'ait séparément les deux équations:

$$138. \quad e_n = 0, \quad \triangle e_n = 1;$$

et réciproquement: si ces équations subsistent, il en sera de même de l'équation $\theta^n x = x$. Or je dis qu'il sera toujours possible de satisfaire deux équations à la fois.

D'abord si n est impair, les deux quantités e_n et $\frac{\triangle e_n}{\triangle e}$ seront des fonctions rationnelles de e , comme nous l'avons vu chapitre I. §. 4. Si donc on désigne par e une racine quelconque de l'équation

$$139. \quad e_n = 0,$$

il suffit, pour satisfaire à l'équation $\triangle e_n = 1$, de déterminer le radical $\triangle e$ de la manière que:

$$140. \quad \triangle e = \frac{\triangle e}{\triangle e_n},$$

après avoir mis le second membre sous la forme d'une fonction rationnelle en e . Ce-ci se fait voir, en remarquant, que si $e_n = 0$, la quantité $\triangle e_n = \pm \sqrt{[(1 - e_n^2)(1 - c^2 e_n^2)]}$ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1, -1$.

Si au contraire n est un nombre pair, on a vu que $\triangle e_n$ sera une fonction rationnelle de e , de la même sorte que $\frac{\triangle e_n}{1 - c^2 e_n^2}$. En la désignant par ε_n , on doit avoir en vertu des équations (138.):

$$141. \quad \varepsilon_n = 1.$$

Or je dis que si e est une racine quelconque de cette équation, on aura à la fois $e_n = 0, \triangle e_n = 0$. En effet, ayant

$$\varepsilon_n = \frac{\triangle e_n}{1 - c^2 e_n^2} = \frac{\sqrt{(1 - e_n^2)}}{\sqrt{(1 - c^2 e_n^2)}} = 1,$$

on en tire en quarrant:

$$1 - e_n^2 = 1 - c^2 e_n^2,$$

et cela donne:

$$e_n = 0,$$

car c^2 est différent de l'unité. Or ayant $e_n = 0$ et $\varepsilon_n = 1$, on aura évidemment $\triangle e_n = 1$; donc etc.

On pourra donc satisfaire à la fois aux deux équations:

$$e_n = 0, \quad \Delta e_n = 0,$$

et on aura toujours un nombre n^2 de valeurs différentes et convenables de e , car en vertu des formules (51., 55.) les équations $e_n = 0$, $\varepsilon_n = 0$ seront du degré n^2 en e .

Il s'agit maintenant de choisir les valeurs de e qui rendent toutes les n quantités $x, \theta x, \dots, \theta^{n-1}x$ différentes entre elles, car cela est une seconde condition à laquelle doit satisfaire e .

Or pour cela il suffit de rejeter toutes les valeurs de e qui pourroient donner $\theta^\mu x = x$, où μ est moindre que n . On pourra toujours supposer μ facteur de n . En effet soit k le plus grand commun diviseur de μ et n , on pourra trouver deux nombres entiers μ' et n' tels que:

$$\mu' \mu = n' n + k.$$

Or l'équation $\theta^\mu x = x$ donne:

$$\theta^{\mu' \mu} x = x,$$

donc:

$$\theta^{n'n+k} x = x = \theta^k \theta^{n'n} x;$$

mais en vertu de $\theta^n x = x$ on a encore

$$\theta^{n'n} x = x,$$

donc enfin:

$$\theta^k x = x;$$

donc, si $\theta^\mu x = x$, on aura encore: $\theta^k x = x$, où k est diviseur de n . Donc il suffit, de rejeter toutes les valeurs de e , qui pourroient satisfaire en même tems à ces deux équations:

$$e_\mu = 0, \quad \Delta e_\mu = 1,$$

où μ est un facteur de n ; et il faut nécessairement les rejeter toutes, car si l'on a $\theta^\mu x = x$, on a nécessairement $\theta^n x = x$.

Ainsi on trouvera aisément une équation en e , dont toutes les racines donneront des valeurs convenables de cette constante. Si n est un nombre premier impair, on a $\mu = 1$; donc la seule racine qu'il faut rejeter de celles de l'équation

$$e_n = 0,$$

est celle-ci:

$$e = 0.$$

On aura donc un nombre $n^2 - 1$ de valeurs convenables de e . Car l'équation $e_n = 0$ est du degré n^2 .

Il y a une remarque essentielle à faire sur les quantités

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{n-1} x.$$

Savoir, on aura toujours en même tems:

$$142. \quad \theta^n x = \frac{x \Delta e_m + e_m \Delta x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}, \quad \theta^{n-m} x = \frac{x \Delta e_m - e_m \Delta x}{1 - c^2 x^2 e_m^2}.$$

En effet, on a (43.):

$$e_{n-m} = \frac{e_n \Delta e_m - e_m \Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2 e_m^2};$$

mais

$$e_n = 0, \quad \Delta e_n = 1,$$

donc:

$$e_{n-m} = -e_m.$$

On aura également (42.)

$$e_n = \frac{e_m \Delta e_{n-m} + e_{n-m} \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 e_{n-m}^2} = 0,$$

donc à cause de

$$e_{n-m} = -e_m,$$

on aura:

$$\Delta e_{n-m} = \Delta e_m.$$

En substituant ces valeurs de e_{n-m} , Δe_{n-m} dans l'équation

$$\theta^{n-m} x = \frac{x \Delta e_{n-m} + e_{n-m} \Delta x}{1 - c^2 e_{n-m}^2 x^2},$$

on aura précisément la seconde des équations (142.).

Si l'on multiplie entre elles les valeurs de $\theta^n x$ et $\theta^{n-m} x$, le produit sera rationnel, et on trouvera

$$143. \quad \theta^n x \cdot \theta^{n-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

On aura de la même sorte:

$$144. \quad \theta^n x + \theta^{n-m} x = \frac{2x \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 x^2}.$$

Ces formules nous seront utiles dans la suite.

D'après ce qui précède, les n quantités

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{n-1} x$$

sont différentes entre elles et racines de l'équation $y = \psi x$. Le degré μ de cette équation est donc égal à n , s'il ne surpasse ce nombre. Nous verrons plus bas, qu'il suffira de considérer le cas, où $\mu = n$. On pourra même supposer n premier.

§. 5.

Trouver toutes les valeurs de y qui pourront répondre aux valeurs des racines, l'orsqu'on en connoit une seule.

Pour simplifier la solution du problème général, voyons si plusieurs valeurs différentes de la fonction y et du module c' pourront répondre aux mêmes racines de l'équation $y = \psi x$. Rien n'est plus facile

que de trouver les valeurs de y et c' . En effet soit $\psi z = \frac{p}{q}$ où p et q sont des fonctions entières de z sans diviseur commun. En désignant par

$$x, x', x'' \dots x^{(\mu-1)}$$

toutes les racines de l'équation

$$y = \psi x,$$

on aura

$$p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \dots (z - x^{(\mu-1)}),$$

où a et b sont des constantes. Soit maintenant y' une autre valeur de y qui satisfait aux mêmes valeurs de $x, x', x'' \dots$, on aura en désignant par p' et q' les valeurs correspondantes des fonctions p et q :

$$p' - q'y' = (a' - b'y')(z - x)(z - x')(z - x'') \dots (z - x^{(\mu-1)}),$$

donc:

$$\frac{p - qy}{p' - q'y'} = \frac{a - by}{a' - b'y'}.$$

En attribuant à z une valeur constante, il est clair que cette équation donnera pour y' une expression de la forme:

$$145. \quad y' = \frac{\alpha + \beta \cdot y}{\alpha' + \beta' \cdot y},$$

où $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sont des constantes. En désignant maintenant par c'' le module qui répond à y' , on aura en même tems:

$$\frac{\partial y'}{\sqrt{[(1 - y'^2)(1 - c''^2 y'^2)]}} = \varepsilon' \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}; \quad \frac{\partial y}{\Delta y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

donc:

$$146. \quad \frac{\partial y'}{\sqrt{[(1 - y'^2)(1 - c''^2 y'^2)]}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2)]}}.$$

En y substituant l'expression de y' en y , on aura les équations nécessaires pour trouver y', c'', ε' . Ce problème est précisément le même que celui du paragraphe 2. On voit donc, qu'une seule solution de l'équation

$$\frac{\partial y}{\Delta y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}$$

donnera sur le champ cinq autres qui, généralement, seront différentes entre elles. La fonction y aura toujours deux valeurs correspondantes au même module c' , savoir y et $\frac{1}{c'y}$.

§. 6.

Solution complète du problème dans le cas $\mu = n$.

Supposons maintenant que l'équation $y = \psi x$ n'ait d'autres racines que celles-ci:

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{n-1} x,$$

ce qui a lieu toujours si μ est un nombre premier, comme nous le verrons plus bas. On aura alors, si p et q signifient la même chose qu'au paragraphe précédent:

$$147. \quad p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x) \dots (z - \theta^{n-1} x).$$

En attribuant à z une valeur particulière, on aura une expression de y , dans laquelle tout est déterminé, excepté trois quantités constantes. Nous allons voir qu'on pourra toujours trouver ces quantités de sorte que l'équation différentielle proposée soit satisfaite. Pour cela considérons deux cas: n impair et n pair.

Cas I. Si n est un nombre impair.

Soit dans ce cas $n = 2\mu + 1$. Alors l'équation (147.) donne, en attribuant à z la valeur particulière zéro:

$$a' - b'y = -(a - by)x \cdot \theta x \cdot \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x,$$

et de là:

$$148. \quad y = \frac{a' + a \cdot x \cdot \theta x \cdot \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x}{b' + b \cdot x \cdot \theta x \cdot \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x}.$$

Remarquant maintenant qu'en vertu de (143.):

$$\theta^m x \cdot \theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x^2 - e_m^2}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

il est clair que l'expression précédente de y sera une fonction rationnelle de x du degré $2\mu + 1$; donc, puisque cette fonction ne varie pas, en mettant pour x les $2\mu + 1$ valeurs

$$x, \theta x, \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x,$$

ce qui est évident à cause de $\theta^{2\mu+1} x = x$, on conclura que l'équation (147.) a lieu en mettant au lieu de y cette fonction et pour p et q les valeurs correspondantes en z . Cette équation pourra s'écrire comme il suit:

$$149. \quad p - qy = (a - by)(z - x)(z - \theta x)(z - \theta^2 x) \dots (z - \theta^{2\mu-1} x) \dots (z - \theta^\mu x)(z - \theta^{\mu+1} x).$$

Cela posé, faisons:

$$x = 1, \quad -1, \quad \frac{1}{c}, \quad -\frac{1}{c},$$

et désignons les valeurs correspondantes de y par

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta.$$

Puisqu'on a pour ces valeurs de x , $\Delta x = 0$, il suit en vertu des deux équations (142.) du paragraphe 4.:

$$\theta^m x = \theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x \Delta e_m}{1 - c^2 x^2 e_m^2},$$

d'où l'on voit que les facteurs du second membre de l'équation seront

égaux deux à deux, en faisant abstraction du premier facteur $z-x$. On a donc :

$$150. \begin{cases} p-q\alpha = (a-b\alpha)(1-z).\xi^2, \\ p-q\beta = (a-b\beta)(1+z).\xi'^2, \\ p-q\gamma = (a-b\gamma)(1-cz).\xi''^2, \\ p-q\delta = (a-b\delta)(1+cz).\xi'''^2, \end{cases}$$

où ξ, ξ', ξ'', ξ''' seront des fonctions entières de z du degré μ . Mais, puisque

$$151. (\Phi^2 - p^2)(\Phi^2 - c'^2 p^2) = r^2(1-z^2)(1-c^2 z^2),$$

les équations précédentes font voir que les quatre constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ égalent celles-ci :

$$+1, -1, +\frac{1}{c'}, -\frac{1}{c'},$$

et si cette condition a lieu, les quatre équations (150.) donneront évidemment une de la forme (151.), et par suite on aura

$$152. \frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon. \frac{\partial x}{\Delta x},$$

en vertu de ce qu'on a vu dans le paragraphe 1. de ce chapitre.

Puisqu'il suffit de connoître une seule valeur de y , nous pourrons faire par exemple :

$$153. \alpha = 1, \beta = -1, \gamma = \frac{1}{c'}, \delta = -\frac{1}{c'}.$$

Cela posé, il reste de satisfaire à ces équations. Or si l'on fait pour un moment :

$$154. \Phi x = x.\theta x.\theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x = \frac{x(x^2 - e^2)(x^2 - e_2^2) \dots (x^2 - e_\mu^2)}{(1 - c^2 e^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_\mu^2 x^2)},$$

l'expression de y deviendra :

$$155. y = \frac{a' + a.\varphi x}{b' + b.\varphi x},$$

d'où l'on tire, en remarquant que $\Phi(-x) = -\Phi x$, et faisant $x = 1, -1, \frac{1}{c}, -\frac{1}{c}$:

$$\alpha = \frac{a' + a.\varphi(1)}{b' + b.\varphi(1)}, \beta = \frac{a' - a.\varphi(1)}{b' - b.\varphi(1)}, \gamma = \frac{a' + a.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b' + b.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}, \delta = \frac{a' - a.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}{b' - b.\varphi\left(\frac{1}{c}\right)},$$

donc en vertu des équations (153.), on aura :

$$\begin{aligned} a' - b' + (a - b)\varphi(1) &= 0; \quad a' + b' - (a + b)\varphi(1) = 0, \\ a' - \frac{b'}{c} + \left(a - \frac{b}{c}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) &= 0; \quad a' + \frac{b'}{c} - \left(a + \frac{b}{c}\right)\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = 0. \end{aligned}$$

Il est impossible de satisfaire à ces équations à moins que l'une des quantités a' , b' ne soit zéro. Faisons donc $a' = 0$, on aura en même temps $b = 0$. Donc deux des équations précédentes donneront :

$$\frac{b'}{a} = \varphi(1) = c' \cdot \varphi\left(\frac{1}{c}\right),$$

d'où l'on tire la valeur de c' , savoir :

$$c' = \frac{\varphi(1)}{\varphi\left(\frac{1}{c}\right)}.$$

La valeur de y deviendra :

$$y = \frac{a}{b'} \cdot \varphi x = \frac{\varphi x}{\varphi(1)}.$$

Quant aux valeurs de $\varphi(1)$ et $\varphi\left(\frac{1}{c}\right)$, on aura en vertu de l'expression de φx :

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \frac{1-e^2}{1-c^2 e^2} \cdot \frac{1-e_2^2}{1-c^2 e_2^2} \cdots \frac{1-e_\mu^2}{1-c^2 e_\mu^2}, \\ \varphi\left(\frac{1}{c}\right) &= \frac{1}{c^{2\mu+1}} \cdot \frac{1-c^2 e^2}{1-e^2} \cdot \frac{1-c^2 e_2^2}{1-e_2^2} \cdots \frac{1-c^2 e_\mu^2}{1-e_\mu^2}, \end{aligned}$$

donc :

$$\varphi\left(\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c^{2\mu+1} \cdot \varphi(1)}$$

et

$$c' = c^{2\mu+1} \cdot \{\varphi(1)\}^2; \quad \varphi(1) = \frac{\sqrt{c'}}{c^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Enfin, pour avoir la valeur du coefficient ε , il suffit de faire $x = 0$, après avoir différencié l'expression de y . On aura :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm e^2 \cdot e_2^2 \cdot e_3^2 \cdots e_\mu^2 \cdot \frac{1}{\varphi(1)}.$$

Mais comme on a

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varepsilon \cdot \frac{\Delta' y}{\Delta x},$$

il en résulte, en faisant $x = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \varepsilon,$$

donc on pourra faire :

$$\varepsilon = e^2 \cdot e_2^2 \cdot e_3^2 \cdots e_\mu^2 \cdot \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}}.$$

En vertu de ce qui précède, on pourra énoncer le théorème suivant :

Théorème X. „Soit e une racine quelconque de l'équation $e_{2\mu+1} = 0$, mais qui ne puisse être racine d'une autre équation de la même forme $e_{2m+1} = 0$, où $2m+1$ est diviseur de $2\mu+1$. Cela posé,

si l'on détermine la fonction y , le module c' , et le coefficient ε , en vertu des formules:

$$156. \begin{cases} y = \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \cdot \frac{x(e^2 - x^2)(e_2^2 - x^2)(e_3^2 - x^2) \dots (e_\mu^2 - x^2)}{(1 - c^2 e^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2)(1 - c^2 e_3^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_\mu^2 x^2)}, \\ c' = c^{2\mu+1} \cdot \left\{ \frac{(1 - e^2)(1 - e_2^2)(1 - e_3^2) \dots (1 - e_\mu^2)}{(1 - c^2 e^2)(1 - c^2 e_2^2)(1 - c^2 e_3^2) \dots (1 - c^2 e_\mu^2)} \right\}^2, \\ \varepsilon = \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \cdot e^2 \cdot e_2^2 \cdot e_3^2 \dots e_\mu^2, \\ \text{on aura toujours:} \\ \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2)]}} = \pm \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - x^2)(1 - c^2 x^2)]}}, \end{cases}$$

en déterminant convenablement le signe du second membre.

Ayant trouvé de cette sorte un système de valeurs de y , c' , ε , on en aura, d'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, cinq autres à l'aide des formules du paragraphe 1. Il répond six systèmes de valeurs de y , c' , ε à chaque valeur de e . On trouvera même douze valeurs de y , car à chaque valeur de c' répondent deux valeurs différentes de cette fonction. Nous reviendrons plus bas au problème de trouver le nombre total des solutions qui répondent à la même valeur de μ .

Pour donner un exemple des formules ci-dessus, soit $\mu = 1$. Puisque dans ce cas $2\mu + 1 = 3$ est un nombre premier, on pourra, en vertu de ce qu'on a vu plus haut, prendre pour e une racine quelconque de l'équation $e^3 = 0$, excepté la racine zéro. Cette équation, en vertu de la formule qui donne l'expression de x_3 , est du huitième degré, savoir:

$$0 = 3 - 4(1 + c^2)e^2 + 6c^2e^4 - c^4e^8.$$

La quantité e étant une racine quelconque de cette équation, on aura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\sqrt{[(1 - y^2)(1 - c'^2 y^2)]}} &= \pm \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1 - x^2)(1 - c^2 x^2)]}}, \\ c' &= e^3 \cdot \left(\frac{1 - e^2}{1 - c^2 e^2} \right)^2, \quad \varepsilon = c \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{c'} \right)} \cdot e^2, \quad y = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c'}} \cdot \frac{x(e^2 - x^2)}{1 - c^2 e^2 x^2}. \end{aligned}$$

Puisque e^2 est exprimé en c par une équation du quatrième degré, le module c' le pourra être également. Cette équation est:

$$(e' - c)^2 = 4\sqrt{c}c' \cdot (1 - \sqrt{cc'})^2.$$

L'expression générale de y , donnée plus haut, est exprimée en forme des produits. On décomposera aisément cette fraction en fractions partielles. En effet, puisque les racines de l'équation

$$0 = \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \cdot z(z^2 - e^2)(z^2 - e_2^2) \dots (z^2 - e_\mu^2) + y(1 - c^2 e^2 z^2) \dots (1 - c^2 e_\mu^2 z^2)$$

sont les $2\mu + 1$ quantités suivantes

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{2\mu} x,$$

la somme de ces quantités sera égale au coefficient de $z^{2\mu}$, divisé par celui de $z^{2\mu+1}$ et pris avec le signe -1 , donc:

$$x + \theta x + \theta^2 x + \dots + \theta^{2\mu} x = \frac{(-1)^{\mu+1} \cdot c^{2\mu} \cdot e^2 \cdot e_2^2 \dots e_\mu^2}{c^{\mu+\frac{1}{2}} \cdot c'^{-\frac{1}{2}}} \cdot y;$$

donc, en vertu de l'équation

$$\theta^m x + \theta^{2\mu+1-m} x = \frac{2 \Delta e_m \cdot x}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

on aura l'expression suivante de y :

$$157. y = \left\{ x + \frac{2 \Delta e \cdot x}{1 - c^2 e^2 x^2} + \frac{2 \Delta e_2 x}{1 - c^2 e_2^2 x^2} + \dots + \frac{2 \Delta e_\mu x}{1 - c^2 e_\mu^2 x^2} \right\} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c'}} \cdot \frac{(-1)^{\mu+1}}{e^2 \cdot e_2^2 \dots e_\mu^2}.$$

Cas II. Si n est un nombre pair.

Faisons $n = 2\mu$. Puisqu'on a

$$\theta^m x = \frac{x \Delta e_m + e_m \Delta x}{1 - c^2 e_m^2 x^2}, \quad \theta^{2\mu-m} x = \frac{x \Delta e_m - e_m \Delta x}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

on aura, en faisant $m = \mu$:

$$\theta^\mu x = \frac{x \Delta e_\mu + e_\mu \Delta x}{1 - c^2 e_\mu^2 x^2} = \frac{x \Delta e_\mu - e_\mu \Delta x}{1 - c^2 e_\mu^2 x^2}.$$

Cette égalité ne peut subsister à moins que e_μ n'ait une des deux valeurs: zéro ou l'infini. Cela donne lieu à considérer séparément ces deux cas:

A. si $e_\mu = \frac{1}{0}$.

On aura:

$$\theta^\mu x = \pm \frac{1}{c x}.$$

En y substituant $\theta^m x$ au lieu de x , on aura:

$$\theta^{u+m} x = \pm \frac{1}{c \theta^m x}.$$

Les racines de l'équation $y = \psi x$ deviendront donc:

$$x, \pm \frac{1}{c x}, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{\mu-1} x, \theta^{\mu+1} x, \theta^{\mu+2} x, \dots, \theta^{2\mu-1} x,$$

par conséquent on aura:

$$158. p - qy = (a - by)(z - x) \left(z \mp \frac{1}{cx} \right) (z - \theta x)(z - \theta^{2\mu-1} x) \dots (z - \theta^{\mu-1} x)(z - \theta^{\mu+1} x).$$

En désignant par a' et b' les coefficients de $z^{2\mu-1}$ dans les deux fonctions entières p et q , on aura:

$$\begin{aligned} a' - b'y &= -(a - by) \cdot \left\{ x + \frac{1}{c x} + \theta x + \theta^{2\mu-1} x + \dots + \theta^{\mu-1} x + \theta^{\mu+1} x \right\} \\ &= (by - a) \left(x \pm \frac{1}{c x} + \frac{2 \Delta e x}{1 - c^2 e^2 x^2} + \frac{2 \Delta e_2 x}{1 - c^2 e_2^2 x^2} + \dots + \frac{2 \Delta e_{\mu-1} x}{1 - c^2 e_{\mu-1}^2 x^2} \right). \end{aligned}$$

L'expression qu'on en tire pour y sera évidemment une fonction ration-

nelle de x du degré 2μ , et puisqu'elle reste invariable, en mettant pour x les 2μ quantités *)

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots, \theta^{2\mu-1} x,$$

l'équation (158.) aura lieu en mettant pour y cette valeur et pour p et q les valeurs correspondantes en z .

Nous allons voir qu'on aura une valeur convenable de y en faisant

$$a = b' = 0.$$

Cela donne

$$y = \frac{a'}{b} \cdot \frac{1}{x \pm \frac{1}{c}x + \frac{2\Delta e \cdot x}{1-c^2 e^2 x^2} + \dots + \frac{2\Delta e_{\mu-1} \cdot x}{1-c^2 e_{\mu-1}^2 x^2}},$$

expression qui est évidemment de la forme:

$$159. \quad y = A \cdot \frac{x(1-c^2 e^2 x^2)(1-c^2 e_2^2 x^2) \dots (1-c^2 e_{\mu-1}^2 x^2)}{1+a_1 x^2+a_2 x^4+\dots+a_{\mu} x^{2\mu}} = A \cdot \Phi x.$$

Pour trouver la valeur de A , remarquons que si l'on fait $x=1$, y doit avoir une des valeurs: $\pm 1, \pm \frac{1}{c}$. Soit par exemple $y=1$, pour $x=1$, on aura:

$$160. \quad A = \frac{1}{\varphi(1)}.$$

Cela posé, faisons dans l'équation (158.): $x=1$. En remarquant que $a=0$, on aura

$$q-p = (1-z)(1+\bar{c}z) \cdot \varrho^2,$$

où ϱ est une fonction entière de z , car pour $x=1$ on aura:

$$\theta^m x = \theta^{2\mu-m} x = \frac{\Delta e_m}{1-c^2 e_m^2}.$$

En changeant le signe de z dans l'équation précédente, on aura, en remarquant que q est une fonction paire et p une fonction impaire:

$$q+p = (1+z)(1\pm cz) \cdot \varrho'^2.$$

Cela donne:

$$q^2 - p^2 = (1-z^2)(1-c^2 z^2)(\varrho \varrho')^2.$$

Maintenant, puisque

$$161. \quad (q^2 - p^2)(q^2 - c'^2 p^2) = (1-z^2)(1-c^2 z^2) r^2,$$

cela fait voir que la fonction $q^2 - c'^2 p^2$ doit être un carré parfait. Or on pourra toujours déterminer c' de la manière que cette condition soit remplie. Faisons dans l'équation

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pm c}}.$$

*) On a

$$y = \frac{a' + a(x + \theta x + \theta^2 x \dots + \theta^{2\mu-1} x)}{b' + b(x + \theta x + \theta^2 x \dots + \theta^{2\mu-1} x)} \quad \text{et} \quad \theta^{2\mu} x = x.$$

On aura:

$$\theta^{u+m} x = \theta^m (\theta^u x) = \theta^m \left(\pm \frac{1}{c x} \right) = \theta^m \left(\frac{1}{\sqrt{\pm c}} \right),$$

donc:

$$\theta^{u+m} x = \theta^m x.$$

Si donc on désigne par α la valeur de y qui réponde à $x = \frac{1}{\sqrt{\pm c}}$, les racines de l'équation

$$x = \psi z,$$

c'est-à-dire de $p - \alpha q$, seront égales entre elles deux à deux; donc $p - \alpha q$ sera un carré parfait. En changeant le signe de z , on aura $p + \alpha q$, qui par conséquent sera également un carré; donc en multipliant, on aura:

$$p^2 - \alpha^2 q^2 = t^2,$$

où t est une fonction entière de z . En faisant donc

$$c' = \frac{1}{\alpha},$$

l'équation (161.) aura lieu, et par suite on aura:

$$\frac{\partial v}{\Delta' v} = \varepsilon \cdot \frac{\partial z}{\Delta z}, \quad \text{où } \frac{p}{q} = v,$$

c'est-à-dire, en changeant z en x :

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Pour déterminer le coefficient ε , on aura d'abord, en vertu de la dernière équation:

$$\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{pour } x = 0.$$

Mais l'expression de y donnera:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = A = \frac{1}{\varphi(1)},$$

donc:

$$\varepsilon = \frac{1}{\varphi(1)}.$$

Le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de y sera décomposé en facteurs; savoir si lon fait $y = \frac{p'}{q'}$, on aura:

$$p' = \frac{1}{\varphi(1)} \cdot x(1 - c^2 e^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_{\mu-1}^2 x^2).$$

On pourra facilement décomposer de la même manière le dénominateur q' , comme on va le voir.

En divisant les membres de la formule (147.) par y , il viendra à cause de $a = 0$:

$$\frac{p}{y} - q = -b(z-x)(z-\theta x)(z-\theta^2 x) \dots (z-\theta^{2\mu-1} x).$$

Cela posé, soit δ une valeur de x , qui rend y infini, c'est-à-dire une des racines de l'équation $q' = 0$. On aura

$$q = b(z - \delta)(z - \theta\delta)(z - \theta^2\delta) \dots (z - \theta^{2\mu-1}\delta).$$

Il suffit donc de connoître une valeur de δ . Or une telle valeur est

$\frac{1}{V(\pm c)}$. En effet puisqu'on doit avoir $y = \frac{1}{c}$, et remarquant que

$$y = \frac{a'}{b} \cdot \frac{1}{x + \theta x + \theta^2 x + \dots + \theta^{2\mu-1} x},$$

on aura

$$r = x + \theta x + \theta^2 x + \dots + \theta^{2\mu-1} x = 0.$$

Soit pour une valeur quelconque de x :

$$p_m = \theta^m x + \theta^{2\mu-m} x + \theta^{\mu+m} x + \theta^{3\mu-m} x,$$

on aura évidemment, en remarquant que $\theta^{2\mu} x = x$:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_{2\mu-1} = 4.r.$$

Or je dis que si l'on fait

$$x = \frac{1}{V(\pm c)},$$

on aura:

$$p_m = 0,$$

pour une valeur quelconque m . En effet on a d'abord:

$$\theta^m x + \theta^{2\mu-m} x = \frac{2x \cdot \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

donc en mettant $\theta^\mu x$ au lieu de x , et remarquant que $\theta^\mu x = \pm \frac{1}{c x}$:

$$\theta^{m+\mu} x + \theta^{3\mu-m} x = \frac{\pm 2 \cdot \Delta e_m}{c x (1 - e_m^2 x^{-2})}.$$

En faisant maintenant

$$x = \frac{1}{V(\pm c)},$$

on aura:

$$\theta^m x + \theta^{2\mu-m} x = \frac{2 \Delta e_m}{V(\pm c) \cdot \{1 \pm c \cdot e_m^2\}} = -(\theta^{m+\mu} x + \theta^{3\mu-m} x),$$

donc en effet:

$$p_m = 0.$$

On pourra donc faire

$$\delta = \frac{1}{V(\pm c)}.$$

En remarquant que $q' = 1$, pour $x = 0$, on aura, en mettant dans l'expression de q , x au lieu de z :

$$q' = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \left(1 - \frac{x}{\theta\delta}\right) \left(1 - \frac{x}{\theta^2\delta}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{\theta^{2\mu-1}\delta}\right).$$

D'après ce qui précède on pourra énoncer ce théorème:

Théorème XI. „Soit e une racine quelconque de l'équation $e_\mu = \frac{1}{\mu}$, mais qui ne satisfait pas en même tems à deux équations de la forme $e_m = 0$, $\Delta e_m = 1$, où m est facteur de 2μ . Cela posé, si l'on détermine les trois quantités y , c' , ε en vertu des formules:

$$162. \left\{ \begin{aligned} \pm \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{1}{y} &= x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2\Delta e \cdot x}{1-c^2 e^2 x^2} + \frac{2\Delta e_2 \cdot x}{1-c^2 e_2^2 x^2} + \dots + \frac{2\Delta e_\mu \cdot x}{1-c^2 e_\mu^2 x^2} \\ \pm \varepsilon &= c \left\{ 1 \pm \frac{1}{c} + \frac{2\Delta e}{1-c^2 e^2} + \frac{2\Delta e_2}{1-c^2 e_2^2} + \dots + \frac{2\Delta e_\mu}{1-c^2 e_\mu^2} \right\} \\ \text{on aura toujours:} \\ \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2 y^2)]}} &= \frac{\varepsilon \cdot \partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}. \end{aligned} \right.$$

Le cas le plus simple de cette formule est celui où $\mu = 1$. On aura:

$$163. \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \pm c \left(1 \pm \frac{1}{c} \right) = 1 \pm c, \\ y &= (1 \pm c) \frac{x}{1 \pm c x^2}, \quad c' = \frac{\sqrt{1+c}}{1 \pm c}, \\ \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2 y^2)]}} &= (1 \pm c) \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}. \end{aligned} \right.$$

Après avoir déterminé en vertu du théorème précédent un système de valeurs pour y , c' , ε , on aura cinq autres solutions à l'aide des formules du premier paragraphe de ce chapitre.

B. Si $e_\mu = 0$.

Si $e_\mu = 0$, le radical Δe_μ ne pourra avoir que l'une des deux valeurs $+1$ ou -1 ; mais il faut ici supposer $\Delta e_\mu = -1$, car si l'on avoit en même tems $e_\mu = 0$, $\Delta e_\mu = 1$, il en résulteroit $\theta^\mu x = x$, ce qui n'a pas lieu. Mais

$$\theta^\mu x = \frac{x \Delta e_\mu + e_\mu \Delta x}{1 - c^2 e_\mu^2 x^2};$$

cela donne

$$\theta^\mu x = -x,$$

et, en mettant $\theta^m x$ au lieu de x :

$$\theta^{\mu+m} x = -\theta^m x.$$

Les racines de l'équation $y = \psi x$ seront égales dans ce cas deux à deux, mais de signe contraire, et parconséquent ψx sera une fonction paire de x . En faisant

$$\psi z = \frac{p}{q},$$

on aura:

$$164. \quad p - qy = (a - by)(z^2 - x^2)[z^2 - (\theta x)^2][z^2 - (\theta^2 x)^2] \dots [z^2 - (\theta^{\mu-1} x)^2].$$

Si l'on fait $z = 0$, et qu'on désigne les valeurs correspondantes de p et q par a' et b' , on aura:

$$a' - b'y = \pm (a - by)(x. \theta x. \theta^2 x \dots \theta^{n-1} x)^2.$$

Cela donne pour y une expression rationnelle du degré 2μ . Comme dans les deux premiers cas on démontrera aisément qu'il sera toujours possible de déterminer les constantes a, b, a', b' de la sorte que l'équation:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}$$

sera satisfaite, en attribuant au module c' et au coefficient ε des valeurs convenables. Je vais considérer seulement le cas le plus simple, où $\mu = 1$. On aura dans ce cas

$$a' - b'y = (-a + by)x^2$$

et par suite:

$$y = \frac{a' + ax^2}{b' + bx^2}.$$

En mettant cette valeur dans l'équation:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

on trouvera facilement une solution, savoir:

$$165. \quad y = \frac{1 + cx^2}{1 - cx^2}, \quad c' = \frac{1 - c}{1 + c}, \quad \varepsilon = (1 + c)\sqrt{-1}.$$

Connoissant ainsi une solution, on en déduira, en vertu des formules du premier paragraphe, les cinq autres, de sorte que l'équation

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}$$

pourra être satisfaite des six manières suivantes:

$$c' = \frac{1 + c}{1 - c}, \quad \frac{1 + \sqrt{1 - c^2}}{1 - \sqrt{1 - c^2}}, \quad \frac{c + \sqrt{c^2 - 1}}{c - \sqrt{c^2 - 1}}.$$

§. 7.

Réduction du problème général au cas où le degré de la fonction rationnelle y est un nombre premier.

Soit maintenant $y = \psi x$ une fonction rationnelle quelconque qui satisfait à l'équation différentielle:

$$\frac{\partial y}{\Delta y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

Comme on a vu dans le paragraphe 3., l'équation

$$y = \psi x$$

aura toujours n racines de la forme:

$$177. \quad x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{n-1} x, \text{ où } \theta^n x = x.$$

et d'après ce qui a été exposé dans le paragraphe précédent, on pourra trouver une fonction rationnelle: $y_1 = \psi_1(x)$, telle que les racines de l'équation

$$y_1 = \psi_1 x$$

soient égales à ces n quantités:

$$x, \theta x, \theta^2 x, \dots \theta^{n-1} x,$$

et que y satisfasse à une équation différentielle de la forme:

$$181. \frac{\partial y_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c^2 y_1^2)]}} = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2 x^2)]}}.$$

Faisons

$$\psi_1 z = \frac{p'}{q'},$$

où p' et q' sont des fonctions entières du degré n . On aura:

$$182. p' - q' y_1 = (a - b' y_1)(z - x)(z - \theta x) \dots (z - \theta^{n-1} x),$$

où a' et b' sont des constantes.

En y mettant au lieu de x successivement les m valeurs:

$$x, x', x'', \dots x^{(m-1)}$$

et puis multipliant entre elles les équations qui en résultent, on trouvera, en ayant égard à l'équation (180.):

$$183. \frac{p - q y}{a - b y} = \frac{p' - q' y_1}{a' - b' y_1} \cdot \frac{p' - q' y_2}{a' - b' y_2} \dots \frac{p' - q' y_m}{a' - b' y_m},$$

où

$$y_2, y_3, \dots y_m$$

sont les valeurs de la fonction y_1 , qui répondent aux valeurs

$$x', x'', \dots x^{(m-1)}$$

de x .

Puis, attribuant à x deux valeurs particulières α, β , telles que

$$\psi \alpha = 0, \quad \psi \beta = \frac{1}{\varepsilon},$$

et désignant par

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$$

les valeurs de $y_1, y_2, \dots y_m$, respectivement correspondantes aux valeurs α et β de x , l'équation ci-dessus donnera:

$$184. \begin{cases} p = A'(p' - \alpha_1 q')(p' - \alpha_2 q') \dots (p' - \alpha_m q'), \\ q = A''(p' - \beta_1 q')(p' - \beta_2 q') \dots (p' - \beta_m q'), \end{cases}$$

où A' et A'' sont deux constantes. En divisant p par q , on voit que $\frac{p}{q} = \psi z$ sera fonction rationnelle de $\frac{p'}{q'} = \psi_1 z$. En mettant x au lieu de z , on aura

$$\frac{p}{q} = y, \quad \frac{p'}{q'} = y_1,$$

donc:

$$185. \quad y = A \cdot \frac{(y_1 - \alpha_1)(y_1 - \alpha_2)(y_1 - \alpha_3) \dots (y_1 - \alpha_m)}{(y_1 - \beta_1)(y_1 - \beta_2)(y_1 - \beta_3) \dots (y_1 - \beta_m)},$$

où $A = \frac{A'}{A''}$ est constant.

On voit donc que y pourra être exprimé par une fonction rationnelle de y_1 du degré m .

En combinant maintenant l'équation (182.) avec celle-ci:

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

qui doit avoir lieu, on aura:

$$186. \quad \frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2 y^2)]}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c_1'^2 y_1^2)]}};$$

donc la fonction y , rationnelle en y_1 et du degré m , doit satisfaire à cette équation. Réciproquement, si cette équation a lieu, l'équation

$$\frac{\partial y}{\Delta' y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}$$

subsistera également, car la fonction y_1 est déterminée en x de la manière à satisfaire à la formule (182.). Ainsi le problème général est réduit à satisfaire de la manière la plus générale à l'équation (186.). Or ce problème est précisément le même que celui que nous traitons actuellement; seulement le degré de la fonction y en y_1 sera m , au lieu que y , comme fonction de x , est du degré $m.n$, qui est plus grand que m . On pourra donc appliquer à l'équation (186.) le même procédé dont on s'est servi pour l'équation $\frac{\partial y}{\Delta y} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}$, et il est évident qu'on parviendra ainsi à l'expression générale de y , car les degrés des fonctions successives vont toujours en décroissant.

Supposons maintenant que le degré μ de la fonction y en x est un nombre premier. Puisque $\mu = m.n$, on a nécessairement $m = 1$, $\mu = n$. Par suite:

$$y = A \cdot \frac{y_1 - \alpha_1}{y_1 - \beta_1}.$$

On connoît l'expression de y_1 en x par les formules du paragraphe précédent. En substituant l'expression de y en y_1 dans l'équation (186.), on trouvera à l'aide des formules du premier paragraphe toutes les solutions possibles.

En vertu de ce qui précède on pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème XII. Soit y une fonction rationnelle de x d'un degré quelconque μ , qui satisfait à l'équation différentielle:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.$$

On pourra toujours décomposer μ en deux facteurs n et m , dont l'un n est un nombre premier, tels qu'on ait:

$$\text{et} \quad \frac{\partial y_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)]}} = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial x}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

$$\frac{\partial y}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\sqrt{[(1-y_1^2)(1-c_1^2y_1^2)]}},$$

où y est une fonction rationnelle de y_1 du degré m , et y_1 une fonction rationnelle de x du degré n .

Si donc on désigne par $n, n_1, n_2, \dots, n_\nu$ des nombres premiers dont le produit est μ , et qu'on fait, pour abréger:

$$\Delta(x, c) = \sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]},$$

on pourra faire:

$$\frac{\partial y}{\Delta(y, c)} = \varepsilon_\nu \cdot \frac{\partial y_\nu}{\Delta(y_\nu, c_\nu)} = \varepsilon_{\nu-1} \cdot \frac{\partial y_{\nu-1}}{\Delta(y_{\nu-1}, c_{\nu-1})} = \dots = \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial y_1}{\Delta(y_1, c_1)} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

où y_1 est une fonction rationnelle de x du degré n ,

$$\begin{array}{ccccccccccc} - & y_2 & - & - & - & - & - & - & y_1 & - & - & n_1, \\ - & y_3 & - & - & - & - & - & - & y_2 & - & - & n_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ - & y_\nu & - & - & - & - & - & - & y_{\nu-1} & - & - & n_{\nu-1}, \\ - & y & - & - & - & - & - & - & y_\nu & - & - & n_\nu. \end{array}$$

En vertu de ce théorème la solution du problème général sera donc ramenée au cas où le degré de la fonction y est un nombre premier. On trouvera toutes les solutions qui répondent à ce cas par les formules du paragraphe précédent, et la résolution du problème que nous nous sommes proposé au commencement de ce chapitre pourra être regardé comme résolu.

§. 8.

Sur la forme de la fonction y .

Désignons par $x, x', x'' \dots x^{(\mu-1)}$ les racines de l'équation

$$y = \psi x.$$

Si l'on fait $\psi z = \frac{p}{q}$, où p et q sont des fonctions entières de z , on aura:

$$187. \quad p - qy = (a - by)(z - x)(z - x')(z - x'') \dots (z - x^{(\mu-1)}),$$

où a et b sont des constantes. Cela posé, soit α une racine de l'équation

$y = 0$, on aura en faisant $x = \alpha$:

$$188. \quad p = a(z - \alpha)(z - \alpha')(z - \alpha'') \dots (z - \alpha^{(\mu-1)}).$$

Soit également β une racine de l'équation $y = \frac{1}{c}$. Cela donnera, en faisant $x = \beta$, et après avoir divisé les deux membres de l'équation (187.) par y :

$$189. \quad q = b(z - \beta)(z - \beta')(z - \beta'') \dots (z - \beta^{(\mu-1)}).$$

Ces valeurs de p et q donneront, en mettant x au lieu de z :

$$190. \quad y = A \cdot \frac{(x - \alpha)(x - \alpha') \dots (x - \alpha^{(\mu-1)})}{(x - \beta)(x - \beta') \dots (x - \beta^{(\mu-1)})},$$

où A est un coefficient constant, qu'on trouvera en remarquant que si l'on fait $x = 1$, y doit avoir une des valeurs $\pm 1, \pm \frac{1}{c}$.

Mais il y a deux cas: savoir, il pourra arriver que l'une ou l'autre des deux quantités a et b soit égale à zéro, et dans ce cas l'une des racines des équations $y = 0$, $y = \frac{1}{c}$ sera zéro ou infini.

Cas I. Si $b = 0$.

On aura dans ce cas

$$191. \quad p - qy = a(z - x)(z - x') \dots (z - x^{(\mu-1)}),$$

et p sera du degré μ , et q seulement du degré $\mu - 1$. En égalant le coefficient de $z^{\mu-1}$ dans les deux membres, on aura:

$$192. \quad a' - b'y = -a(x + x' + x'' + \dots + x^{(\mu-1)}),$$

où a' et b' sont des constantes. Maintenant si

$$x' = \frac{x \Delta e + e \Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2}$$

est une racine de $y = \psi x$, la quantité

$$\frac{x \Delta e - e \Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2}$$

le sera également; donc si ces deux quantités sont différentes entre-elles pour toutes les valeurs de e , μ sera un nombre impair, et en faisant $\mu = 2n + 1$, on aura:

$$193. \quad a' - b'y = -a \left\{ \frac{2x \Delta e_1}{1 - c^2 e_1^2 x^2} + \frac{2x \Delta e_2}{1 - c^2 e_2^2 x^2} + \dots + \frac{2x \Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2 x^2} + x \right\}.$$

Maintenant si l'on fait $x = \pm 1, \pm \frac{1}{c}$, on aura $y = \pm 1, y = \pm \frac{1}{c}$, d'où il est facile de conclure que a' sera égal à zéro. Donc y sera une fonction impaire de x , et de la forme:

$$194. \quad y = A \cdot x \cdot \left\{ 1 + \frac{2 \Delta e_1}{1 - c^2 e_1^2 x^2} + \dots + \frac{2 \Delta e_n}{1 - c^2 e_n^2 x^2} \right\}.$$

Cela fait voir que

$$q = (1 - c^2 e_1^2 z^2) \dots (1 - c^2 e_n^2 z^2).$$

Pour avoir p , il suffit de faire dans l'équation (191.) $x = 0$, et cela donne

$$p = az(z^2 - e_1^2) \dots (z^2 - e_n^2),$$

donc on aura:

$$195. \quad y = a \cdot \frac{x(e_1^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \dots (e_n^2 - x^2)}{(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_n^2 x^2)}.$$

Telle est donc la forme de la fonction y dans le cas où le degré de son numérateur est impair et plus grand que celui du dénominateur.

Si pour quelque valeur de e les deux quantités

$$\frac{x \triangle e + e \triangle x}{1 - c^2 e^2 \triangle x}, \quad \frac{x \triangle e - e \triangle x}{1 - c^2 e^2 x^2}$$

étoient égales, on auroit:

$$e = 0, \quad \text{ou} \quad e = \frac{x}{c}.$$

Soit d'abord $e = \frac{x}{c}$, on aura $x' = \pm \frac{1}{cx}$, et par suite le second membre de l'équation (192.) seroit une fonction impaire de x , dont le degré seroit un nombre pair. On trouve seulement que cela donne $a' = 0$; donc en faisant $\mu = 2n$:

$$196. \quad y = A \cdot \left\{ x \pm \frac{1}{cx} + \frac{2x \triangle e_1}{1 - c^2 e_1^2 x^2} + \dots + \frac{2x \triangle e_{n-1}}{1 - c^2 e_{n-1}^2 x^2} \right\},$$

et par suite y sera exprimé en factorielle comme il suit:

$$197. \quad y = \frac{a(1 - \delta_1^2 x^2)(1 - \delta_2^2 x^2) \dots (1 - \delta_n^2 x^2)}{x(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_{n-1}^2 x^2)},$$

Si au contraire $e = 0$, on aura en même tems:

$$x' = -x.$$

Donc dans ce cas y sera une fonction paire de x . Mais le degré du numérateur doit être le même que celui du dénominateur, comme il est facile de voir; donc l'expression (197.) appartient à y toutes les fois que le degré du numérateur est un nombre pair et en même tems plus grand que celui du dénominateur.

Cas II. Si $a = 0$.

On aura:

$$p - qy = + b(x - z)(x' - z) \dots (x^{(\mu-1)} - z).$$

En raisonnant comme ci-dessus on trouvera aisément que dans le cas où μ est un nombre impair, y sera une fonction impaire de x de la forme:

$$198. \quad y = a \cdot \frac{(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_n^2 x^2)}{x(e_1^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \dots (e_n^2 - x^2)}.$$

Si μ est pair, y sera une fonction impaire de x de la forme:

$$199. \quad y = a \cdot \frac{x(1-c^2 e_1^2 x^2) \dots (1-c^2 e_{n-1}^2 x^2)}{(1-\delta_1^2 x^2) \dots (1-\delta_n^2 x^2)}.$$

§. 9.

De la fonction $x_{2\mu+1}$.

Nous avons vu chapitre I. paragraphe 4. qu'à l'équation différentielle

$$\frac{\partial y}{\Delta y} = (2\mu + 1) \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}$$

on peut satisfaire, en mettant au lieu de y une fonction impaire de x du degré $2\mu + 1$; qui s'évanouit avec x . En la désignant comme nous l'avons fait à l'endroit cité par $x_{2\mu+1}$, et faisant pour abrégier $(2\mu + 1)^2 - 1 = 2n$, cette fonction, en vertu de ce que nous venons de voir dans le paragraphe précédent, doit avoir la forme suivante:

$$200. \quad x_{2\mu+1} = a \cdot \frac{x(e_1^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \dots (e_n^2 - x^2)}{(1 - c^2 e_1^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_n^2 x^2)},$$

et on aura en même tems:

$$201. \quad x_{2\mu+1} = A \cdot \left\{ x + \frac{2\Delta e_1 \cdot x}{1 - c^2 e_1^2 x^2} + \frac{2\Delta e_2 \cdot x}{1 - c^2 e_2^2 x^2} + \dots + \frac{2\Delta e_n \cdot x}{1 - c^2 e_n^2 x^2} \right\}.$$

Pour déterminer les coefficients a et A , faisons $x = \frac{1}{c}$. On trouvera:

$$A \cdot c^{2n} \cdot e_1^2 \cdot e_2^2 \dots e_n^2 = a.$$

Si l'on suppose x infiniment petit, la première formule donne:

$$x_{2\mu+1} = a \cdot e_1^2 \cdot e_2^2 \dots e_n^2 \cdot x,$$

mais l'équation différentielle donne dans ce cas:

$$x_{2\mu+1} = (2\mu + 1)x,$$

par suite:

$$a \cdot e_1^2 \cdot e_2^2 \dots e_n^2 = 2\mu + 1.$$

Si l'on suppose x infiniment grand, la seconde expression de $x_{2\mu+1}$ donne

$x_{2\mu+1} = A \cdot x$, mais dans le même cas l'équation différentielle donne:

$$\frac{\partial x_{2\mu+1}}{c \cdot x_{2\mu+1}^2} = \frac{\partial x}{c A x^2} = (2\mu + 1) \cdot \frac{\partial x}{c \cdot x^2},$$

donc:

$$202. \quad A = \frac{1}{2\mu + 1}.$$

Connoissant A , on aura:

$$203. \quad e_1^2 \cdot e_2^2 \dots e_n^2 = \frac{2\mu + 1}{c^n}; \quad a = c^n = c^{2\mu + 2\mu}.$$

Les quantités $e_1, e_2, \dots, e_n$ ont entre elles des relations remarquables que nous allons développer.

Considérons l'équation

$$x_{2\mu+1} = y.$$

Les racines de cette équation seront les $(2\mu + 1)^2$ quantités suivantes:

$$x, \frac{x \Delta e_1 + e_1 \Delta x}{1 - c^2 e_1^2 x^2}, \frac{x \Delta e_2 + e_2 \Delta x}{1 - c^2 e_2^2 x^2}, \dots \frac{x \Delta e_n + e_n \Delta x}{1 - c^2 e_n^2 x^2}.$$

Soit $\theta x = \frac{x \Delta e + e \Delta x}{1 - c^2 e^2 x^2}$ une quelconque de ces racines, les $2\mu + 1$ quantités:

$$x, \theta x, \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x$$

seront encore des racines et en même tems différentes entre elles, en prenant pour e une quantité qui n'est pas racine d'une équation

$$x_{2m+1} = 0,$$

où $2m + 1$ est facteur de $2\mu + 1$. Soit

$$\theta_1 x = \frac{x \Delta e' + e' \Delta x}{1 - c^2 e'^2 x^2}$$

une autre racine, on aura encore les racines suivantes:

$$\theta_1 x, \theta_1^2 x, \dots \theta_1^{2\mu} x,$$

qui seront différentes entre elles.

Cela posé, faisons

$$x_{2\mu+1} = \psi x;$$

on aura en général:

$$\psi(\theta^m x) = \psi(\theta_1^k x),$$

quels que soient les nombres entiers m et k . En mettant $\theta^m x$ au lieu de x , on aura:

$$\psi(\theta_1^k \theta^m x) = \psi(\theta^{2m} x) = x_{2\mu+1};$$

donc toute quantité de la forme

$$\theta_1^k \theta^m x$$

sera racine de l'équation $y = \psi x$. Je dis maintenant que si l'on attribue à k et m toutes les valeurs entières possibles, moindres que $2\mu + 1$, les valeurs qui en résultent pour la fonction $\theta_1^k \theta^m x$, seront toutes différentes entre elles. En effet, si l'on avoit

$$\theta_1^k \theta^m x = \theta_1^{k'} \theta^{m'} x,$$

il en résulteroit, en mettant $\theta^{2\mu+1-m'} x$ au lieu de x , et remarquant que $\theta^{2\mu+1} x = x$:

$$\theta_1^k \theta^{n'} x = \theta_1^{k'} x,$$

où $n' = m + 2\mu + 1 - m'$.

Cela donne:

$$\theta_1^{2\mu+1-k} \theta_1^k \theta^{n'} x = \theta_1^{k''} x,$$

où $k'' = 2\mu + 1 - k + k'$, c'est-à-dire:

$$\theta^{n'} x = \theta_1^{k''} x,$$

et de là:

$$\theta^{n'\mu'} x = \theta_1^{k''\mu'} x.$$

Maintenant, puisque $2\mu + 1$ est un nombre premier, on pourra faire

$$k''\mu' = (2\mu + 1)\beta + 1,$$

donc :

$$\theta_1^{(2\mu+1)\beta} \theta_1 x = \theta_1 x = \theta^{n'\mu'} x,$$

c'est-à-dire $\theta_1 x$ serait une des quantités :

$$x, \theta x, \dots \theta^{2\mu} x,$$

et cela est contre l'hypothèse.

L'expression $\theta_1^k \theta^m x$ a donc un nombre $(2\mu + 1)^2$ de valeurs différentes et par conséquent ces valeurs seront les racines de l'équation

$$x_{2\mu+1} = y.$$

Soit maintenant

$$x' = \theta_1^k x, \quad x'' = \theta_1^k \theta^m x, \quad x''' = \theta^m x.$$

On aura, en regardant e et e' comme variables :

$$\frac{\partial x'}{\Delta x'} = \frac{\partial x}{\Delta x} + k \cdot \frac{\partial e'}{\Delta e'},$$

$$\frac{\partial x'''}{\Delta x'''} = \frac{\partial x}{\Delta x} + m \cdot \frac{\partial e}{\Delta e}.$$

En mettant dans la première formule x''' au lieu de x , x' se changera en x'' , donc :

$$\frac{\partial x''}{\Delta x''} = \frac{\partial x'''}{\Delta x'''} + k \frac{\partial e'}{\Delta e'},$$

donc :

$$\frac{\partial x''}{\Delta x''} = \frac{\partial x}{\Delta x} + k \frac{\partial e'}{\Delta e'} + m \cdot \frac{\partial e}{\Delta e},$$

et si l'on fait

$$k \frac{\partial e'}{\Delta e'} = \frac{\partial e'_k}{\Delta e'_k}, \quad m \frac{\partial e}{\Delta e} = \frac{\partial e_m}{\Delta e_m};$$

$$\frac{\partial x''}{\Delta x''} = \frac{\partial x}{\Delta x} + \frac{\partial e'_k}{\Delta e'_k} + \frac{\partial e_m}{\Delta e_m}.$$

Si donc on fait :

$$204. \quad e_{m,k} = \frac{e_m \Delta e'_k + e'_k \Delta e_m}{1 - c^2 e_m^2 e_k'^2},$$

on aura :

$$\frac{\partial x''}{\Delta x''} = \frac{\partial x}{\Delta x} + \frac{\partial e_{m,k}}{\Delta e_{m,k}},$$

et de là, en supposant que e_m et e'_k , s'évanouissent avec e :

$$205. \quad x'' = \frac{x \Delta e_{m,k} + e_{m,k} \cdot \Delta x}{1 - c^2 e_{m,k}^2 x^2} = \theta_1^k \theta^m x.$$

Toutes les racines de l'équation $y = x_{2\mu-1}$ pourront donc être exprimées par cette même formule.

$$213. (e - e_1)(e - e_2) \dots (e - e_{2\mu}) = e^{2\mu} + p_{\mu-1} \cdot e^{2\mu-2} + p_{\mu-2} \cdot e^{2\mu-4} + \dots + p_1 \cdot e^2 + p_0 = 0.$$

Les coefficients $p_0, p_1, \dots, p_{\mu-1}$ seront des fonctions rationnelles et symétriques de $e_1, e_2, \dots, e_{2\mu}$; donc, comme nous verrons, on pourra les déterminer à l'aide d'équations du degré $2\mu + 2$. Ainsi pour avoir les racines de l'équation $P=0$, il suffira de résoudre des équations du degré 2μ et $2\mu + 2$.

Ce qui précède est susceptible d'une application importante. Le module c' , exprimé par la formule (156.), est comme on voit une fonction rationnelle et symétrique de $e, e_2, e_3, \dots, e_{2\mu}$. Donc, en vertu de la propriété démontrée précédemment, on pourra trouver le module c' en c à l'aide d'une équation du degré $2\mu + 2$. Cette équation ne parait guère résoluble algébriquement, excepté lorsque $2\mu + 1 = 3$. Dans ce cas elle sera du quatrième degré.

En appliquant le théorème XII. à l'équation:

$$\frac{\partial x_{2\mu+1}}{\Delta x_{2\mu+1}} = (2\mu + 1) \frac{\partial x}{\Delta x},$$

on aura, en remarquant que le degré de la fonction $x_{2\mu+1}$ est $(2\mu + 1)^2$, et $2\mu + 1$ un nombre premier:

$$\frac{1}{\Delta x_{2\mu+1}} \frac{\partial x_{2\mu+1}}{\partial y} = \frac{2\mu+1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial y}{\Delta' y} = (2\mu+1) \cdot \frac{\partial x}{\Delta x},$$

où y est une fonction de x du degré $2\mu + 1$, et $x_{2\mu+1}$ une fonction de y du même degré. On aura:

$$y = \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \cdot \frac{x(e^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \dots (e_{2\mu}^2 - x^2)}{(1 - c^2 e^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_{2\mu}^2 x^2)}.$$

et

$$x_{2\mu+1} = \frac{c'^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{y(e'^2 - y^2)(e_1'^2 - y^2) \dots (e_{2\mu}'^2 - y^2)}{(1 - c'^2 e'^2 y^2)(1 - c'^2 e_1'^2 y^2) \dots (1 - c'^2 e_{2\mu}'^2 y^2)},$$

$$c' = c^{2\mu+1} \cdot \left\{ \frac{1 - e^2}{1 - c^2 e^2} \cdot \frac{1 - e_2^2}{1 - c^2 e_2^2} \dots \frac{1 - e_{2\mu}^2}{1 - c^2 e_{2\mu}^2} \right\}^2,$$

$$c = c'^{2\mu+1} \cdot \left\{ \frac{1 - c'^2}{1 - c'^2 e'^2} \cdot \frac{1 - e_1'^2}{1 - c'^2 e_1'^2} \dots \frac{1 - e_{2\mu}'^2}{1 - c'^2 e_{2\mu}'^2} \right\}^2,$$

$$\varepsilon = \frac{c^{\mu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{c'}} \cdot e^2 \cdot e_2^2 \dots e_{2\mu}^2.$$

e' est déterminé de la même manière en c' que e l'est en c . Donc si l'on change c en c' ; c se changera en c' . De là il suit que l'équation entre les modules c' et c doit rester la même si l'on change simultanément c en c' et c' en c .

Puisque c' dépend d'une équation du degré $2\mu + 2$, on pourra donner à la fonction y , $2\mu + 2$ valeurs différentes.

§. 11.

Des transformations différentes qui répondent à un même degré de la fonction y .

Soit

$$y = \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_\mu x^\mu}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_\mu x^\mu},$$

et

$$214. \quad \frac{\partial y}{\Delta(y, c')} = \varepsilon \cdot \frac{\partial x}{\Delta(x, c)}.$$

Supposons μ premier et d'abord $\mu = 1$. Dans ce cas le module c' , en vertu des formules du paragraphe 2., aura six valeurs différentes et la fonction y en aura douze.

Si $\mu = 2$, on aura toutes les solutions possibles en combinant les deux formules (163., 165.) avec les six formules du paragraphe 2., ce qui en donne 18 valeurs différentes du module c' .

Si l'on fait

$$c_1 = \frac{1-c}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_3 = \frac{2\sqrt{-c}}{1-c},$$

ces 18 valeurs se trouveront en mettant dans les six fonctions:

$$\pm c, \quad \pm \frac{1}{c}, \quad \pm \frac{(1-\sqrt{c})^2}{(1+\sqrt{c})}, \quad \pm \frac{(1+\sqrt{c})^2}{(1-\sqrt{c})}, \quad \pm \frac{(1-\sqrt{-c})^2}{(1+\sqrt{-c})}, \quad \pm \frac{(1+\sqrt{-c})^2}{(1-\sqrt{-c})},$$

les trois quantités c_1, c_2, c_3 au lieu de c .

Si μ est un nombre premier impair, on aura d'abord $2\mu + 2$ valeurs du module c' , qui répondent à la forme suivante de y :

$$y = \frac{c^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{x(e^2 - x^2)(e_2^2 - x^2) \dots (e_n^2 - x^2)}{\sqrt{c'} \cdot (1 - c^2 e^2 x^2)(1 - c^2 e_2^2 x^2) \dots (1 - c^2 e_n^2 x^2)}}.$$

Or de chaque valeur de y de cette forme on tire en vertu des six formules du paragraphe 2. cinq autres de la forme:

$$\frac{y}{c'}, \quad \frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}} \cdot \frac{1+y\sqrt{c'}}{1+y\sqrt{c'}}; \quad \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}} \cdot \frac{1+y\sqrt{c'}}{1+y\sqrt{c'}}; \quad \frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}} \cdot \frac{1+y\sqrt{-c'}}{1+y\sqrt{-c'}}; \\ \frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}} \cdot \frac{1+y\sqrt{-c'}}{1+y\sqrt{-c'}};$$

auxquelles répondent respectivement les modules:

$$\frac{1}{c'}, \quad \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2, \quad \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2, \quad \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2, \quad \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2.$$

On aura donc en totalité un nombre de $6(2n+2) = 6(\mu+1)$ valeurs différentes pour le module c' . On en aura le double nombre pour la fonction y .

§. 12.

Résolution de l'équation $y = \psi x$.

L'équation algébrique $y = \psi x$, où ψx est une fonction rationnelle quelconque de x , satisfaisant à une équation différentielle de la forme (214.), jouira de la propriété remarquable d'être résoluble par rapport à x à l'aide de radicaux. Cela est facile de démontrer en ayant égard à la forme des racines de cette équation. D'abord si le degré μ est un nombre composé $= n.n_1.n_2 \dots n_v$, on pourra faire comme nous venons de voir dans le §. 7.:

$y = \psi_v(y_v)$, $y_{v-1} = \psi_{v-1}(y_{v-1})$, $\dots$ $y_2 = \psi_1(y_1)$; $y_1 = \psi(x)$, où ψ_v , ψ_{v-1} , $\dots$ ψ_1 , ψ désignent des fonctions rationnelles respectivement des degrés n_v , n_{v-1} , $\dots$ n_1 , n , ces derniers nombres étant premiers. On aura donc la valeur de x en y à l'aide de la résolution de $v+1$ équations des degrés n , n_1 , $\dots$ n_v respectivement. Donc il suffit de résoudre l'équation $y = \psi x$ dans le cas où le degré μ est un nombre premier. Si $\mu = 2$, on aura l'expression de x par les règles connues. Si μ est impair, les racines de l'équation $y = \psi x$ seront les μ quantités suivantes:

$$x, \theta x, \theta^2 x \dots \theta^{2\mu} x.$$

Cela posé, soit δ une racine imaginaire de l'équation

$$\delta^{2\mu+1} = 1,$$

et faisons

$$v = x + \delta.\theta x + \delta^2.\theta^2 x + \dots + \delta^{2\mu}.\theta^{2\mu} x,$$

$$v' = x + \delta.\theta^{2\mu} x + \delta^2.\theta^{2\mu-1} x + \dots + \delta.\theta x.$$

En substituant pour les quantités $\theta^m x$ leurs valeurs:

$$\theta^m x = \frac{x \triangle e_m + e_m \triangle x}{1 - c^2 e_m^2 x^2}$$

et remarquant que

$$\theta^{2\mu+1-m} x = \frac{x \triangle e_m - e_m \triangle x}{1 - c^2 e_m^2 x^2},$$

il est clair qu'on aura:

$$v = p + q \triangle x, \quad v' = p - q \triangle x,$$

où p et q sont des fonctions rationnelles de x . Cela fait voir que $v.v'$ et $v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions rationnelles de x ; or je dis qu'on pourra exprimer ces quantités en fonctions rationnelles de y . En effet il est clair en vertu de la forme de v et v' , que si l'on fait

$$v.v' = \Phi x, \quad v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1} = f x,$$

les deux fonctions ϕx et $f x$ ne changeront pas de valeur en mettant pour x les $2\mu+1$ quantités:

$$x, \theta x, \dots \theta^{2\mu} x.$$

Donc on aura:

$$\phi x = \frac{1}{2\mu+1} \{\phi x + \phi \theta x + \dots + \phi \theta^{2\mu} x\} = v.v',$$

$$f x = \frac{1}{2\mu+1} \{f x + f \theta x + \dots + f \theta^{2\mu} x\} = v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1}.$$

Ces expressions des quantités $v.v'$, $v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1}$ sont des fonctions rationnelles et symétriques des racines de l'équation $y = \psi x$; donc on pourra les exprimer rationnellement par les coefficients de cette équation, c'est-à-dire en y .

Faisons donc:

$$\begin{aligned} v.v' &= s, \\ v^{2\mu+1} + v'^{2\mu+1} &= t, \end{aligned}$$

s et t seront des fonctions rationnelles de y . On en tire

$$v = \sqrt[2\mu+1]{\left[\frac{t}{2} + \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} - s^{2\mu+1} \right)} \right]}.$$

On connoit donc la fonction v . Maintenant si l'on désigne par $v_0, v_1, v_2, \dots v_{2\mu}$ les valeurs de v qui répondent respectivement aux racines $1, \delta, \delta^2, \delta^3, \dots \delta^{2\mu}$ de l'équation $\delta^{2\mu+1} = 1$, on aura sur le champ:

$$x = \frac{1}{2\mu+1} \cdot \{v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2\mu}\},$$

$$\theta^m x = \frac{1}{2\mu+1} \cdot \{v_0 + \delta^{-m} v_1 + \delta^{-2m} v_2 + \dots + \delta^{-2m\mu} v_{2\mu}\},$$

qui est l'expression générale des racines.

On aura par là une classe très étendue d'équations algébriques de tous les degrés, résolubles algébriquement. Nous n'entrerons pas ici dans des détails sur ce sujet, mais nous renvoyons nos lecteurs à la seconde partie de ce mémoire, où nous en donneront des développemens étendus et remarquables à cause de belles propriétés des fonctions elliptiques qu'on en peut tirer.

On pourra encore remarquer comme cas particulier l'équation:

$$x_\mu = y,$$

où x_μ désigne la fonction rationnelle de x du degré μ^2 , qui satisfera à l'équation:

$$\frac{\partial x_\mu}{\Delta x_\mu} = \mu \cdot \frac{\partial x}{\Delta x}.$$

On en pourra toujours tirer la valeur de x en y à l'aide des radicaux. Si μ est un nombre impair, on pourra donner aux racines cette forme très simple:

$$x = \frac{1}{\mu} \cdot \{a \cdot y + (p_1 + q_1 \Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + (p_2 + q_2 \Delta y)^{\frac{1}{\mu}} + \dots + (p_{\mu-1} + q_{\mu-1} \Delta y)^{\frac{1}{\mu}}\},$$

où $p_1, p_2, p_3, \dots$ sont des fonctions entières impaires de y du degré μ , et $q_1, q_2, q_3, \dots$ des fonctions paires de y du degré $\mu - 3$. p_m et q_m seront déterminés par l'équation

$$p_m^2 - q_m^2(1 - y^2)(1 - c^2 y^2) = (y^2 - e_m^2)^\mu,$$

où e_m est une constante, savoir une racine de l'équation $x_\mu = 0$.

C h a p i t r e V.

Théorie générale de la transformation des fonctions elliptiques par rapport au module.

A l'aide des théorèmes que nous avons établis dans les chapitres précédens, nous pourrons maintenant donner la solution de ce problème:

„Etant proposé une fonction elliptique avec une module quelconque, exprimer cette fonction de la manière la plus générale en d'autres fonctions.”

§. 1.

Condition générale pour la transformation.

Soit proposé une intégrale de la forme:

$$\int \frac{r \cdot \partial x}{\Delta x},$$

on demande, s'il est possible d'exprimer cette intégrale par des fonctions algébriques, logarithmiques et des fonctions elliptiques, dont les modules sont $c_1, c_2, \dots, c_n$, en sorte qu'on ait:

$$\int \frac{r \partial x}{\Delta x} = A_1 \cdot \psi_1 x_1 + A_2 \psi_2 x_2 + \dots + A_m \psi_m x_m + V,$$

où $A_1, A_2, \dots, A_m$ sont des constantes, $x_1, x_2, \dots, x_m$ des fonctions algébriques de x , et V une fonction algébrique et logarithmique. $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ désignent des fonctions elliptiques ayant respectivement $c_1, c_2, \dots, c_m$ pour modules.

Cela posé, cette équation donnera en vertu de (86.):

$$\int \frac{r \partial x}{\Delta x} = k_1 \cdot \psi_1 y_1 + k_2 \cdot \psi_2 y_2 + \dots + k_m \cdot \psi_m y_m + V',$$

où

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_m,$$

Soit maintenant x' une fonction rationnelle de x ; si r' désigne une fonction rationnelle quelconque de x' , on pourra transformer r en une fonction pareille de x . En la désignant par r , on aura donc $r' = r$. Donc en multipliant l'équation différentielle ci-dessus par r' , on aura, en intégrant:

$$219. \int \frac{r' \partial x'}{\Delta(x', c')} = \varepsilon \int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)}.$$

Quelle que soit la fonction rationnelle r , on pourra toujours, comme on sait, exprimer

$$\int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)}$$

par des fonctions elliptiques des trois espèces avec le module c . On aura donc ce théorème:

Théorème XIV. Si une fonction elliptique quelconque φx , ayant c' pour module, peut être exprimée par d'autres fonctions avec les modules $c_1, c_2, \dots, c_m$, on pourra toujours exprimer la même fonction φx par des fonctions elliptiques avec le même module c , c étant un quelconque des modules $c_1, c_2, \dots, c_m$, et cela de la manière suivante:

$$220. \varphi y = \int \frac{r \partial x}{\Delta(x, c)},$$

où y et r sont des fonctions rationnelles de x *).

*) C'est jusqu'ici que ce mémoire est parvenu à l'éditeur. Mr. Abel est mort sans l'avoir fini. (Voyez son nécrologe à la fin de ce cahier.)

27.

Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.

(Von Herrn Prof. Plücker zu Bonn.)

1. Eine gegebene Fläche kann in einem gegebenen Punkte mit einer andern Fläche, die der Art nach, d. h. durch eine Gleichung gegeben ist, in der die Coëfficienten beliebig zu bestimmende Grössen sind, einen verschiedenartigen, mehr oder weniger innigen Contact haben. Je inniger dieser Contact sein soll, desto mehr Bedingungen müssen befriedigt werden, desto mehr unbestimmte Coëfficienten muß die allgemeine Gleichung der osculirenden Fläche haben. Die möglichen Ordnungen des Contactes pflegt man nach der Zahl dieser Coëfficienten zu bestimmen, und nach der gewöhnlichen Entwicklungsweise sind $1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1)$ Coëfficienten nothwendig und hinreichend, damit ein Contact der n ten Ordnung Statt habe. Man siehet leicht ein, daß wenn man annimmt, die Gleichung der osculirenden Fläche sei nach steigenden Potenzen der drei Veränderlichen entwickelt, jene unbestimmten Coëfficienten nicht zu durchaus willkürlichen Potenzen gehören dürfen. Aber auch mit dieser Beschränkung ist jene Bestimmung nur dann die richtige, wenn der Grad der sich osculirenden Flächen rücksichtlich der Ordnung des Contactes von einer bestimmten Höhe ist. Denn damit z. B. zwei Flächen dritten und zweiten Grades einen Contact der 5ten Ordnung haben, sind nicht:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$$

sondern nur;

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 15$$

Bedingungs-Gleichungen zu befriedigen. Ueberdies ist die Bestimmung der möglichen Ordnungen des Contactes nach der Zahl der Coëfficienten der osculirenden Fläche eine durchaus indirecte.

Es scheint mir am natürlichsten und am leichtesten, die Discussion des Contactes zweier Flächen in einem gegebenen Punkte, anzuknüpfen an die Theorie des Contactes der beiden Durchschnittscurven der beiden Flächen

mit einer Ebene, die durch den Berührungspunct geht und die man sich um eine in derselben befindliche, und durch diesen Punct gehende gerade Linie drehen läßt. Auf diese Weise ergibt sich zugleich ohne Aufwand von Rechnung die Beantwortung einer Reihe von Fragen, die sich von selbst darbieten und mit denen man sich bisher wenig beschäftigt zu haben scheint. Nach wie vielen Richtungen z. B. müssen zwei Flächen des m ten und m' ten Grades einen Contact der n ten Ordnung haben, damit ein Contact derselben Ordnung nach allen Richtungen hin Statt finde? Wenn zwei solche Flächen einen vollständigen Contact der n ten Ordnung haben, findet alsdann möglicher oder nothwendiger Weise nach gewissen Richtungen ein Contact der $(n+1)$ ten Ordnung Statt? Kann dieser Contact auch von noch höherer Ordnung, der $(n+p)$ te sein, und ist er dann nach allen eben bezeichneten Richtungen ein Contact von dieser höheren Ordnung, oder nur nach einer bestimmten Zahl derselben? In welchen Beziehungen steht die Durchschnitts-Curve (im Allgemeinen doppelter Krümmung) zu der Ordnung des Contactes? In welcher Beziehung stehen zu einander, bei den verschiedenen Contact-Ordnungen, die Durchschnitts-Curven der beiden Flächen mit der gemeinschaftlichen Tangential-Ebene? Von welcher Ordnung ist der Contact, wenn die beiden Flächen sich nach theilweise ebenen Curven schneiden und diese in der Tangential-Ebene zusammenfallen? Und, umgekehrt, von welcher Ordnung muß der Contact sein, damit die beiden Flächen nach einer oder mehreren zusammenfallenden Ebenen sich berühren? u. s. w.

„Wenn zwei Curven sich osculiren, so vereinigen sich im Osculationspuncte mehrere Durchschnittspuncte“. Diesen Satz betrachtet man gewöhnlich als eine Folge des Prinzips der Continuität; ich habe ihn in meinen „Entwicklungen,“ um darauf die Theorie der Osculation ebener Curven zu gründen, lediglich als die geometrische Interpretation eines algebraischen Factums, nemlich der gleichen Wurzeln derjenigen Gleichungen betrachtet, die man erhält, indem man nach einander zwischen den Gleichungen der beiden Curven jede der Veränderlichen eliminirt. Beim Contacte von Flächen kann zwar von einem Zusammenfallen einer bestimmten Anzahl von Durchschnittspuncten unmittelbar nicht mehr die Rede sein: für das Analoge erhalten wir hier aber Folgendes. „Wenn irgend zwei Flächen einen Contact der n ten Ordnung haben, so vereinigen sich in dem Contactpuncte $(n+1)$ Zweige der Durchschnittscurve

„der beiden Flächen (Zweige die paarweise genommen imaginär werden „können), oder, mit andern Worten, der Contactpunct ist ein $(n+1)$ -facher Punct dieser Curve.“ (Wenn wir also durch den Contactpunct irgend eine Ebene legen, so wird dieselbe in diesem Puncte von den $(n+1)$ Zweigen der Durchschnittcurve in $(n+1)$ zusammenfallenden Puncten geschnitten. Diese Puncte bilden den Osculationspunct derjenigen beiden Curven, nach welchen jene Ebene die beiden Flächen schneidet.) Auf diesen Satz könnten wir die Theorie des Contactes zweier Flächen in einem gegebenen Puncte gründen. Nur würde diese Art zu verfahren mehr Rechnung erfordern, als die oben angedeutete, weil wir nothwendig die Gleichung einer Projection der Durchschnittcurve der beiden Flächen entwickeln müßten. Wenn (wodurch die Untersuchung aber ungemein eingeschränkt wird) in den Gleichungen der beiden Flächen z als Function von y und x :

$$z = \varphi(y, x), \quad z = \psi(y, x)$$

gegeben ist, so erhält man für die Gleichung der Projection der Durchschnittcurve auf die Ebene der y und x :

$$\varphi(y, x) = \psi(y, x).$$

Um auszudrücken, daß diese Curve durch den Anfangspunct der Coordinaten gehe, in diesem Puncte einen Doppelpunct, einen dreifachen, vierfachen etc. Punct habe, müssen wir, nach der bekannten Theorie, die letzte Gleichung nach steigenden Potenzen von y und x entwickeln, und dann das constante Glied, die Coëfficienten der ersten, zweiten, dritten etc. Potenzen der beiden Veränderlichen gleich Null setzen. Auf diese Weise erhalten wir auf der Stelle die bekannten Bedingungsgleichungen, welche uns die gewöhnliche Theorie des Contactes zweier Flächen giebt.

In den nachstehenden Entwicklungen habe ich, nach der zuerst bezeichneten Methode, die Theorie des Contactes einer Fläche zweiter Ordnung mit einer andern Fläche derselben Ordnung und mit einer Fläche dritter Ordnung vollständig behandelt, um mich so, auf dem Wege der Induction, zu den allgemeinen Gesetzen, nach welchen überhaupt irgend zwei Flächen, namentlich zwei algebraische von bestimmten Graden, sich osculiren. Was hier noch unvollständig bleiben mag, gedenk' ich später an einem andern Orte nachzutragen.

2. Bei der Annahme durchaus beliebiger Coordinaten-Axen seien:

$$(1.) \begin{cases} Ax^2 + 2Bzy + 2Czx + Dy^2 + 2Eyx + Fx^2 + 2Gz + 2Hy + 2Kx = 0, \\ A'z^2 + 2B'zy + 2C'zx + D'y^2 + 2E'yx + F'x^2 + 2G'z + 2H'y + 2K'x = 0, \end{cases}$$

die Gleichungen irgend zweier durch den Anfangspunct gehender Flächen zweiter Ordnung. Alsdann stellen bekanntlich die linearen Theile dieser Gleichungen:

$$Gz + Hy + Kx = 0,$$

$$G'z + H'y + K'x = 0,$$

die Tangential-Ebenen der beiden Flächen im Anfangspuncte der Coordinaten dar. Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen ist eine, beiden Flächen gemeinschaftliche Tangente. Nehmen wir diese Linie zur Axe der x , so ergibt sich $K = K' = 0$. Wenn die beiden Flächen dieselbe Tangential-Ebene haben, so müssen die beiden letzten Gleichungen identisch sein. Dies erfordert überdies noch $\frac{H}{G} = \frac{H'}{G'}$. Wenn diese gemeinschaftliche Tangential-Ebene mit der Ebene der xy zusammenfallen soll, so muß H und H' verschwinden. Diesen Bestimmungen gemäß nehmen die Gleichungen (1.) folgende Form an:

$$(2.) \begin{cases} Az^2 + 2Bzy + 2Czx + Dy^2 + 2Eyx + Fx^2 + 2Gz = 0, \\ A'z^2 + 2B'zy + 2C'zx + D'y^2 + 2E'yx + F'x^2 + 2G'z = 0, \end{cases}$$

3. Wenn wir die Axe der x in der Tangential-Ebene um irgend einen Winkel α fortrücken lassen, um alsdann die Durchschnittscurven der beiden gegebenen Flächen mit der neuen Ebene der z, x zu bestimmen, so brauchen wir nur, wie bekannt, wenn wir den von den Axen der y und x gebildeten Winkel β nennen, $x \sin(\beta - \alpha)$ für x , und $x \sin \alpha$ für y in den letzten beiden Gleichungen zu substituiren und nachher $y = 0$ zu setzen. Auf diese Weise ergeben sich folgende beide Gleichungen:

$$(3.) \begin{cases} az^2 + 2czz + fx^2 + 2gz = 0, \\ a'z^2 + 2c'zx + f'x^2 + 2g'z = 0, \end{cases}$$

indem wir, der Kürze halber,

$$a = A, \quad c = B \sin \alpha + C \sin(\beta - \alpha),$$

$$f = D \sin^2 \alpha + 2E \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + F \sin^2(\beta - \alpha), \quad g = G,$$

$$a' = A', \quad c' = B' \sin \alpha + C' \sin(\beta - \alpha),$$

$$f' = D' \sin^2 \alpha + 2E' \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + F' \sin^2(\beta - \alpha), \quad g' = G',$$

setzen. Die beiden durch (3.) dargestellten Curven berühren sich immer im Anfangspuncte der Coordinaten, welches auch der Winkel α sein mag. Wenn der Contact in diesem Puncte ein dreipunctiger sein soll, so wird erfordert, daß

$$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'},$$

und mithin, wenn wir substituieren:

$$\begin{aligned} & G[D'\sin^2\alpha + 2E'\sin\alpha\sin(\beta-\alpha) + F'\sin^2(\beta-\alpha)] \\ &= G'[D\sin^2\alpha + 2E\sin\alpha\sin(\beta-\alpha) + F\sin^2(\beta-\alpha)]. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir entwickeln und, der Kürze halber, für den Ausdruck $\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$, der wenn der Coordinaten-Winkel β ein rechter ist in $\tan\alpha$ übergeht, ϕ schreiben, folgende quadratische Gleichung:

$$(4.) \quad (GD' - G'D)\phi^2 + 2(GE' - G'E)\phi + (GF' - G'F) = 0.$$

Also:

Wenn irgend zwei Flächen zweiter Ordnung in demselben Punkte eine gemeinschaftliche Tangential-Ebene haben, so giebt es überdies, im Allgemeinen, zwei Richtungen, nach welchen die Flächen dieselbe Krümmung, d. h. einen Contact von drei Punkten haben.

Die eine dieser Richtungen fällt mit der ersten oder zweiten Axe, oder beide Richtungen fallen mit den beiden Axen zusammen, wenn $GF' = G'F$, oder $GD' = G'D$, oder wenn zugleich $GF' = G'F$ und $GD' = G'D$.

4. Die folgende geometrische Beziehung der beiden in Rede stehenden Richtungen ergibt sich unmittelbar aus der Form der Gleichung (4.), in der das zweite Glied ausfällt, wenn $E = E' = 0$. Wenn man nemlich irgend eine den beiden Flächen begegnende, der Tangential-Ebene parallele Ebene legt, so haben die beiden Durchschnittscurven in dieser Ebene, wie überhaupt je zwei in derselben Ebene befindlichen Linien zweiter Ordnung, ein gemeinschaftliches System zugeordneter Durchmesser. Wenn man alsdann durch den Berührungspunct beider Flächen diesen beiden Durchmessern zwei gerade Linien parallel zieht, so bilden diese mit denjenigen beiden geraden Linien, nach welchen die beiden gegebenen Flächen dieselbe Krümmung haben, eine System von solchen vier geraden Linien, die man „Harmonicalen“ nennt.

Wenn eine der beiden sich berührenden Flächen, etwa die erste, eine Kugel ist, oder wenn auch nur der Berührungspunct ein „ombilic“ dieser Fläche ist, so hat man, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, immer $E = 0$, und indem man die Axen der x und y nach den Hauptkrümmungs-Richtungen der zweiten Fläche nimmt, verschwindet auch E' . Man erhält also für ϕ oder $\tan\alpha$ zwei gleiche und entgegen-

gesetzte Werthe, so daß die durch α bestimmten Richtungen gemeinschaftlicher Krümmung mit den Hauptkrümmungs-Richtungen der zweiten Fläche gleiche Winkel bilden.

Wenn der Berührungspunct ein „*ombilic*“ beider Flächen zugleich ist, so verliert die Gleichung (4.) ihre Bedeutung; denn alsdann hat man

$$D = F, \quad D' = F', \quad E = E' = 0,$$

und mithin:

$$f = F, \quad f' = F'.$$

Die Gleichungen:

$$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'} \quad \text{oder} \quad \frac{G}{F} = \frac{G'}{F'}$$

werden also entweder gar nicht befriedigt, oder für jeden beliebigen Werth von α . Dasselbe ergiebt sich auch a priori.

5. Wenn wir die Gleichungen (2.) addiren, nachdem wir die zweite derselben mit einem unbestimmten Coëfficienten multiplicirt haben, so erhalten wir:

$$(A + \mu A')z^2 + 2(B + \mu B')zy + 2(C + \mu C')zx + (D + \mu D')y^2 \\ + 2(E + \mu E')yx + (F + \mu F')x^2 + 2(G + \mu G')z = 0$$

für die allgemeine Gleichung aller Flächen zweiter Ordnung, welche mit den beiden gegebenen dieselbe Durchschnittscurve haben. Sollen sich diese Flächen daher in ebenen Curven schneiden, und eine derselben in die Ebene der xy fallen, wo sich dieselbe alsdann auf einen Punct oder ein System von zwei geraden Linien reducirt, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichungen:

$$D + \mu D' = 0, \quad E + \mu E' = 0, \quad F + \mu F' = 0,$$

mithin

$$(5.) \quad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'}.$$

Diese Gleichungen enthalten zwei von einander unabhängige Bedingungen, von denen aber nur eine auf die Natur der Flächen sich bezieht. Denn wir können immer in den ursprünglichen Gleichungen (2.) die Coëfficienten von xy beide fortschaffen, indem wir die Richtung der Axen der x und y ändern.

Vermittelst der Gleichungen (5.) können wir die Gleichung (4.) der 3ten Nummer auf jede der beiden nachstehenden zurückführen:

$$D\varphi^2 + 2E\varphi + F = 0,$$

$$D'\varphi^2 + 2E'\varphi + F' = 0;$$

woraus hervorgeht, das alsdann die in jener Nummer bezeichneten Rich-

tungen gleicher Krümmung diejenigen sind, nach welchen die Krümmungen beider Flächen unendlich werden. Die Hauptkrümmungen der beiden Flächen haben dieselben Richtungen, und nach jeder beliebigen Richtung ist das Verhältniß der Krümmungen beider Flächen ein constantes.

6. Die zweite Durchschnitts-Ebene der beiden gegebenen Flächen wird, bei den eben gemachten Voraussetzungen, durch folgende Gleichung dargestellt:

$$(6.) \quad (A + \mu A')z + 2(B + \mu B')y + 2(C + \mu C')x + (G + \mu G') = 0.$$

Soll diese Ebene durch den Berührungspunct gehen, so ist nothwendig

$$G + \mu G' = 0,$$

und also nach der vorigen Nummer:

$$(7.) \quad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} = \frac{G}{G'},$$

wonach die Gleichung (4.) der 2ten Nummer für jeden beliebigen Werth von φ befriedigt wird, und, umgekehrt: diese Gleichung wird nur dann befriedigt, abgesehen von dem besondern, am Ende der 3ten Nummer betrachteten Falle, wenn die in (7.) enthaltenen Gleichungen Statt haben. Diese Gleichungen enthalten also die Bedingungen einer dreipunctigen Osculation nach allen Richtungen. Diese findet nur dann Statt wenn die gegebenen Flächen sich in demselben Puncte so berühren, daß sie außerdem noch in einer ebenen Curve sich schneiden und diese Curve durch den Berührungspunct geht.

7. Die Gleichungen (3.) stellen in dem eben betrachteten Falle zwei Durchschnittscurven dar, die sich immer im Anfangspuncte osculiren, welches auch der Winkel α sein mag. Soll diese Osculation eine vierpunctige sein, so erhalten wir, wie bekannt, neben der Bedingungs-Gleichung

$$\frac{g}{f} = \frac{g'}{f'},$$

noch eine zweite:

$$\frac{c}{f} = \frac{c'}{f'},$$

statt welcher wir auch folgende nehmen können:

$$\frac{g}{c} = \frac{g'}{c'},$$

oder, wenn wir substituiren, folgende:

$$G[B'\sin\alpha + C'\sin(\beta - \alpha)] = G'[B\sin\alpha + C\sin(\beta - \alpha)].$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$(8.) (GB' - G'B)\phi + (GC' - G'C) = 0.$$

Also:

Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung nach allen Richtungen hin einen dreipunctigen Contact haben, so findet überdies nach *einer* Richtung hin ein Contact von vier Puncten Statt.

Die obige Gleichung zeigt, daß diese Richtung eines höhern Contactes durch die Durchschnittslinie der Durchschnitts-Ebene (6.) der beiden gegebenen Flächen mit ihrer gemeinsamen Tangential-Ebene angezeigt wird; wie dies auch a priori sich leicht einsehen läßt,

8. Wenn die beiden Gleichungen (4.) und (8.) zugleich bestehen sollen, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung:

$$(GD' - G'D)(GC' - G'C)^2 - 2(GE' - G'E)(GC' - G'C)(GB' - G'B) + (GF' - G'F)(GB' - G'B)^2 = 0.$$

In diesem Falle ist die Osculation der beiden gegebenen, sich bloß berührenden Flächen, die, im Allgemeinen, nach dem Satze der 3ten Nummer nach zwei Richtungen hin Statt hat, nicht nach beiden Richtungen eine dreipunctige, sondern nach einer derselben eine vierpunctige, und immer eine reelle.

9. Für den Fall eines vollständigen Contactes zweiter Ordnung nimmt die Gleichung (6.) nach dem Vorstehenden folgende Form an:

$$(A + \mu A')z + 2(B + \mu B')y + 2(C + \mu C')x = 0.$$

Soll die bezügliche Durchschnitts-Ebene mit der Tangential-Ebene zusammenfallen, so ist nothwendig und hinreichend, daß

$$B + \mu B' = 0, \quad C + \mu C' = 0.$$

Eine dieser beiden Bedingungs-Gleichungen wird wieder auf Rechnung der Coordinaten-Annahme kommen, denn man kann die Richtung der dritten Axe so verändern, daß aus den beiden Gleichungen (2.) die Coefficienten von zy oder zx zugleich verschwinden. Der Werth von ϕ erscheint nach diesen Bedingungs-Gleichungen unter der nicht reducirbaren Form $\frac{0}{0}$; es findet also, und es findet nur in diesem Falle nach allen Richtungen hin eine vierpunctige Osculation der beiden Flächen Statt. Wir haben also in diesem Falle folgende Bedingungen:

$$(9.) \quad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} = \frac{F}{F'} = \frac{G}{G'}.$$

Es giebt unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, die mit einer gegebenen in einem gegebenen Punkte einen vollständigen Contact der dritten Ordnung haben. Eine solche Fläche ist vollkommen bestimmt, wenn überdies irgend ein Punkt, durch welche sie gehen, oder irgend eine Ebene, die sie berühren soll, gegeben ist.

Die vorstehenden Entwicklungen enthalten die vollständige Theorie des Contactes zweier Flächen zweiter Ordnung in einem gegebenen Punkte. Ich könnte an dieselben unmittelbar eine Reihe interessanter Constructionen knüpfen, dem analog, wie ich es in meinen „Entwicklungen“ in Beziehung auf Osculation der Linien zweiter Ordnung gethan habe. Doch dies liegt nicht in der Absicht gegenwärtigen Aufsatzes. Ich gehe daher sogleich über zu der vollständigen Theorie der Osculation zweier Flächen zweiter und dritter Ordnung.

10. Die Gleichungen irgend zweier Flächen dritter und zweiter Ordnung, welche von der Ebene der yx im Anfangspunkte berührt werden, seien, bei derselben Coordinaten-Bestimmung als bisher, folgende:

$$(1.) \begin{cases} Az^3 + Bz^2y + Cz^2x + Dzy^2 + Ezyx + Fzx^2 + Gy^3 + Hy^2x + Iyx^2 + Kx^3 \\ \quad + Lz^2 + Mzy + Nzx + Oy^2 + Pyx + Qx^2 + Rz = 0, \\ \quad L'z^2 + M'zy + N'zx + O'y^2 + P'yx + Q'x^2 + R'z = 0. \end{cases}$$

Wenn wir die Axe der x in der Tangential-Ebene um irgend einen Winkel α sich drehen lassen, und durch diese neue Axe der x und die Axe der z eine Ebene legen, so müssen wir, um die Gleichungen der Durchschnittscurven der beiden gegebenen Flächen mit dieser Ebene zu finden, in den vorstehenden Gleichungen $x \sin \alpha$ für y und $x \sin(\beta - \alpha)$ für x schreiben und dann $y = 0$ setzen. Auf diese Weise kommt:

$$(2.) \begin{cases} az^3 + bz^2x + czx^2 + dx^3 + ez^2 + fzx + gx^2 + hz = 0, \\ e'z^2 + f'zx + g'x^2 + h'z = 0, \end{cases}$$

indem wir, der Kürze halber,

$$a = A, \quad b = B \sin \alpha + C \sin(\beta - \alpha), \quad c = D \sin^2 \alpha + E \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + F \sin^2(\beta - \alpha),$$

$$d = G \sin^3 \alpha + H \sin^2 \alpha \sin(\beta - \alpha) + I \sin \alpha \sin^2(\beta - \alpha) + K \sin^3(\beta - \alpha),$$

$$e = L, \quad f = M \sin \alpha + N \sin(\beta - \alpha),$$

$$g = O \sin^2 \alpha + P \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + Q \sin^2(\beta - \alpha), \quad h = R,$$

$$e' = L', \quad f' = M' \sin \alpha + N' \sin(\beta - \alpha),$$

$$g' = O' \sin^2 \alpha + P' \sin \alpha \sin(\beta - \alpha) + Q' \sin^2(\beta - \alpha), \quad h' = R'$$

setzen. Wenn die durch die Gleichungen (2.) dargestellten Curven sich

dreipunctig osculiren sollen, so hat man folgende Bedingungs-Gleichung:

$$h g' - h' g = 0^*)$$

aus der wir, ähnlich wie in der 3ten Nummer, folgende erhalten:

$$(3.) (RO' - R'O)\varphi^2 + (RP' - R'P)\varphi + (RQ' - R'Q) = 0.$$

Also:

Wenn eine Fläche zweiter und eine Fläche dritter Ordnung in demselben Punkte von derselben Ebene berührt werden, so giebt es im Allgemeinen *zwei* Richtungen, nach denen zwischen den beiden Flächen ein Contact von drei Punkten Statt hat.

Es hat die Durchschnittscurve der beiden Flächen im Berührungspunkte derselben einen Doppelpunct, einen Rückkehrpunct oder einen conjugirten Punct; und mithin im ersten Falle in diesem Punkte zwei Tangenten, die im zweiten Falle zusammenfallen und im dritten Falle imaginär werden. Diese Tangenten zeigen die Richtungen jener dreipunctigen Osculation an. Dasselbe gilt offenbar von je zwei Flächen jedes beliebigen Grades.

11. Soll nach allen Richtungen hin ein Contact zweiter Ordnung Statt finden, so muß die Gleichung (3.) für jeden beliebigen Werth von φ befriedigt werden. Dies führt uns zu folgenden drei Bedingungs-Gleichungen:

$$(4.) RO' = R'O, \quad RP' = R'P, \quad RQ' = R'Q,$$

*) Man erhält nach meinen „Entwicklungen“ S. 227., Note, folgende Gleichungen:

$$(a.) \quad h g' - h' g = 0,$$

$$(b.) \quad f g' - f' g - h' d = 0,$$

$$(c.) \quad g' (g' e - g e') = h' (c g' - d f'),$$

$$(d.) \quad g' (b g' - d e') = f' (c g' - d f').$$

Die erste dieser vier Gleichungen zeigt eine dreipunctige Osculation der Curven (2.) im Anfangspunkte der Coordinaten an, die zwei ersten zeigen eine vierpunctige, die drei ersten eine fünfpointige, und endlich alle vier zusammen eine sechspunctige Osculation an. Wenn man zu den vorstehenden vier Gleichungen noch folgende fünfte hinzufügt:

$$(e.) \quad a g'^2 = e' (c g' - d f'),$$

so wird dadurch ausgedrückt, daß die Linie dritter Ordnung aus dem Systeme der Linie zweiter Ordnung und irgend einer geraden Linie besteht: Statt der drei letzten Gleichungen (c.), (d.), (e.) können wir folgende drei nehmen:

$$(c'.) \quad h' g' (h' g' e - h' e' g - h'^2 c + h' f' f - f'^2 h) = 0,$$

$$(d'.) \quad g'^2 (h'^2 b - h' e' f + f' e' h - f' h' e + f' e' h) = 0,$$

$$(e'.) \quad g'^2 (h' e' e - e'^2 h - h'^2 a) = 0,$$

Gleichungen die wir erhalten, indem wir die jedesmalig vorhergehenden berücksichtigen

oder

$$\frac{O}{O'} = \frac{P}{P'} = \frac{Q}{Q'} = \frac{R}{R'}.$$

Wir wären zu denselben Bedingungs-Gleichungen gekommen, wenn wir statt der gegebenen Fläche dritter Ordnung diejenige Fläche in Betracht gezogen hätten, die durch denjenigen Theil ihrer Gleichung dargestellt wird, der die veränderlichen Größen nur in der ersten und zweiten Potenz enthält. Es ist klar, daß wir überhaupt in allen denjenigen Fällen, wo es sich bloß von einem Contacte zweiter Ordnung zwischen irgend zweien Flächen (algebraischen oder transcendenten) in einem gegebenen Punkte handelt, zwei Flächen zweiter Ordnung nehmen können, deren Gleichungen wir aus den Gleichungen jener Flächen (nöthigen Falls entwickelt) auf die eben angezeigte Weise erhalten.

12. Wenn irgend eine (algebraische oder transcendente) Fläche in irgend einem Punkte von einer Ebene berührt wird, so schneidet diese Ebene die Fläche in einer solchen Curve, die im Berührungspunkte einen Doppelpunct, einen Rückkehrpunct oder einen conjugirten Punct hat. Wenn zwei Flächen von derselben Ebene in demselben Punkte berührt werden, so enthält diese Ebene zwei Durchschnittscurven mit demselben Doppelpuncte. Wenn der Contact der beiden Flächen ein vollständiger der zweiten Ordnung ist, so erhalten wir nach (4.) der vorhergehenden Nummer, wenn wir, was in unserer Willkür steht, die Coëfficienten von z in den Gleichungen beider Flächen gleich setzen ($R=R'$), auch gleiche Coëfficienten von y^2 , yx und x^2 , so daß also die Durchschnittscurven der beiden Flächen mit der Tangential-Ebene in dem gemeinschaftlichen Doppelpuncte dieselben beiden Tangenten haben. In dem Falle daß eine osculirende Fläche vom zweiten Grade ist, sind diese Tangenten (die imaginär werden können und alsdann auf einen Punct sich reduciren) diejenigen beiden geraden Linien selbst, nach welchen die Berührungs-Ebene jene Fläche schneidet. Zugleich ersieht man auf diese Weise, daß wenn zwei Flächen zweiter Ordnung einen Contact der zweiten Ordnung haben, die Durchschnittslinie beider Flächen mit der Tangential-Ebene (ein System von zwei geraden Linien oder eine Ellipse die auf einen Punct sich reducirt hat) dieselben sind, und sich also die beiden Flächen nach derselben Ebene berühren und überdies in einer

ebenen Curve schneiden. — Umgekehrt ist es nicht hinreichend, daß die beiden Durchschnittscurven in der gemeinschaftlichen Tangential-Ebene zweier Flächen dieselben beiden Tangenten haben; auch nicht, daß diese beiden Curven durchaus dieselben sind, damit die beiden Flächen einen vollständigen Contact der zweiten Ordnung haben.

13. Damit der Contact der beiden Curven (2.) ein vierpunctiger sei, muß neben der frühern Gleichung auch noch folgende bestehen:

$$fg' - f'g - h'd = 0.$$

Substituiren wir für die in dieser Gleichung vorkommenden Ausdrücke ihre Werthe und dividiren zugleich durch $\sin^3(\beta - \alpha)$, so kommt:

$$(5.) \left\{ \begin{array}{l} (MO' - M'O - R'G)\phi^3 + (MP' - M'P + NO' - N'O - R'H)\phi^2 \\ + (MQ' - M'Q + NP' - N'P - R'I)\phi + (NQ' - N'Q - R'K) = 0. \end{array} \right.$$

Also:

Wenn zwei Flächen zweiten und dritten Grades einen vollständigen Contact der zweiten Ordnung haben, so findet überdies, im Allgemeinen, nach dreien, und immer wenigstens nach einer Richtung, eine vierpunctige Osculation Statt.

Die Durchschnittscurve beider Flächen (doppelter Krümmung) hat im Anfangspuncte der Coordinaten einen dreifachen Punct (diesen Ausdruck in einer ausgedehntern Bedeutung als gewöhnlich genommen) und also drei Tangenten, von denen zwei imaginär werden können. Nach diesen Tangenten findet jene vierpunctige Osculation Statt. Dasselbe gilt offenbar, wenn wir die Fläche dritter Ordnung mit irgend einer beliebigen vertauschen.

14. Wenn der Contact nach allen Richtungen hin ein vierpunctiger sein soll, so ergeben sich folgende vier Bedingungen-Gleichungen:

$$(6.) \left\{ \begin{array}{l} MO' - M'O = R'G, \\ MP' - M'P + NO' - N'O = R'H, \\ MQ' - M'Q + NP' - N'P = R'I, \\ NQ' - N'Q = R'K. \end{array} \right.$$

Diese vier Gleichungen, so wie die drei Gleichungen (4.), sind alle sieben rücksichtlich der Constanten jeder der beiden Gleichungen (1.) linear, und da keine derselben eine Folge der andern ist, so enthalten sie sieben von einander unabhängige Bedingungen. Diese sieben Bedingungen können,

im Allgemeinen, nicht erfüllt werden, wenn man die erste Fläche als eine gegebene, die zweite als eine zu bestimmende, und dem gemäß die Constanten ihrer Gleichung als unbestimmte Coëfficienten betrachtet. Da die Gleichungen (4.) und (6.) kein von diesen Constanten unabhängiges Glied enthalten, so kann von einer absoluten Bestimmung derselben nicht die Rede sein; wenn wir aber eine derselben, etwa R' , beliebig annehmen, so geben fünf von jenen sieben Gleichungen die Werthe von M' , N' , O' , P' und Q' . Der Coëfficient L' kommt in diesen Gleichungen gar nicht vor; wenn daher die, durch fünf jener Gleichungen bestimmten Werthe auch die beiden übrigen der sieben Gleichungen befriedigen, wodurch zwei Bedingungs-Gleichungen zwischen den Constanten der gegebenen Fläche dritter Ordnung angezeigt werden, so giebt es unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, die mit der gegebenen Fläche in dem gegebenen Punkte einen vollständigen Contact der dritten Ordnung haben. Die Gleichungen aller dieser Flächen stimmen, wenn wir einem Coëfficienten, dem von z z. B., denselben beliebigen Werth beilegen, auch in allen übrigen Coëfficienten, ausgenommen in dem von z^2 , überein. Dasselbe ergibt sich auch a priori, weil offenbar alle jene osculirenden Flächen zweiter Ordnung auch unter sich einen Contact der dritten Ordnung haben.

15. Wenn die beiden gegebenen Flächen einen vollständigen Contact dritter Ordnung haben, so haben sie, nach gewissen Richtungen, auch einen Contact vierter Ordnung. Wenn wir die Durchschnittscurven nach einer solchen Richtung wiederum durch die Gleichungen (2.) darstellen, so erhalten wir zu den beiden frühern Bedingungs-Gleichungen noch folgende:

$$(7.) \quad h'g'(h'g'e - h'e'g - h'^2e + h'f'f - f'^2h) = 0.$$

Diese Gleichung wird zuvörderst befriedigt, wenn wir den in den Klammern eingeschlossenen Ausdruck gleich Null setzen. Dies führt uns, wenn wir substituiren und entwickeln, zu folgender Gleichung:

$$(8.) \quad \begin{cases} (R'O'L - R'L'O - R'^2D + R'M'M - M'^2R)\phi^2 \\ + R'P'L - R'L'P - R'^2E + R'M'N + R'N'M - 2M'N'R) \phi \\ + (R'Q'L - R'L'Q - R'^2F + R'N'N - N'^2R) = 0. \end{cases}$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf ϕ vom zweiten Grade ist, so giebt es hiernach im Allgemeinen zwei Richtungen, nach welchen der Contact der beiden Flächen ein fünfpunctiger ist.

Diese Richtungen werden durch zwei Tangenten an die Durchschnittscurve dieser beiden Flächen angezeigt.

Die Gleichung (7.) wird ebenfalls befriedigt, wenn man $g' = 0$ setzt. Dies führt zu folgender Gleichung:

$$O'\varphi^2 + P'\varphi + Q = 0,$$

die nach der 11ten Nummer mit folgender identisch ist:

$$O\varphi^2 + P\varphi + Q = 0.$$

Die Bedeutung hiervon wird sich später in der 22sten Nummer ergeben.

16. Wenn der Contact nach allen Richtungen hin ein fünfpunctiger sein soll, so ergeben sich folgende drei Bedingungs-Gleichungen:

$$(9.) \quad \begin{cases} R'O'L - R'L'O - R'^2D + R'M'M - M'^2R = 0, \\ R'P'L - R'L'P - R'^2E + R'M'N + R'N'M - 2M'N'R = 0, \\ R'Q'L - R'L'Q - R'^2F + R'N'N - N'^2R = 0. \end{cases}$$

Wenn wir die Fläche zweiter Ordnung als eine gegebene betrachten, so können wir die Fläche dritter Ordnung immer auf solche Weise bestimmen, daß die Gleichungen (4.), (6.) und (9.) alle zehn befriedigt werden. Diese Gleichungen sind alle in Beziehung auf die Constanten der Gleichung der Fläche dritter Ordnung linear.

17. Sollen in dem Falle eines vollständigen Contacts der vierten Ordnung die durch (2.) dargestellten Durchschnittscurven einen sechspunctigen Contact haben, so muß auch noch folgende Gleichung befriedigt werden:

$$(10.) \quad g'^2(h'^2b - h'e'f + f'e'h - f'h'e + f'e'h) = 0.$$

Abstrahiren wir von dem quadratischen Factor g'^2 , so wird diese Gleichung nur dann befriedigt, wenn der in der Klammer befindliche Factor verschwindet. Wenn wir substituiren und entwickeln, so kommt:

$$(11.) \quad \begin{cases} (R'^2B - LR'M + L'M'R - R'M'L + L'M'R)\varphi \\ = (R'^2C - L'R'N + L'N'R - R'N'L + L'N'R). \end{cases}$$

Diese Gleichung giebt uns, da sie in Beziehung auf φ nur vom ersten Grade ist, eine einzige Richtung eines sechspunctigen Contactes. Diese Richtung ist durch eine Tangente an die Durchschnittscurve der beiden Flächen angezeigt.

18. Soll der Contact nach allen Richtungen hin ein sechspunctiger sein, so erhalten wir folgende zwei neue, in Bezie-

hung auf die Coëfficienten der Gleichung der Fläche dritter Ordnung ebenfalls lineare Bedingungs-Gleichungen:

$$(12.) \quad \begin{cases} R'^2 B - L' R' M + L' M' R - R' M' L + L' M' R = 0, \\ R'^2 C - L' R' N + L' N' R - R' N' L + L' N' R = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten hiernach im Ganzen zwölf Bedingungs-Gleichungen.

19. Um endlich noch auszudrücken, daß die erste der durch (2.) dargestellten Durchschnittscurven aus dem Systeme der andern und einer geraden Linie bestehe, erhalten wir folgende neue Bedingungs-Gleichung:

$$g'^2 (h' e' e - e'^2 h - h'^2 a) = 0.$$

Wenn wir von dem Factor g'^2 abstrahiren, so erhalten wir, indem wir substituiren:

$$(13.) \quad R' L' L - L'^2 R - R'^2 A = 0,$$

eine Gleichung, die vom Winkel α unabhängig ist. Wird daher diese Gleichung befriedigt, so besteht die osculirende Fläche dritter Ordnung aus dem Systeme der gegebenen Fläche zweiter Ordnung und irgend einer Ebene.

20. Da die geometrischen Beziehungen, um die es uns hier hauptsächlich zu thun ist, von jeder Coordinaten-Annahme unabhängig sind, so können wir die Discussion sehr erleichtern, wenn wir für die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung, die wir als eine gegebene betrachten, folgende nehmen:

$$(14.) \quad \alpha z^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 + z = 0,$$

welche, bei gehöriger Bestimmung von α , β und γ , jede beliebige Fläche dieser Ordnung darstellt. Die Gleichung der Fläche dritter Ordnung ist, indem wir, unbeschadet der Allgemeinheit, den Coëfficienten von z gleich Eins setzen, folgende:

$$(15.) \quad \begin{cases} Az^3 + Bz^2y + Cz^2x + Dzy^2 + Ezyx + Fzx^2 + Gy^3 + Hy^2x \\ + Iyx^2 + Kx^3 + Lz^2 + Mzy + Nzx + Oy^2 + Pyx + Qx^2 = 0. \end{cases}$$

Alsdann erhält man

1) aus den Gleichungen (4.) folgende Bedingungs-Gleichungen für einen vollständigen Contact von drei Puncten:

$$(16.) \quad O = \beta, \quad P = 0, \quad Q = \gamma;$$

2) aus den Gleichungen (6.) für einen vollständigen Contact von vier Puncten, neben den vorstehenden Bedingungs-Gleichungen noch folgende:

$$(17.) \quad M\beta = G, \quad N\beta = H, \quad M\gamma = I, \quad N\gamma = K.$$

Der allgemeinen Gleichung der osculirenden Fläche dritter Ordnung können wir, mit Berücksichtigung der Gleichungen (16.) und (17.) folgende Form geben:

$$(18.) \quad \begin{cases} z^2(Az + By + Cx + L) + z(Dy^2 + Exy + Fx^2) \\ \quad + (\beta y^2 + \gamma x^2 + z)(My + Nx + 1) = 0. \end{cases}$$

Wenn wir in dieser Gleichung für den Ausdruck $(\beta y^2 + \gamma x^2 + z)$ den Werth $(-\alpha z)$, den uns die Gleichung (15.) giebt, schreiben, so kommt:

$$(19.) \quad z\{Az^2 + (B - M\alpha)zy + (C - N\alpha)xz + (L - \alpha)z + Dy^2 + Exy + Fx^2\} = 0.$$

Die Form dieser Gleichung giebt uns folgenden Satz:

Wenn zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung sich nach allen Richtungen hin vierpunctig osculiren, so berühren sich die beiden Flächen im Osculationspuncte nach einer ebenen Curve (zweiter Ordnung) und schneiden sich überdies auf einer zweiten Fläche zweiter Ordnung, die mit jenen beiden Flächen im Osculationspuncte dieselbe Tangential-Ebene hat.

Hiernach könnten wir die Discussion des Contactes höherer Ordnung zweier Flächen zweiten und dritten Grades auf die Theorie des Contactes zweier Flächen zweiter Ordnung zurückführen.

Die Durchschnitte der Tangential-Ebene mit der Fläche zweiter und dritter Ordnung haben folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \beta y^2 + \gamma x^2 &= 0, \\ (My + Nx + 1)(\beta y^2 + \gamma x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Die Form dieser Gleichungen zeigt ebenfalls, daß die beiden Flächen sich in einer Ebene berühren. Es besteht nemlich der Durchschnitt der Tangential-Ebene mit der Fläche dritter Ordnung, wenn β und γ von entgegengesetztem Zeichen sind, aus drei geraden Linien, von denen zwei in dem Osculations-Puncte sich schneiden und dieselben Linien sind, nach welchen die Fläche zweiter Ordnung von der Tangential-Ebene geschnitten wird, und von denen die dritte durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$(20.) \quad My + Nx + 1 = 0.$$

Die beiden erstgenannten geraden Linien fallen ganz zusammen, wenn β oder γ Null sind, wonach zugleich die Fläche zweiter Ordnung ein Kegel wird. Wenn endlich β und γ von gleichem Zeichen sind, so besteht jener Durchschnitt aus einem conjugirten Puncte (nemlich einer ver-

schwindenden Ellipse) und einer geraden Linie, die wiederum durch die Gleichung (20.) dargestellt wird.

Die Form der Gleichung (20.) zeigt, daß die bezügliche gerade Linie nie durch den Anfangspunct der Coordinaten, d. h. durch den Osculationspunct gehen kann; was auch a priori sich ergibt, wenn man erwägt, daß alsdann die Fläche dritter Ordnung mit der Tangential-Ebene einen Contact zweiter Ordnung hat, den eine Fläche zweiter Ordnung nie haben kann.

Aus diesen letzten Entwicklungen ergibt sich auch sogleich die geometrische Deutung der beiden Bedingungs-Gleichungen, „daß eine Fläche dritter Ordnung in einem gegebenen Punkte mit einer Fläche zweiter Ordnung einen vollständigen Contact von vier Punkten habe,“ auf welche wir in der 14ten Nummer geführt worden sind. Es ist nemlich offenbar zu diesem Ende erforderlich, daß die Tangential-Ebene in dem gegebenen Punkte die gegebene Fläche nach dreien geraden Linien schneide, von denen zwei zusammenfallen und auf einen Punkt sich reduciren können. (In dem Falle dreier geraden Linien wird die Fläche von der Tangential-Ebene in drei verschiedenen Punkten, nemlich in den Winkelpuncten des von jenen Linien gebildeten Dreicks berührt; wenn zwei Linien imaginär werden, findet nur ein Berührungspunct Statt; wenn endlich diese beiden Linien in eine einzige Linie zusammenfallen, so findet nach dieser ganzen Linie eine einfache Berührung und in einem Punkte derselben, dem Durchschnitte mit der dritten Linie, ein Contact der zweiten Ordnung Statt.)

3) Für einen vollständigen Contact der vierten Ordnung erhalten wir, neben den Bedingungs-Gleichungen (16.) und (17.), aus den Gleichungen (9.) noch folgende drei:

$$(21.) \quad \beta(L - \alpha) = D, \quad E = 0, \quad \gamma(L - \alpha) = F,$$

wonach sich die Gleichung der osculirenden Fläche (18.) in folgende verwandelt:

$$(22.) \quad \begin{cases} z^2(Az + By + Cx + L) + z(\beta y^2 + \gamma x^2)(L - \alpha) \\ \quad + (\beta y^2 + \gamma x^2 + z)(My + Nx + 1) = 0. \end{cases}$$

Substituiren wir endlich in diese Gleichung

$$\begin{aligned} & -(\alpha z^2 + z) \quad \text{für} \quad (\beta y^2 + \gamma x^2), \\ & -\alpha z^2 \quad - \quad (\beta y^2 + \gamma x^2 + z), \end{aligned}$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$(23.) \quad z^2 \{ [A - (L - \alpha)\alpha]z + (B - M\alpha)y + (C - N\alpha)x \} = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichung ziehen wir folgenden Satz:

Wenn zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung einen vollständigen Contact der vierten Ordnung haben, so berühren sie sich nach zwei Ebenen und schneiden sich überdies nach einer ebenen Curve, die durch den Berührungspunct der Flächen geht.

Es verdient bemerkt zu werden, daß die Gleichung (23.) von β und γ durchaus unabhängig ist.

4) Für einen vollständigen Contact der fünften Ordnung ergeben sich neben den Gleichungen (16.), (17.) und (21.), aus (12.) noch folgende beide:

$$B = M\alpha, \quad C = N\alpha.$$

wonach sich die Gleichung der osculirenden Fläche (22.) in

$$(24.) \quad \begin{cases} z^2(Az + M\alpha y + N\alpha x + L) + z(\beta y^2 + \gamma x^2)(L - \alpha) \\ \quad + (\beta y^2 + \gamma x^2 + z)(My + Nx + 1) = 0 \end{cases}$$

und die Gleichung (23.) in

$$z^3 = 0$$

verwandelt. Also:

Wenn zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung sich nach allen Richtungen hin sechspunctig osculiren, so berühren sie sich nach dreien Ebenen und haben daher sonst keinen Punct mehr mit einander gemein.

5) Die Gleichung (13.) geht in vorliegendem Falle in folgende über:

$$\alpha(L - \alpha) = A.$$

Wenn auch diese Bedingungs-Gleichung befriedigt wird, so besteht die Fläche dritter Ordnung aus dem Systeme der gegebenen Fläche zweiter Ordnung und irgend einer Ebene. Wirklich stellt auch in diesem Falle die Gleichung:

$$[A - (L - \alpha)\alpha]z + (B - M\alpha)y + (C - N\alpha)x = 0$$

keine bestimmte Durchschnitts-Ebene mehr dar, und die Gleichung (24.) verwandelt sich in folgende:

$$(\alpha z^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 + z)[(L - \alpha)z + My + Nx + 1] = 0.$$

12. Aus dem Bisherigen ergibt sich folgende Bestimmung für die Zahl der zu erfüllenden Bedingungen, damit zwei Flächen zweiter

und dritter Ordnung in einem gegebenen Punkte nach allen Richtungen hin einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.

	Zahl der Bedingungs-Gleichungen.
Einpunctiger Contact:	1,
zweipunctiger - -	$1 + 2 = 3,$
dreipunctiger - -	$1 + 2 + 3 = 6,$
vierpunctiger - -	$1 + 2 + 3 + 4 = 10,$
fünfpunctiger - -	$1 + 2 + 3 + 4 + 3 = 13,$
sechspunctiger - -	$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 = 15,$
unendlichpunct. - -	$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16.$

Wenn wir eine Fläche irgend einer n ten Ordnung statt der Fläche dritter Ordnung nehmen, so kann der Contact bis zu einem $2n$ punctigen steigen, wo sich alsdann die beiden Flächen in n zusammenfallenden Ebenen berühren. Für einen $(n+1-m)$ punctigen Contact erhalten wir alsdann

$$1 + 2 + 3 \dots + (n+1-m) = \frac{(n+2-m)(n+1-m)}{1 \cdot 2}$$

Bedingungs-Gleichungen, und für einen $(n+1+m)$ punctigen Contact

$$1 + 2 + \dots + (n+1) + n + (n-1) + \dots + (n+1-m) = \frac{(n+1)(n+2) + (2n+1-m)m}{1 \cdot 2}$$

solcher Gleichungen.

22. Wenn der Grad der osculirenden Fläche höher ist, als die Ordnung des Contactes, so erhalten wir, wenn dieser Contact ein n punctiger sein soll, $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Bedingungs-Gleichungen zu befriedigen. Alsdann giebt es überdies n Richtungen, nach welchen der Contact ein $(n+1)$ punctiger ist. Die Zahl dieser Richtungen reducirt sich für die höhern Contact-Ordnungen, wenn die sich osculirenden Flächen von gegebenen Graden sind. Wir haben solcher Richtungen für zwei Flächen zweiter und dritter Ordnung, bei einem ein- zwei- drei- vier- und fünfpunctigen Contact, eine, zwei, drei, zwei und eine nachgewiesen. Um indeß hierbei nichts zu übersehen, müssen wir auch auf den Factor q' Rücksicht nehmen, den wir in der 15ten — 17ten Nummer vernachlässigt haben. Nach der 15ten Nummer erhalten wir bei einem vollständigen vierpunctigen Contact, indem wir $g' = 0$ setzen, zwei Werthe für φ , welche die Richtungen derjenigen beiden geraden Linien bezeichnen, nach welchen die Fläche zweiter Ordnung von der Tangential-Ebene geschnitten

wird. Diese beiden Linien liegen, nach der 20sten Nummer, bei dieser Ordnung des Contactes auch ganz in der Fläche dritter Ordnung. Legt man also durch eine derselben irgend eine Ebene, so sind die Durchschnitte der beiden Flächen mit dieser Ebene, einerseits, das System dieser geraden Linie und einer Linie zweiter Ordnung, und andererseits das System derselben geraden Linie und einer zweiten. Man kann also den Contact dieser beiden Durchschnitte als einen unendlichpunctigen betrachten. Hieraus ist ersichtlich, wie die vier Richtungen eines fünfpunctigen Contactes, die bei einem vollständigen vierpunctigen Contacte im Allgemeinen Statt haben, sich in dem vorliegenden Falle auf zwei reduciren. Eben so zeigt uns der quadratische Factor q'^2 in der 10ten Gleichung der 17ten Nummer, wie die fünf Richtungen eines sechspunctigen Contactes, die im Allgemeinen bei einem vollständigen Contacte Statt finden, sich in unserm Falle auf eine Richtung reduciren.

23. Wenn zwei Flächen einen vollständigen n punctigen Contact haben, so sind in dem allgemeinen Falle durch eine, nicht in Factoren zerlegbare Gleichung des n ten Grades diejenigen n Richtungen gegeben, nach denen der Contact ein $(n+1)$ punctiger ist. Dieser Contact geht in einen $(n+2)$ punctigen über, wenn zugleich mit dieser Gleichung eine ähnliche Gleichung des $(n+1)$ ten Grades besteht, wodurch eine Bedingungs-Gleichung gegeben ist; er geht in einen $(n+3)$ punctigen über, wenn mit diesen beiden Gleichungen eine dritte Gleichung des $(n+2)$ ten Grades besteht, wodurch zwei Bedingungs-Gleichungen gegeben sind, u. s. w. Der Natur der Elimination nach giebt es alsdann nach allen jenen n Richtungen, statt des n punctigen Contactes, einen $(n+1)$ punctigen, einen $(n+2)$ punctigen u. s. w. Also:

Wenn (im Allgemeinen) zwei Flächen einen vollständigen Contact von n Puncten haben, so giebt es n Richtungen eines $(n+1)$ punctigen Contactes, der aber auch ein höherer sein kann. Soll dieser Contact um p Ordnungen steigen, so erhalten wir p Bedingungs-Gleichungen zu befriedigen: alsdann steigt der Contact aber nothwendig nach allen jenen n Richtungen zu einem $(n+p)$ punctigen.

Dieser Satz erleidet bedeutende Modificationen, wenn die beiden Flächen von bestimmten Grade sind. Bei zwei sich osculirenden Flächen

zweiter und dritter Ordnung ergeben sich, wenn wir uns auf die Entwicklungen der 10ten — 18ten Nummer beziehen, folgende verschiedene Fälle.

I. Bei einem Contacte erster Ordnung giebt es

- 1) zwei Richtungen eines Contactes zweiter Ordnung;
- 2) zwei Richtungen eines Contactes dritter Ordnung, wenn die Gleichungen (3.) und (5.) zugleich bestehen;
- 3) zwei Richtungen eines Contactes vierter Ordnung, wenn (3.), (5.) und (8.) zugleich bestehen;
- 4) eine Richtung eines Contactes vierter und eine Richtung eines Contactes fünfter Ordnung, wenn (3.), (5.), (8.) und (11.) zugleich befriedigt werden;
- 5) gar keinen höhern Contact, oder, wenn wir lieber wollen: die Ordnung des höhern Contactes wird unendlich, wenn neben (3.) und (5.) die Gleichung $g' = 0$ besteht.

II. Bei einem Contacte zweiter Ordnung giebt es:

- 1) drei Richtungen eines Contactes dritter Ordnung;
- 2) eine Richtung eines Contactes dritter Ordnung, und zwei Richtungen eines Contactes vierter Ordnung, wenn (5.) und (8.) zugleich bestehen;
- 3) eine Richtung eines Contactes dritter, eine Richtung eines Contactes vierter und eine Richtung eines Contactes fünfter Ordnung, wenn (5.), (8.) und (11.) zugleich befriedigt werden;
- 4) eine einzige Richtung eines Contactes dritter Ordnung, wenn neben (5.) auch die Gleichung $g' = 0$ besteht.

III. Bei einem Contacte dritter Ordnung giebt es

- 1) zwei Richtungen eines Contactes vierter Ordnung;
- 2) eine Richtung eines Contactes vierter und eine Richtung eines Contactes fünfter Ordnung, wenn (8.) und (11.) zugleich bestehen;
- 3) keinen höheren Contact, wenn zugleich die beiden Gleichungen (8.) und $g' = 0$ befriedigt werden.

IV. Bei einem Contacte vierter Ordnung giebt es

- 1) eine Richtung eines Contactes fünfter Ordnung;
- 2) keinen höhern Contact, wenn die Gleichung $g' = 0$ neben (11.) besteht.

Ich breche hier diese Entwicklungen ab. In einem nächsten Aufsatze, der dieselben gewissermaßen ergänzen wird, gedenke ich mich mit der Theorie der Osculation zwischen Flächen und Linien doppelter Krümmung zu beschäftigen. Diese Theorie ist der Theorie der Osculation ebener Curven ganz analog; denn in beiden Fällen haben wir es mit dem Zusammenfallen von Durchschnittspuncten zu thun. Bleiben wir z. B. bei Flächen zweiter Ordnung und solchen Curven stehen, die der Durchschnitt zweier solcher Flächen sind, so haben wir, da drei Flächen zweiter Ordnung im Allgemeinen sich in acht Puncten schneiden, auch acht verschiedene Arten des Contactes nachzuweisen.

Bonn, am 16. Januar 1829.

28.

De functionibus ellipticis commentatio.

(Auct. C. G. J. Jacobi, prof. math. ord. Regiom.)

A. De transformatione functionum $E(u)$, $\Pi(u, \varepsilon)$, quae ad speciem secundam et tertiam integralium ellipticarum pertinent. De transformatione functionis $\Omega(u)$.

1.

Isidem, quas in fundamentis proposui, adhibitis denominationibus, sit n numerus quilibet impar, sint m, m' numeri quilibet, per eundem ipsius n factorem uterque simul non divisibiles: demonstravi in Fundamentis Theorema in theoria transformationis functionum ellipticarum fundamentale, posito $\omega = \frac{mK + m'iK'}{n}$,

$$\lambda = \{\sin \operatorname{coam} 2\omega \cdot \sin \operatorname{coam} 4\omega \dots \sin \operatorname{coam} (n-1)\omega\}^2,$$

$$M = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left\{ \frac{\sin \operatorname{coam} 2\omega \cdot \sin \operatorname{coam} 4\omega \dots \sin \operatorname{coam} (n-1)\omega}{\sin \operatorname{am} 2\omega \cdot \sin \operatorname{am} 4\omega \dots \sin \operatorname{am} (n-1)\omega} \right\}^2,$$

atque insuper

$$x = \sin \operatorname{am}(u), \quad y = \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right),$$

fore

$$y = \frac{x}{M} \cdot \frac{\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} 2\omega}\right) \left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} 4\omega}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} (n-1)\omega}\right)}{(1 - n^2 \sin^2 \operatorname{am} 2\omega \cdot x^2) (1 - n^2 \sin^2 \operatorname{am} 4\omega \cdot x^2) \dots (1 - n^2 \sin^2 \operatorname{am} (n-1)\omega \cdot x^2)}.$$

E qua deinde formula derivavimus (Fund. pag. 47.) equationem identicam, quae valet, quaecunque sit x quantitas:

$$1) \quad x \Pi(x^2 - \sin^2 \operatorname{am} 2p\omega) - \frac{\lambda}{\kappa M} \cdot \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) \Pi\left(x^2 - \frac{1}{\lambda^2 \sin^2 \operatorname{am} 2p\omega}\right) =$$

$$[x - \sin \operatorname{am} u] [x - \sin \operatorname{am}(u + 4\omega)] \dots [x - \sin \operatorname{am}(u + 4(n-1)\omega)],$$

siquidem in productis praefixo Π designatis numero p tribuuntur valores 1, 2, 3, ..., $\frac{n-1}{2}$.

Formula 1., singulis elementi x dignitatibus in utraque aequationis parte inter se comparatis, suppeditat nobis summas combinationum expressionum

$$\sin \operatorname{am}(u), \sin \operatorname{am}(u + 4\omega), \sin \operatorname{am}(u + 8\omega), \dots, \sin \operatorname{am}(u + 4(n-1)\omega).$$

Fit e. g. summa harum expressionum =

$$\frac{\lambda}{\kappa M} \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right);$$

summa ambarum =

$$- \{ \sin^2 \operatorname{am} 2\omega + \sin^2 \operatorname{am} 4\omega + \dots + \sin^2 \operatorname{am} (n-1)\omega \},$$

quam quantitatem constantem designabimus per $- \varrho$. Hinc etiam deducitur summa quadratorum

$$\sin^2 \operatorname{am} (u) + \sin^2 \operatorname{am} (u + 4\omega) + \dots + \sin^2 \operatorname{am} (u + 4(n-1)\omega) = \frac{\lambda^2}{\kappa^2 M^2} + 2\varrho,$$

sive

$$2) \quad \frac{\lambda^2}{\kappa^2 M^2} \cdot \sin^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) = \Sigma \sin^2 \operatorname{am} (u) - 2\varrho,$$

siquidem per $\Sigma \varphi(u)$ designamus expressionem

$$\Sigma \varphi(u) = \varphi(u) + \varphi(u + 4\omega) + \varphi(u + 8\omega) + \dots + \varphi(u + 4(n-1)\omega).$$

E 2. sequitur etiam:

$$3) \quad \frac{\lambda^2}{\kappa^2 M^2} \cdot \cos^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) = \Sigma \cos^2 \operatorname{am} (u) - 2\sigma,$$

$$4) \quad \frac{1}{M^2} \cdot \Delta^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) = \Sigma \Delta^2 \operatorname{am} (u) + 2\tau,$$

siquidem

$$5) \quad \frac{\lambda^2}{\kappa^2 M^2} = n - 2\varrho - 2\sigma,$$

$$6) \quad \frac{1}{M^2} = n - 2\kappa^2 \varrho + 2\tau.$$

Expressio $\cos \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$, cum evanescat, posito $u = K$, obtinemus e 3.:

$$7) \quad \sigma = \cos^2 \operatorname{coam} 2\omega + \cos^2 \operatorname{coam} 4\omega + \dots + \cos^2 \operatorname{coam} (n-1)\omega.$$

Expressio $\Delta \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$ cum evanescat, posito $u = K + iK'$, atque insuper sit:

$$\Delta \operatorname{am} (u + K + iK') = \Delta \operatorname{coam} (u + iK') = i\kappa' \operatorname{tang} \operatorname{am} (u) \text{ (v. Fund. p. 35.)},$$

e 4. obtinemus:

$$8) \quad \tau = \kappa' \kappa' \{ \operatorname{tang}^2 \operatorname{am} 2\omega + \operatorname{tang}^2 \operatorname{am} 4\omega + \dots + \operatorname{tang}^2 \operatorname{am} (n-1)\omega \}.$$

2.

Formulas 2., 3., 4. etiam hunc in modum repraesentare licet:

$$9) \quad \frac{\lambda^2}{\kappa^2 M^2} \cdot \sin^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$$

$$= \sin^2 \operatorname{am} (u) + \Sigma \{ \sin^2 \operatorname{am} (u + 2p\omega) + \sin^2 \operatorname{am} (u - 2p\omega) \} - 2\varrho,$$

$$10) \quad \frac{\lambda^2}{\kappa^2 M^2} \cdot \cos^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$$

$$= \cos^2 \operatorname{am} (u) + \Sigma \{ \cos^2 \operatorname{am} (u + 2p\omega) + \cos^2 \operatorname{am} (u - 2p\omega) \} - 2\sigma,$$

$$11) \frac{1}{M^2} \cdot \Delta^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)$$

$$= \Delta^2 \operatorname{am}(u) + \Sigma \{ \Delta^2 \operatorname{am}(u + 2p\omega) + \Delta^2 \operatorname{am}(u - 2p\omega) \} + 2\tau,$$

semper tribuendo numero p valores $1, 2, 3, \dots, \frac{n-1}{2}$.

Ponatur iam

$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(u) \cdot \partial u = E(u),$$

qui paulo discrepat notationis modus ab eo, quem Cl. Legendre adhibuit, quo etiam in fundamentis passim usi sumus. Posito enim $\phi = \operatorname{am}(u)$, designat ille integralia elliptice, quae ad speciem secundam pertinet, per

$$E(\phi) = E \operatorname{am}(u) = \int_0^\phi \Delta(\phi) \cdot \partial \phi = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(u) \partial u;$$

ita ut nobis $E(u)$, quod illi $E \operatorname{am}(u)$. Porro per characteram E , argumento non adiecto, semper designabimus functionem

$$E = E(K) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\phi) \cdot \partial \phi,$$

quam ille per E^1 denotat; eodemque modo per E' functionem

$$E' = E(K', \kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\phi, \kappa') \cdot \partial \phi.$$

His stabilitis, fit

$$\int_0^u \partial u \{ \Delta^2 \operatorname{am}(u + 2p\omega) + \Delta^2 \operatorname{am}(u - 2p\omega) \} = E(u + 2p\omega) + E(u - 2p\omega).$$

Constans non adicienda erit, quia utraque aequationis pars posito $u = 0$ evanescit *). Unde e 11., integratione facta ab $u = 0$ usque ad $u = u$:

$$12) \frac{E\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{M} = E(u) + \Sigma \{ E(u + 2p\omega) + E(u - 2p\omega) \} - 2\tau \cdot u.$$

Formulam 12. transformare licet ope theorematis noti de additione integralium ellipticorum, quae ad speciem secundam pertinent:

$$E(u + a) + E(u - a) = 2E(u) - \frac{2\kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \cdot \sin \operatorname{am} u \cdot \cos \operatorname{am} u \cdot \Delta \operatorname{am} u}{1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \cdot \sin^2 \operatorname{am} u},$$

quod differentiatione facta facile ex elementis comprobatur. v. Fund. p. 138. Cuius ope 12. in hanc abit:

$$13) nE(u) - \frac{1}{M} \cdot E\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + 2\tau \cdot u = 2\kappa^2 \sin \operatorname{am}(u) \cos \operatorname{am}(u) \Delta \operatorname{am}(u) \cdot \Sigma \frac{\sin^2 \operatorname{am}(2p\omega)}{1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(2p\omega) \cdot \sin^2 \operatorname{am} u},$$

*) Fit enim generaliter $E(-u) = -E(u)$.

Formulae 12., 13. concernunt transformationem integralium ellipticorum, quae ad speciem secundam pertinent. Easdem mox sub forma commodiore exhibebimus.

Ponamus

$$\int_0^u E(u) \cdot \partial u = \log \Omega(u),$$

cum sit

$$\frac{2\kappa^2 \sin \operatorname{am}(u) \cos \operatorname{am}(u) \Delta \operatorname{am}(u) \cdot \sin^2 \operatorname{am}(2p\omega)}{1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(2p\omega) \cdot \sin^2 \operatorname{am}(u)} = - \frac{\partial \cdot \log(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(2p\omega) \cdot \sin^2 \operatorname{am}(u))}{\partial u},$$

nanciscimur e 13., iterum integratione facta ab $u=0$ usque ad $u=u$:

$$\kappa \log \Omega(u) - \log \Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + \tau \cdot uu = - \sum \log(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(2p\omega) \cdot \sin^2 \operatorname{am}(u)),$$

sive

$$14) \quad e^{-\tau \cdot uu} \cdot \frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u)} = \Pi(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(2p\omega) \cdot \sin^2 \operatorname{am}(u)),$$

siquidem, ut supra, designatur per $\Pi \phi(p)$ productum

$$\Pi \phi(p) = \phi(1) \phi(2) \phi(3) \dots \phi\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

Posito $\sin \operatorname{am}(u) = x$, 14. ita repraesentatur:

$$16) \quad e^{-\tau \cdot uu} \cdot \frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u)} =$$

$$(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(2\omega) \cdot xx)(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(4\omega) \cdot xx) \dots (1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}((n-1)\omega) \cdot xx).$$

Haec expressio denominatorem constituit substitutionis rationalis, quae ad transformationem functionum ellipticarum adhibita est (v. supra)

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{\frac{x}{M} \left(1 - \frac{xx}{\sin^2 \operatorname{am}(2\omega)}\right) \left(1 - \frac{xx}{\sin^2 \operatorname{am}(4\omega)}\right) \dots \left(1 - \frac{xx}{\sin^2 \operatorname{am}((n-1)\omega)}\right)}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(2\omega) \cdot xx)(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(4\omega) \cdot xx) \dots (1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am}((n-1)\omega) \cdot xx)};$$

quem igitur denominatorem ope transcendentis novae $\Omega(u)$ seorsim exprimere licet. Quod est gravissimum theorema et maximi usus in universa theoria functionum ellipticarum.

Sit substitutio illa, siquidem $x = \sin \operatorname{am}(u)$:

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{x}{M} \cdot \frac{1 + A'x^2 + A''x^4 + \dots + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{n-1}}{1 + B'x^2 + B''x^4 + \dots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{n-1}},$$

posito

$$1 + A'x^2 + A''x^4 + \dots + A^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} x^{n-1} = \Pi \left(1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am}(u)}{\sin^2 \operatorname{am}(2p\omega)}\right) =$$

$$\left(1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am}(u)}{\sin^2 \operatorname{am}(2\omega)}\right) \left(1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am}(u)}{\sin^2 \operatorname{am}(4\omega)}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am}(u)}{\sin^2 \operatorname{am}((n-1)\omega)}\right),$$

$$1 + B'x^2 + B''x^4 + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})}x^{n-1} = \Pi(1 - x^2 \sin^2 \text{am}(2p\omega) \sin^2 \text{am}(u)) = \\ (1 - x^2 \sin^2 \text{am} 2\omega \sin^2 \text{am} u)(1 - x^2 \sin^2 \text{am} 4\omega \sin^2 \text{am} u) \dots \\ \dots (1 - x^2 \sin^2 \text{am} (n-1)\omega \sin^2 \text{am} u),$$

erit:

$$16) e^{-\tau \cdot uu} \cdot \frac{\Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u)} = 1 + B' \sin^2 \text{am} u + B'' \sin^4 \text{am} u + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \text{am}(u).$$

Hinc sequitur, sumtis logarithmis et differentiatione instituta,

$$17) nE(u) - \frac{1}{M} E\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + 2\tau \cdot u = \\ \frac{\cos \text{am}(u) \triangle \text{am}(u) \{2B' \sin \text{am} u + 4B'' \sin^3 \text{am} u + \dots + (n-1) B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-2} \text{am} u\}}{1 + B' \sin^2 \text{am} u + B'' \sin^4 \text{am} u + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \text{am} u}.$$

Quae docet formula elegantissima, quomodo ex ipso denominatore expressionis, pro functione transformata $\sin \text{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ inventae, continuo eruatur transformatio integralis elliptici, quod ad speciem secundam pertinet.

Valorem constantis τ eruis e 17., ponendo u infinite parvum, quo facto $E(u) = u$, $\sin \text{am}(u) = u$, $\cos \text{am}(u) = \triangle \text{am}(u) = 1$; unde fit

$$n - \frac{1}{MM} + 2\tau = -2B',$$

id quod, cum sit $B' = -x^2 \wp$, cum formula 6. convenit.

Adnotemus adhuc, ubi a formula 12. proficisceris, integratione facta obtineri:

$$18) \Omega\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = e^{-\tau \cdot uu} \Omega(u) \frac{\Omega(u+2\omega) \Omega(u+4\omega) \dots \Omega(u+(n-1)\omega)}{\Omega 2\omega \cdot \Omega 4\omega \dots \Omega(n-1)\omega} \times \\ \frac{\Omega(u-2\omega) \Omega(u-4\omega) \dots \Omega(u-(n-1)\omega)}{\Omega 2\omega \cdot \Omega 4\omega \dots \Omega(n-1)\omega}.$$

3.

Ponamus brevitatis causa, siquidem $x = \sin \text{am} u$,

$$U = \frac{x}{M} (1 + A'x^2 + A''x^4 + \dots + A^{(\frac{n-1}{2})} x^{n-1}),$$

$$V = 1 + B'x^2 + B''x^4 + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} x^{n-1},$$

ita ut

$$\sin \text{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{U}{V}.$$

Fit 17.:

$$nE(u) - \frac{1}{M} E\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) + 2\tau u = -\frac{\partial V}{V \partial u},$$

unde differentiatione facta,

$$n \Delta^2 \operatorname{am} u - \frac{1}{M^2} \Delta^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) + 2\tau = \frac{\partial V \partial V - V \partial^2 V}{VV \partial u^2},$$

quae formula, advocata 6.

$$\frac{1}{M^2} = n - 2\kappa^2 \varrho + 2\tau,$$

in hanc abit:

$$19) -n\kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u + \frac{\lambda^2}{M^2} \sin^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) + 2\kappa^2 \varrho = \frac{\partial V \partial V - V \partial^2 V}{VV \cdot \partial u^2},$$

sive, multiplicatione facta per VV , in hanc:

$$\kappa^2 (2\varrho - n \sin^2 \operatorname{am} u) VV + \frac{\lambda^2}{M^2} \cdot UU = \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial V}{\partial u} - V \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}.$$

Porro vidimus in fundamentis, posito $u + iK'$ loco u , sive $\frac{1}{\kappa \sin \operatorname{am} u}$ loco $\sin \operatorname{am} u$, abire

$$V \text{ in } \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\kappa^n} \right) \cdot \frac{U}{\sin^2 \operatorname{am} u}}, \quad \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) \text{ in } \frac{1}{\lambda \sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)},$$

unde expressio

$$\frac{\partial V \partial V - V \partial^2 V}{VV \cdot \partial u^2} = - \frac{\partial^2 \log V}{\partial u^2}$$

abit in

$$\frac{n \partial^2 \log \sin \operatorname{am} u}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log U}{\partial u^2} = u \left\{ \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u - \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} \right\} - \frac{\partial^2 \log U^*}{\partial u^2},$$

ideoque 19. in

$$-n\kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u + \frac{1}{M^2 \sin^2 \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)} + 2\kappa^2 \varrho = \frac{\partial U \partial U - U \partial^2 U}{UU \cdot \partial u^2},$$

unde, multiplicatione facta per UU , fit:

$$\kappa^2 (2\varrho - n \sin^2 \operatorname{am} u) UU + \frac{1}{M^2} VV = \frac{\partial U \partial U - U \partial^2 U}{\partial u^2}.$$

Formulis inventis:

$$20) \kappa^2 (2\varrho - n \sin^2 \operatorname{am} u) VV + \frac{\lambda^2}{M^2} UU = \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial V}{\partial u} - V \frac{\partial^2 V}{\partial u^2},$$

$$21) \kappa^2 (2\varrho - n \sin^2 \operatorname{am} u) UU + \frac{1}{M^2} VV = \frac{\partial U}{\partial u} \cdot \frac{\partial U}{\partial u} - U \frac{\partial^2 U}{\partial u^2}$$

adiungi debet haec

$$22) V \frac{\partial U}{\partial u} - U \frac{\partial V}{\partial u} = \frac{1}{M} \sqrt{(VV - UU)(VV - \lambda^2 UU)},$$

quae e differentiatione aequationis $\sin \operatorname{am} \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) = \frac{U}{V}$ prodit; cuius ope e 20., 21. quantitatum U, V alterutram eliminare licet; quo facto per-

*) v. Fund. p. 112. 1.

venietur ad aequationem differentialem tertii ordinis. Quod sane est theorema memorabile, satis reconditum, numeratorem et denominatorem substitutionis, U, V singulos definiri posse per aequationem differentialem tertii ordinis.

Ipsas aequationes differentiales tertii ordinis prolixitatis causa non apponam; omnibus casibus commodius videbitur, aequationibus 20. — 22., quae earum locum tenent, iunctis uti. Quarum usum insignem ad formationem algebraicam functionum U, V , sive ipsius, quae ad transformationem ducit, substitutionis alio loco fusius demonstrabo. Hoc loco tantum adnotemus adhuc verificationem formularum 20., 21., sequentem.

Divisa enim 20. per VV , 21. per UU , prodit:

$$\kappa^2(2\varphi - n \sin^2 am u) + \frac{\lambda^2}{M^2} \sin^2 am \left(\frac{u}{M}, \lambda \right) = - \frac{\partial^2 \log V}{\partial u^2},$$

$$\kappa(2\varphi - n \sin^2 am u) + \frac{1}{M^2 \sin^2 am \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)} = - \frac{\partial^2 \log U}{\partial u^2},$$

unde, subtractione facta:

$$\frac{1}{M^2} \left\{ \lambda^2 \sin^2 am u - \frac{1}{\sin^2 am \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)} \right\} = \frac{\partial^2 \log \sin am \left(\frac{u}{M}, \lambda \right)}{\partial u^2},$$

quae statim prodit e formula:

$$\frac{\partial^2 \log \sin am u}{\partial u^2} = \kappa^2 \sin^2 am u - \frac{1}{\sin^2 am u},$$

posito $\frac{u}{M}$ loco u et λ loco κ .

Integrale completum aequationem differentialium tertii ordinis, quibus functiones U, V definiuntur, in promptu esse non videtur.

4.

Integrata formula supra allegata §. 2.:

$$23) E(u+a) + E(u-a) = 2E(u) - \frac{2\kappa^2 \sin^2 am a \cdot \sin am u \cos am u \Delta am u}{1 - \kappa^2 \sin^2 am a \cdot \sin^2 am u}$$

inde a $u=0$ usque ad $u=u$, obtinemus:

$$\log \frac{\Omega(u+a)}{\Omega(a)} + \log \frac{\Omega(u-a)}{\Omega(a)} = 2 \log \Omega(u) + \log(1 - \kappa^2 \sin^2 am a \cdot \sin^2 am u),$$

unde prodit formula in analysi functionis Ω fundamentalis

$$24) \frac{\Omega(u+a)\Omega(u-a)}{\Omega^2(a)\Omega^2(u)} = 1 - \kappa^2 \sin^2 am a \cdot \sin^2 am u.$$

E formula 23., a et u inter se commutatis, fit

25) $E(u+a) - E(u-a) = 2E(a) - \frac{2x^2 \sin am a \cos am a \Delta am a \cdot \sin^2 am u}{1 - x^2 \sin^2 am a \cdot \sin^2 am u}$,
qua integrato inde a $u=0$, obtinemus:

$$\log \frac{\Omega(u+a)}{\Omega(u-a)} - 2uE(a) = -2x^2 \sin am a \cos am a \Delta am a \int_0^u \frac{\sin^2 am u \cdot \partial u}{1 - x^2 \sin^2 am a \cdot \sin^2 am u}.$$

Designavi in Fundamentis per characteram $\Pi(u, a)$ integrale, quod secundum eam, quam Cl. Legendre instituit, distributionem integralium ellipticorum in classes, ad speciem tertiam pertinet,

$$\Pi(u, a) = x^2 \sin am a \cos am a \Delta am a \int_0^u \frac{\sin^2 am u \cdot \partial u}{1 - x^2 \sin^2 am a \cdot \sin^2 am u},$$

qua adhibita denotatione, fit:

$$26) \Pi(u, a) = uE(a) + \frac{1}{2} \log \sqrt{\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)}},$$

Quae est formula fundamentalis pro reductione integralium ellipticorum, quae ad speciem tertiam pertinent, ad functiones $E(u)$, $\Omega(u)$. Cf. Fund. §§. 49. sqq.

Ope formulae 26. e formulis pro transformatione functionum $E(u)$ $\Omega(u)$ inventis, exemplo nanciscimur eas, quae transformationem integralium ellipticorum tertiae speciei sive functionis Π concernunt. Fit enim e 26., posito $\frac{u}{M}$, $\frac{a}{M}$, λ loco u , a , x :

$$27) \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) = \frac{u}{M} E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) + \frac{1}{2} \log \frac{\Omega\left(\frac{u-a}{M}, \lambda\right)}{\Omega\left(\frac{u+a}{M}, \lambda\right)};$$

de qua formula subtrahamus sequentem

$$n \Pi(u, a) = nuE(a) + \frac{n}{2} \log \frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)},$$

prodit:

$$28) \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n \Pi(u, a) =$$

$$u \left\{ \frac{1}{M} E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - n E(a) \right\} + \frac{1}{2} \log \frac{\Omega\left(\frac{u-a}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u-a)} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega\left(\frac{u+a}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u+a)},$$

quae formula ope 16., 17. in sequentem abit:

$$29) \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n \Pi(u, a) =$$

$$\left\{ \frac{\cos am a \Delta am a \{ 2B' \sin am a + 4B'' \sin^3 am a + \dots + (n-1) B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-2} am a \}}{1 + B' \sin^2 am a + B'' \sin^4 am a + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} am a} \right\} u$$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{1 + B' \sin^2 am(u-a) + B'' \sin^4 am(u-a) + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} am(u-a)}{1 + B' \sin^2 am(u+a) + B'' \sin^4 am(u+a) + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} am(u+a)},$$

quae formula fundamentalis docet, quomodo ex ipso denominatore substitutionis confestim eruatur transformatio integralium ellipticorum, quae ad speciem tertiam pertinent.

Eandem aliter exhibere licet per formulas 12., 18., quarum ope fit e 27.:

$$\begin{aligned} & \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - \frac{u}{M} E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - 2\tau au = \\ & \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(u-a)}{\Phi(u+a)} + \sum \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(u+2p\omega-a)}{\Omega(u+2p\omega+a)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(u-2p\omega-a)}{\Omega(u-2p\omega+a)} \right\} = \\ & \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)} + \sum \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(u-a+2p\omega)}{\Omega(u+a-2p\omega)} + \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(u-a-2p\omega)}{\Omega(u+a+2p\omega)} \right\}, \end{aligned}$$

unde sequentes duas deducimus formulas:

$$\begin{aligned} 30) \quad & \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) + u \left\{ n E(a) - \frac{1}{M} E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - 2\tau a \right\} = \\ & \Pi(u, a) + \Pi(u+2\omega, a) + \Pi(u+4\omega, a) + \dots + \Pi(u+(n-1)\omega, a) \\ & + \Pi(u-2\omega, a) + \Pi(u-4\omega, a) + \dots + \Pi(u-(n-1)\omega, a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 31) \quad & \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) = \\ & \Pi(u, a) + \Pi(u, a+2\omega) + \Pi(u, a+4\omega) + \dots + \Pi(u, a+(n-1)\omega) \\ & + \Pi(u, a-2\omega) + \Pi(u, a-4\omega) + \dots + \Pi(u, a-(n-1)\omega); \end{aligned}$$

quae et ipsae sunt formulae novae fundamentales. Dedimus in Fund. p. 161. 7. formulam

$$\begin{aligned} & \Pi(u, a+b) + \Pi(u, a-b) - 2\Pi(u, a) = \\ & - 2x^2 \sin am a \cos am a \Delta am a \cdot \frac{\sin^2 am b}{1 - x^2 \sin^2 am b \sin^2 am a} \\ & + \frac{1}{2} \log \frac{1 - x^2 \sin^2 am b \sin^2 am(u-a)}{1 - x^2 \sin^2 am b \sin^2 am(u+a)}, \end{aligned}$$

cuius ope fit e 31.:

$$\begin{aligned} 31) \quad & \Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n\Pi(u, a) = \\ & - 2x^2 \sin am a \cos am a \Delta am a \sum \frac{\sin^2 am 2p\omega}{1 - x^2 \sin^2 am 2p\omega \cdot \sin^2 am a} \\ & + \sum \log \sqrt{\frac{1 - x^2 \sin^2 am 2p\omega \sin^2 am(u-a)}{1 - x^2 \sin^2 am 2p\omega \sin^2 am(u+a)}}, \end{aligned}$$

siquidem numero p valores tribuis 1, 2, 3, ..., $\frac{n-1}{2}$. Quae facile etiam e 29. sequitur formula.

B. De functionibus simpliciter periodicis $\chi(u) = e^{iu} \Omega(u)$, earumque singularibus proprietatibus.

§. 5.

Accuratius examinemus functionem nostram $\Omega(u)$, eiusque primum reductionem pro argumento imaginaris formae iu ad argumentum reale tradamus.

Posito $\sin \varphi = i \operatorname{tang} \psi$, fit

$$\frac{\partial \varphi}{\Delta(\varphi)} = \frac{i \partial \psi}{\Delta(\psi, \kappa')},$$

$$\Delta(\varphi) \cdot \partial \varphi = \frac{i \partial(\psi, \kappa') \partial \psi}{\cos \psi^2},$$

unde integratione facta:

$$\int_0^\varphi \Delta(\varphi) \cdot \partial \varphi = i \left\{ \operatorname{tang} \psi \Delta(\psi, \kappa') + \int_0^\psi \frac{\kappa' \kappa' \sin^2 \psi}{\Delta(\psi, \kappa')} \cdot \partial \psi \right\}.$$

Hac formula, posito

$$\varphi = \operatorname{am}(iu, \kappa), \text{ unde } \psi = \operatorname{am}(u, \kappa'),$$

e notatione nostra ita repraesentatur:

$$1) E \operatorname{am}(iu) = i \{ \operatorname{tang} \operatorname{am}(u, \kappa') \Delta \operatorname{am}(u, \kappa') + u - E(u, \kappa') \},$$

unde integratione facta:

$$\log \Omega(iu) = \log \cos \operatorname{am}(u, \kappa') - \frac{uu}{2} + \log \Omega(u, \kappa'),$$

sive

$$2) \Omega(iu) = e^{-\frac{uu}{2}} \cos \operatorname{am}(u, \kappa') \Omega(u, \kappa').$$

Cf. Fund. pag. 162. 1., 2.

6.

His praemissis, quaeramus iam, quasnam subeat mutationes functio $\Omega(u)$, dum functiones ellipticae immutatae manent, i. e. dum argumentum u mutatur in $u + 4mK + 4m'iK'$, designantibus m, m' numeros positivos sive negativos.

Nota est ex elementis formula

$$3) E(u + 2mK) = E(u) + 2mE,$$

siquidem per simplicem litteram E , argumento non addito, designamus functionem integram $E(K)$, quam Cl. Legendre designat per E' ; placula apposita, per characterem E' designabimus functionem integram, quae ad complementum moduli pertinet, sive functionem $E' = E(K', \kappa')$; sicuti initio indicavimus. Integrata 3., obtenemus:

$$\log \frac{\Omega(u + 2mK)}{\Omega(2mK)} = 2mEu + \log \Omega(u),$$

sive

$$4) \frac{\Omega(u+2mK)}{\Omega(2mK)} = e^{2mEu} \Omega(u).$$

Posito in hac formula $u = -2mK$, cum sit $\Omega(-u) = \Omega(u)$, $\Omega(0) = 1$, prodit:

$$\Omega(2mK) = e^{2mnEK},$$

cuius ope 4. abit in

$$5) \Omega(u+2mK) = e^{2mE(u+mK)} \Omega(u),$$

sive in

$$6) e^{-\frac{E}{2K}(u+2mK)^2} \Omega(u+2mK) = e^{-\frac{Euu}{2K}} \Omega(u),$$

quae docet formula, functionem

$$e^{-\frac{Euu}{2K}} \Omega(u),$$

mutato u in $u+2mK$, immutatam manere, ideoque cum functionibus ellipticis argumenti u periodum realem communem habere.

Ponatur in formula 2. $u+2m'K'$ loco u , fit:

$$\Omega(iu+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{-\frac{(u+2m'K')^2}{2}} \cos am(u, \kappa') \Omega(u+2m'K', \kappa'),$$

unde cum sit e 6.:

$$e^{-\frac{E'}{2K'}(u+2m'K')^2} \Omega(u+2m'K', \kappa') = e^{-\frac{E'uu}{2K'}} \Omega(u, \kappa'),$$

obtinemus:

$$e^{-\frac{E'}{2K'}(u+2m'iK')^2} \Omega(iu+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{-\frac{1}{2}(u+2m'K')^2} \cos am(u, \kappa') e^{-\frac{E'uu}{2K'}} \Omega(u, \kappa'),$$

sive:

$$\begin{aligned} e^{\frac{K'-E'}{2K'}(u+2m'iK')^2} \Omega(iu+2m'iK') &= (-1)^{m'} e^{-\frac{E'uu}{2K'}} \cos am(u, \kappa') \Omega(u, \kappa') \\ &= (-1)^{m'} e^{\frac{(K'-E')uu}{2K'}} \Omega(iu), \end{aligned}$$

unde posito $-iu$ loco u , sive u loco iu :

$$7) e^{-\frac{K'-E'}{2K'}(u+2m'iK')^2} \Omega(u+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{-\frac{K'-E'}{2K'}uu} \Omega(u),$$

quae docet formula, expressionem

$$e^{-\frac{(K'-E')uu}{2K'}} \Omega(u),$$

mutato u in $u+4m'iK'$, immutatam manere, sive cum functionibus ellipticis argumenti u alteram periodum imaginariam communem habere.

Adnotare convenit, e formula nota, a Cl. Legendre inventa,

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$$

sive

$$\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'},$$

sequi

$$-\frac{K' - E'}{2K'} = \frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K},$$

unde formulam 3. etiam hunc in modum repraesentari licet:

$$8) e^{\left(\frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K}\right)(u+2m'iK')^2} \Omega(u+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{\left(\frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K}\right)uu} \Omega(u).$$

Mutato in hac formula u in $u+2mK$, prodit e 6.:

$$e^{\left(\frac{\pi}{4KK'} - \frac{E}{2K}\right)(u+2mK+2m'iK')^2} \Omega(u+2mK+2m'iK') = (-1)^{m'} e^{\frac{\pi}{4KK'}(u+2mK)^2} e^{-\frac{Euu}{2K}} \Omega(u).$$

Fit autem:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{4KK'} \{(u+2mK+2m'iK')^2 - (u+2mK)^2\} = \\ & \frac{m'i\pi}{4K} \{4u+4mK+4m'iK'\} + mm'i\pi = \\ & \frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')} \{(u+2mK+2m'iK')^2 - uu\} + mm'i\pi. \end{aligned}$$

Hinc ubi adnotamus, esse $e^{mm'i\pi} = (-1)^{mm'}$, atque brevitatis causa ponimus:

$$r = \frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')} - \frac{E}{2K}$$

obtinemus formulam:

$$9) e^{r(u+2mK+2m'iK')^2} \Omega(u+2mK+2m'iK') = (-1)^{m'(m+1)} e^{ruu} \Omega(u),$$

quae docet formula, expressionem

$$e^{\left(\frac{m'i\pi}{4K(mK+m'iK')} - \frac{E}{2K}\right)uu} \Omega(u) = e^{ruu} \Omega(u),$$

mutato u in $u+4mK+4m'iK'$ immutatam manere, unde et ipsa cum functionibus ellipticis argumenti u periodum communem habet.

Adnotare convenit, valorem ipsius r non mutari, ubi loco m, m' ponitur pm, pm' .

Formula 9. etiam hunc in modum repraesentari potest:

$$\begin{aligned} 10) \Omega(u+2mK+2m'iK') &= (-1)^{m'(m+1)} e^{-4r(mK+m'iK')(u+mK+m'iK')} \Omega(u) \\ &= (-1)^{m'(m+1)} e^{\left(\frac{2E(mK+m'iK') - m'i\pi}{K}\right)(u+mK+m'iK')} \Omega(u), \end{aligned}$$

quae docet formula generalis, quasnam functio $\Omega(u)$ mutationes patitur, dum functiones ellipticae immutatae manent. Posito $u = 0$, obtine-

mus e 10.:

$$11) \quad \Omega(2m + 2m'iK') = (-1)^{m'} e^{\frac{2E}{K}(mK + m'iK')^2 + m'm'\pi \frac{K'}{K}}.$$

Sumptis logarithmis, et differentiatione instituta, e 10. obtinemus:

$$12) \quad E(u + 2mK + 2m'iK') = E(u) + \frac{2F(mK + m'iK')}{K} - \frac{m'i\pi}{K} \\ = E(u) + 2mE + 2m'i(K' - E'),$$

unde posito $u = 0$,

$$13) \quad E(2mK + 2m'iK') = 2mE + 2m'i(K' - E').$$

7.

Ponemus in sequentibus

$$\chi(u) = e^{ruu} \Omega(u),$$

erit e 10., posito $2m, 2m'$ loco m, m' :

$$\chi(u + 4mK + 4m'iK) = \chi(u),$$

ita ut $\chi(u)$ sit functio periodica. Jam igitur pro innumeris valoribus, quo r induere potest, dum numeris m, m' alios et alios tribuis valores, innumeras nacti sumus functiones periodicas $\chi(u)$, quae singulae cum functionibus ellipticis unam periodum communem habent. Et vice versa, quaecunque ex innumertis periodis, quas functiones ellipticae habent et quae ex una omnes componi possunt, eligere placet, quantitatem r ita semper determinare licet, ut functio

$$\chi(u) = e^{ruu} \Omega(u)$$

eadem gaudeat periodo. E variis functionibus illis periodicis $\chi(u)$, in Fundamentis eam elegimus, quae cum functionibus ellipticis periodum realem communem habet, pro qua $m' = 0$ ideoque $r = -\frac{E}{2K}$. Quam functionem ibidem designavimus per characterem particularem Θ , ita ut

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = e^{-\frac{Euu}{2K}} \Omega(u),$$

omniaque quae loco citato de functione Θ proposita sunt, vel nulla vel leni mutatione facta, ad functionem generaliore $\chi(u)$ extenduntur.

E formulis supra exhibitis:

$$\frac{\Omega(u+a)\Omega(u-a)}{\Omega^2 a \Omega^2 u} = 1 - \kappa^2 \sin^2 am a \sin^2 am u,$$

$$\Pi(u, a) = \frac{u \partial \Omega(a)}{\Omega(a) \partial a} + \log \sqrt{\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)}},$$

sequitur etiam, posito

$$\chi(u) = e^{ruu} \Omega(u),$$

quaecunque sit r constans:

$$14) \frac{\chi(u+a)\chi(u-a)}{\chi^2 a \chi^2 u} = 1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u,$$

$$15) \Pi(u, a) = \frac{u \partial \chi(a)}{\chi(a) \partial a} + \log \sqrt{\frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)}}.$$

8.

Ponamus, ut supra,

$$mK + m'iK' = n\omega,$$

designante n numerum imparem, m, m' numeros quoslibet positivos seu negativos eiusmodi, ut numeri m, m', n per eundem non divisibiles sint numerum; ex antecedentibus fit:

$$\chi(u + 4n\omega) = \chi(u).$$

Formemus iam productum

$$\frac{\chi(u)\chi(u+4\omega)\chi(u+8\omega)\dots\chi(u+4(n-1)\omega)}{\chi^2(4\omega)\chi^2(8\omega)\dots\chi^2(2(n-1)\omega)} = \psi(u),$$

patet, posito $u + 4\omega$ loco u , quemlibet factorem in subsequentem abire, ultimum vero in primum; unde cum productum ex omnibus conflatum nil mutetur, fit

$$\psi(u + 4\omega) = \psi(u),$$

ideoque etiam, designante p numerum quemlibet positivum seu negativum:

$$\psi(u + 4p\omega) = \psi(u).$$

Jam cum generaliter sit:

$$\chi(u + 4(n-p)\omega) = \chi(u - 4p\omega),$$

fit e 14.

$$\frac{\chi(u+4\omega)\chi(u+4(n-1)\omega)}{\chi^2 4\omega} = (1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 4\omega \sin^2 \operatorname{am} u) \chi^2 u,$$

$$\frac{\chi(u+8\omega)\chi(u+4(n-2)\omega)}{\chi^2 8\omega} = (1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 8\omega \sin^2 \operatorname{am} u) \chi^2 u,$$

.....

unde productum $\psi(u)$ etiam hunc in modum exhibere licet:

17) $\psi(u) = \chi^n(u) \{1 + B' \sin^2 \operatorname{am} u + B'' \sin^4 \operatorname{am} u + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \operatorname{am} u\}$,
siquidem, ut supra, ponis denominatorem substitutionis

$$(1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 4\omega \sin^2 \operatorname{am} u) \dots (1 - \kappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega \sin^2 \operatorname{am} u) =$$

$$1 + B' \sin^2 \operatorname{am} u + B'' \sin^4 \operatorname{am} u + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \operatorname{am} u.$$

Jam cum sit $\psi(u + 4p\omega) = \psi(u)$, fluit e 16. formula fundamentalis maximi momenti,

$$17) \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)} =$$

$$\sqrt[n]{\left(\frac{1+B'\sin^2 \operatorname{am} u + B''\sin^4 \operatorname{am} u + \dots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \operatorname{am} u}{1+B'\sin^2 \operatorname{am}(u+4p\omega) + B''\sin^4 \operatorname{am}(u+4p\omega) + \dots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \operatorname{am}(u+4p\omega)} \right)}.$$

Posito $u=0$, fit e 17.:

$$18) \chi(4p\omega) = \frac{1}{\sqrt[n]{1+B'\sin^2 \operatorname{am} 4p\omega + B''\sin^4 \operatorname{am} 4p\omega + \dots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \operatorname{am} 4p\omega]}.$$

9.

Posito $\sin \operatorname{am} u = x$, cum sit

$$\sin \operatorname{am}(u \pm a) = \frac{x \cos \operatorname{am} a \triangle \operatorname{am} a \pm \sqrt{[(1-xx)(1-x^2xx)]} \sin \operatorname{am} a}{1-x^2 \sin^2 \operatorname{am} a \operatorname{am} x},$$

videmus, expressionem

$$\frac{1+B'\sin^2 \operatorname{am}(u \pm 4p\omega) + B''\sin^4 \operatorname{am}(u \pm 4p\omega) + \dots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \operatorname{am}(u \pm 4p\omega)}{1+B'\sin^2 \operatorname{am}(4p\omega) + B''\sin^4 \operatorname{am}(4p\omega) + \dots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \operatorname{am}(4p\omega)}$$

induere formam

$$\frac{V^{(p)} \pm \sqrt{[(1-xx)(1-x^2xx)]} W^{(p)}}{(1-x^2 \sin^2 \operatorname{am}(2p\omega)xx)^{n-1}},$$

designantibus $V^{(p)}$, $W^{(p)}$ functiones ipsius x integras racionales. Hinc, ubi insuper ponitur

$$V = 1 + B'\sin^2 \operatorname{am} u + B''\sin^4 \operatorname{am} u + \dots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-1} \operatorname{am} u,$$

fit e 17., 18.:

$$19) \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{V(1-x^2 \sin^2 \operatorname{am}(4p\omega)xx)^{n-1}}{V^{(p)} + \sqrt{[(1-xx)(1-x^2xx)]} W^{(p)}} \right)},$$

$$20) \frac{\chi(u-4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{V(1-x^2 \sin^2 \operatorname{am}(4p\omega)xx)^{n-1}}{V^{(p)} - \sqrt{[(1-xx)(1-x^2xx)]} W^{(p)}} \right)}.$$

Quibus in se ductis, cum sit e 14.

$$\frac{\chi(u+p\omega)\chi(u-4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi^2(u)} = 1 - x^2 \sin^2 \operatorname{am} 4p\omega \cdot xx,$$

obtinemus:

$$\{1 - x^2 \sin^2 \operatorname{am} 4p\omega \cdot xx\}^n = \frac{VV(1-x^2 \sin^2 \operatorname{am} 4p\omega)^{2n-2}}{V^{(p)}V^{(p)} - (1-xx)(1-x^2xx)W^{(p)}W^{(p)}},$$

sive

$$V^{(p)}V^{(p)} - (1-xx)(1-x^2xx)W^{(p)}W^{(p)} = VV(1-x^2 \sin^2 \operatorname{am}(4p\omega)xx)^{n-2}.$$

Jam vero functio V factorem continet $1-x^2 \sin^2 \operatorname{am}(4p\omega)xx$, ita ut, posito

$$V = V_p(1-x^2 \sin^2 \operatorname{am}(4p\omega)xx),$$

sit V_p functio integra: qua substituta, fit:

$$21) V^{(p)}V^{(p)} - (1-xx)(1-x^2xx)W^{(p)}W^{(p)} = V_pV_p(1-x^2 \sin^2 \operatorname{am}(4p\omega)xx)^n.$$

Hinc e 19., 20. facile sequitur:

$$22) \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{V^{(p)} - V[(1-xx)(1-x^2xx)]W^{(p)}}{V_p}\right)},$$

$$23) \frac{\chi(u-4p\omega)}{\chi(4p\omega)\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{V^{(p)} + V[(1-xx)(1-x^2xx)]W^{(p)}}{V_p}\right)}.$$

Erit insuper $V^{(p)}$ functio ipsius x par ordinis $2n-4$,

$W^{(p)}$ - - - impar - $2n-5$,

V_p - - - par - $n-3$,

10.

Ponamus brevitatis causa

$\Phi(u) = 1 + B' \sin^2 am u + A'' \sin^4 am u + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} am u$,
fit e 17.:

$$24) \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)} = \sqrt[n]{\left(\frac{\Phi(u)}{\Phi(u+4p\omega)}\right)};$$

sumtis logarithmis et differentiatione instituta, prodit

$$25) \frac{\chi'(u+p\omega)}{\chi(u+4p\omega)} - \frac{\chi'(u)}{\chi(u)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} - \frac{1}{n} \cdot \frac{\Phi'(u+4p\omega)}{\Phi(u+4p\omega)},$$

siquidem ponitur

$$\chi'(u) = \frac{\partial \chi(u)}{\partial u}, \quad \Phi'(u) = \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u}.$$

Fit porro, cum sit $\chi(u) = e^{ru} \Omega(u)$:

$$\frac{\chi'(u)}{\chi(u)} = 2ru + \frac{\Omega'(u)}{\Omega(u)} = 2ru + E(u),$$

siquidem $\Omega'(u) = \frac{\partial \Omega(u)}{\partial u}$. Jam posito $u=0$, e 25. eruis:

$$\frac{\chi'(up\omega)}{\chi(4p\omega)} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\Phi'(4p\omega)}{\Phi(4p\omega)},$$

sive, posito brevitatis causa $am(4p\omega) = \alpha_p$

$$26) E(4p\omega) + 8r:p\omega = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\Phi'(4p\omega)}{\Phi(4p\omega)} =$$

$$-\frac{1}{n} \cdot \frac{\cos \alpha_p \triangle \alpha_p \{2B' \sin \alpha_p + 4B'' \sin^3 \alpha_p + \dots + (n-1)B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-2} \alpha_p\}}{1 + B' \sin^2 \alpha_p + B'' \sin^4 \alpha_p + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \alpha_p}.$$

Quae formula docet, quomodo species secunda integralium ellipticorum, casu, quo argumentum est pars aliquota ipsius $4(mK + m'iK')$ exhiberi possit.

E formula 15. obtinemus:

$$\Pi(u, a) = u \frac{\chi'(a)}{\chi(a)} + \frac{1}{2} \log \frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)} = u \{E(a) + 2ra\} + \frac{1}{2} \log \frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)},$$

unde, advocata 24.

$$\begin{aligned} 27) \quad \Pi(4p\omega, a) &= 4p\omega\{E(a) + 2ra\} + \frac{1}{2} \log \frac{\chi(a-4p\omega)}{\chi(a+4p\omega)} \\ &= 4p\omega\{E(a) + 2ra\} + \frac{1}{2n} \log \frac{\Phi(a+4p\omega)}{\Phi(a-4p\omega)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28) \quad \Pi(u, 4p\omega) &= u\{E(4p\omega) + 8r.p\omega\} + \frac{1}{2} \log \frac{\chi(u-4p\omega)}{\chi(u+4p\omega)} \\ &= -\frac{u}{n} \cdot \frac{\Phi'(4p\omega)}{\Phi(4p\omega)} + \frac{1}{2n} \log \frac{\Phi(u+p\omega)}{\Phi(u-p\omega)}, \end{aligned}$$

sive

$$\begin{aligned} 29) \quad \Pi(4p\omega, a) &= 4p\omega\{E(a) + 2ra\} + \\ &\frac{1}{2n} \log \frac{1+B'\sin^2 \text{am}(a+4p\omega) + B''\sin^4 \text{am}(a+4p\omega) + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \text{am}(a+4p\omega)}{1+B'\sin^2 \text{am}(a-4p\omega) + B''\sin^4 \text{am}(a-4p\omega) + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \text{am}(a-4p\omega)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30) \quad \Pi(u, 4p\omega) &= \\ &-\frac{u}{n} \cdot \frac{\cos \alpha_p \triangle \alpha_p \{2B'\sin \alpha_p + 4B''\sin^3 \alpha_p + \dots + (n-1)B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \alpha_p\}}{1+B'\sin^2 \alpha_p + B''\sin^4 \alpha_p + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \alpha_p} \\ &+ \frac{1}{2n} \log \frac{1+B'\sin^2 \text{am}(u+4p\omega) + B''\sin^4 \text{am}(u+4p\omega) + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \text{am}(u+4p\omega)}{1+B'\sin^2 \text{am}(u-4p\omega) + B''\sin^4 \text{am}(u-4p\omega) + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \text{am}(u-4p\omega)}. \end{aligned}$$

Quae formulae docent, quomodo exhiberi possit species tertia integralium ellipticorum casibus, quibus sive amplitudinis sive parametri argumentum (v. Fund. p. 139.) est pars aliquota ipsius $4(mK + m'iK')$.

11.

In formula fundamentali 24.:

$$\begin{aligned} \frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)} &= \sqrt[n]{\left(\frac{\Phi(u)}{\Phi(u+4p\omega)}\right)} = \\ &\sqrt[n]{\left(\frac{1+B'\sin^2 \text{am } u + B''\sin^4 \text{am } u + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \text{am } u}{1+B'\sin^2 \text{am}(u+4p\omega) + B''\sin^4 \text{am}(u+4p\omega) + \dots + B^{(\frac{n-1}{2})} \sin^{n-1} \text{am}(u+4p\omega)}\right)} \end{aligned}$$

altera aequationis pars functionem continet $\chi(u)$, quae unam habet periodum, altera autem functione $\sin \text{am } u$ constat, quae praeter hanc alia adhuc gaudet, ut quae dupliciter periodica est. Dum igitur ad eam alteram applicas periodum, expressio

$$\frac{\chi(u+4p\omega)}{\chi(u)}$$

mutabitur quidem, neque tamen aliam subire potest mutationem, nisi

quae oritur ex ambiguitate n^{ti} radicalis. Quod theorema gravissimum, expressionem

$$\frac{\chi(u+p\omega)}{\chi(u)},$$

quae cum functionibus ellipticis unam habet periodum communem, dum ei aliam, qua illae gaudent, applices periodum, aliam mutationem non pati, nisi quod per radicem aequationis $x^n = 1$, multiplicetur, ex ipsa natura functionis $\chi(u)$ iam comprobemus.

Ponamus

$$mK + m'iK' = Q, \quad \mu K + \mu'iK' = Q',$$

sit porro

$$aK + a'iK' = pQ + p'Q',$$

unde, quoties p, p', m, m', μ, μ' quantitates reales:

$$a = pm + p'\mu, \quad a' = pm' + p'\mu',$$

ideoque

$$p = \frac{\mu'a - \mu a'}{m\mu' - m'\mu}, \quad p' = \frac{ma' - m'a}{m\mu' - m'\mu}.$$

Sint m, m', μ, μ' numeri integri positivi vel negativi quilibet eiusmodi, ut

$$m\mu' - m'\mu = 1,$$

erit

$$p = \mu'a - \mu a', \quad p' = ma' - m'a,$$

unde patet, quicumque sint numeri integri a, a' , etiam p, p' integros fore et vice versa. Fit porro:

$$K = \mu'Q - m'Q', \quad iK' = mQ' - \mu Q.$$

Jam quicumque sint numeri integri positivi seu negativi a, a' , erit

$$\sin am(u + 4aK + 4a'iK') = \sin am u,$$

unde etiam, quicumque sint numeri integri positivi seu negativi p, p' :

$$\sin am(u + 4pQ + 4p'Q') = \sin am u.$$

Innumerae periodi, quibus gaudent functiones ellipticae, componi possunt omnes e binis, quae continentur aequationibus:

$$\sin am(u + 4K) = \sin am u, \quad \sin am(u + 4iK') = \sin am u.$$

Quarum in locum, ex antecedentibus patet, substitui posse has

$$\sin am(u + 4Q) = \sin am u, \quad \sin am(u + uQ') = \sin am u.$$

siquidem

$$Q = mK + m'iK', \quad Q' = \mu K + \mu'iK',$$

designantibus m, m', μ, μ' numeros integros positivos vel negativos eiusmodi, ut sit $m\mu' - m'\mu = 1$. Unde videmus, periodos, quibus functiones ellipticae gaudent, innumeris modis e binis componi posse. Eius-

modi autem binas periodos, e quibus reliquae componi possunt omnes, vocabimus periodos coniugatas.

Posito, ut supra, $\omega = \frac{Q}{n} = \frac{mK + m'iK'}{n}$, quaeramus iam, quod positum est, quatenam evadat expressio

$$\frac{\chi(u + 4p\omega)}{\chi(u)} = \frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)},$$

mutato u in $u + 4Q'$ seu generalius in $u + 4p'Q'$, designante p' numerum positivum vel negativum quemlibet. Vidimus, posito

$$r = \frac{m'i\pi}{4K(mK + m'iK')} - \frac{E}{2K} = \frac{m'i\pi}{4KQ} - \frac{E}{2K},$$

fore

$$e^{r(u+4Q)^2} \Omega(u + 4Q) = e^{ruu} \Omega(u);$$

unde etiam, posito μ, μ' loco m, m' , ideoque Q' loco Q , atque

$$r' = \frac{\mu'i\pi}{4KQ'} - \frac{E}{2K},$$

fit

$$e^{r'(u+4Q')^2} \Omega(u + 4Q') = e^{r'uu} \Omega(u).$$

Mutato u in $u + \frac{4pQ}{n} = u + 4p\omega$, prodit

$$e^{r'(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q')^2} \Omega\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right) = e^{r'(u + \frac{4pQ}{n})^2} \Omega\left(u + \frac{4pQ}{n}\right),$$

unde

$$e^{r' \cdot \frac{32pQQ'}{n}} \cdot \frac{\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)}{\Omega(u + 4Q')} = \frac{\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\Omega(u)}.$$

Sequitur autem e formula $\chi(u) = e^{ruu} \Omega(u)$:

$$\frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)}{\chi(u + 4Q')} = e^{r \cdot \frac{4pQ}{n} (2u + 8Q' + \frac{4pQ}{n})} \cdot \frac{\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)}{\Omega(u + 4Q')} =$$

$$e^{r \cdot \frac{4pQ}{n} (2u + 8Q' + \frac{4pQ}{n}) - r' \cdot \frac{32pQQ'}{n}} \cdot \frac{\Omega\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\Omega(u)},$$

unde

$$\frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)}{\chi(u + 4Q')} = e^{\frac{32pQQ'}{n}(r-r')} \cdot \frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)}.$$

Fit autem

$$r - r' = \frac{m'i\pi}{4KQ} - \frac{\mu'i\pi}{4KQ'} = \frac{i\pi'}{K} \cdot \frac{m'Q' - \mu'Q}{4QQ'},$$

ideoque cum sit $m'Q' - \mu'Q = -K$:

$$\frac{32pQQ'}{n}(r-r') = -\frac{8ip\pi}{n},$$

unde obtinemus formulam fundamentalem:

$$31) \frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4Q'\right)}{\chi(u + 4Q')} = e^{-\frac{8ip\pi}{n}} \cdot \frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)},$$

sive hanc generaliore

$$32) \frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n} + 4p'Q'\right)}{\chi(u + 4p'Q')} = e^{-\frac{8pp'i\pi}{n}} \cdot \frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)}.$$

Videmus igitur, quod demonstrandum erat, expressionem

$$\frac{\chi\left(u + \frac{4pQ}{n}\right)}{\chi(u)} = \frac{\chi(u + 4p\omega)}{\chi(u)},$$

quae cum functionibus ellipticis unam periodum communem habet, sive immutata manet, mutato u in $u + 4Q$, dum ei periodum coniugatam applicas sive u in $u + 4Q'$ mutatur, multiplicari per n^{tam} radicem unitatis.

Quin adeo ipsius, quam eligere debes, n^{tae} radice unitatis expressionem analyticam suggerit formula 32.; quae satis delicata est quaestio.

Regiom. m. Apr. 1829.

29.

Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

(Von Herrn Th. Clausen zu München.)

„Wenn die Spitzen eines um einen Kreis beschriebenen Dreiecks resp. in den Verlängerungen der Seiten eines in demselben Kreise beschriebenen Dreiecks liegen; das eine dieser Dreiecke zu finden, wenn das andere gegeben ist.“

Aus dem Mittelpunkte des Kreises ziehe man drei Halbmesser nach den Spitzen (Taf. III. Fig. 1.) des im Kreise beschriebenen Dreiecks a, b, c ; die aus dem Mittelpunkte des Kreises auf die drei Seiten desselben Dreiecks gefällten Senkrechten schneiden den Kreis in den Punkten a', b', c' ; die aus demselben Punkte nach den Spitzen des um den Kreis beschriebenen Dreiecks schneiden den Kreis in den Punkten α', β', γ' ; und die auf die Seiten desselben Dreiecks gefällten Senkrechten in den Punkten α, β, γ . In der Folge sollen die Buchstaben a, b, a' etc. die Längen der zwischen den mit diesen Buchstaben bezeichneten Punkten und einem willkürlichen festen Punkte liegenden Kreisbogen bezeichnen; nimmt man z. B. a zum Anfangspunkte, so ist β' die Länge des Bogens $a\beta a'\beta'$, b' die Länge des Bogens $a\beta a'\beta' b\gamma b'$, u. s. w. Es versteht sich von selbst, daß man vom Anfangspunkte aus immer nach derselben Seite zählt.

Demnach ist, wie man leicht sieht:

$$a' = \frac{a+b}{2}; \quad a = a' - b' + c'; \quad \alpha' = \frac{a+\beta}{2}; \quad \alpha = \alpha' - \beta' + \gamma';$$

$$b' = \frac{b+c}{2}; \quad b = \alpha' + b' - c'; \quad \beta' = \frac{\beta+\gamma}{2}; \quad \beta = \alpha' + \beta' - \gamma';$$

$$c' = \frac{c+a}{2}; \quad c = -a' + b' + c'; \quad \gamma' = \frac{\gamma+\alpha}{2}; \quad \gamma = -\alpha' + \beta' + \gamma';$$

Der Halbmesser des Kreises sei 1, so ist:

$$C\nu \cos(\gamma - \beta') = 1,$$

$$C\nu \cos(b' - \beta') = C\mu,$$

$$\cos(b' - b) = C\mu,$$

also

$$\cos(b' - b) \cos(\gamma - \beta') = \cos(b' - \beta'),$$

oder

$$(1.) \quad \begin{cases} \cos(\alpha' - \epsilon') \cos(\alpha' - \gamma') = \cos(\beta' - \beta), \text{ und also auch} \\ \cos(\beta' - \alpha') \cos(\beta' - \alpha') = \cos(\epsilon' - \gamma'), \\ \cos(\epsilon' - \beta') \cos(\gamma' - \beta') = \cos(\alpha' - \alpha'). \end{cases}$$

Setzt man nun:

$$\begin{aligned} \alpha' - \epsilon' &= 2f; & \alpha' - \beta &= 2x; \\ \beta' - \alpha' &= 2g; & \beta' - \gamma &= 2y; \\ \epsilon' - \beta' &= 2h; & \epsilon' - \alpha &= 2z; \end{aligned}$$

so ist:

$$\alpha' - \gamma = \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\alpha' - \beta'}{2} - x + y = -g - x + y,$$

$$\beta' - \beta' = 2y + \gamma - \beta' = 2y + \gamma - \alpha' = g + x + y$$

und also:

$$(2.) \quad \begin{cases} \cos 2f \cos(g + x - y) = \cos(g + x + y), \\ \cos 2g \cos(h + y - z) = \cos(h + y + z), \\ \cos 2h \cos(f + z - x) = \cos(f + z + x), \end{cases}$$

woraus folgt:

$$(3.) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} f^2 = \operatorname{tang}(g + x) \operatorname{tang} y, \\ \operatorname{tang} g^2 = \operatorname{tang}(f + y) \operatorname{tang} z, \\ \operatorname{tang} h^2 = \operatorname{tang}(f + z) \operatorname{tang} x. \end{cases}$$

Zur Abkürzung sei:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} f &= m; & \operatorname{tang} x &= s; \\ \operatorname{tang} g &= n; & \operatorname{tang} y &= t; \\ \operatorname{tang} h &= p; & \operatorname{tang} z &= u; \end{aligned}$$

so hat man

$$(4.) \quad \begin{cases} m^2 = t \cdot \frac{n+s}{1-ns}, \\ n^2 = u \cdot \frac{p+t}{1-pt}, \\ p^2 = s \cdot \frac{m+u}{1-mu}, \end{cases}$$

Wird nun in die dritte dieser Gleichungen der Werth von u aus der zweiten substituirt, und in die daraus entspringende der Werth von t aus der ersten, so erhält man zur Bestimmung von s folgende Gleichung:

$$(5.) \quad \begin{cases} mp + n^2 - m^3 n + m^2 n^3 p) ss \\ + (mnp + m^3 + n^3 - p^3 - m^2 n^2 p + m n^2 p^2 + m^2 n p^2 + m^3 n^3 p^3) s \\ = np^3 - m n^3 p^2 + m^2 p^2 + m^3 n^2 p^3. \end{cases}$$

Man sieht leicht dafs

oder

$$2f + 2g + 2h = 360^\circ,$$

daher

$$f + g + h = 180^\circ,$$

$$mnp = m + n + p,$$

$$m^2n^2p^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2np + 2pm,$$

$$m^3n^3p^3 = m^3 + n^3 + p^3 + 3m^2n + 3n^2p + 3p^2m + 3mn^2 + 3np^2 + 3pm^2 + 6mnp,$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (5.) um die Zahl der Factoren in jedem Gliede gleich zu machen, so erhält man:

$$\begin{aligned} & (n^3 - m^3 + p^2n + 2mn^2 + 2mnp + 3n^2p - m^2p + mp^2) \frac{s}{p} \\ & + 2(m^3 + n^3 + m^2n + mn^2 + 2m^2p + 2mp^2 + 2n^2p + 2np^2 + 4mnp) s \\ & = p(m^3 - n^3 + mp^2 + 2m^2n + 3m^2p + 2mnp - n^2p + np^2), \end{aligned}$$

und wenn man mit $(m+n)p$ dividirt:

$$\begin{aligned} & (n^2 - m^2 + mn + 3np - mp + p^2) \frac{s}{p} + 2(m^2 + n^2 + 2p^2 + 2mp + 2np) \frac{s}{p} \\ & = m^2 - n^2 + mn + 3mp - np + p^2, \end{aligned}$$

welcher Gleichung ich folgende Form gebe:

$$\begin{aligned} & \{(n+p)^2 + (n+p)(m+p) - (m+p)^2\} \frac{s}{p} + 2\{(n+p)^2 + (m+p)^2\} \frac{s}{p} \\ & + (n+p)^2 - (n+p)(m+p) - (m+p)^2 = 0, \end{aligned}$$

woraus sogleich folgt:

$$\frac{s}{p} = \frac{(m+p)^2 + \sqrt{5}(m+p)(n+p) + (n+p)^2}{(m+p)^2 - (m+p)(n+p) - (n+p)^2},$$

oder endlich:

$$(6.) \quad \frac{s}{p} = \frac{m+p + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot (n+p)}{m+p - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot (n+p)}.$$

Es ist aber

$$m+p = \operatorname{tang} f + \operatorname{tang} h = \frac{\sin(f+h)}{\cos f \cos h} = \frac{\sin g}{\cos f \cos h} = \frac{\sin 2g}{2 \cos f \cos g \cos h},$$

$$n+p = \operatorname{tang} g + \operatorname{tang} h = \frac{\sin(g+h)}{\cos g \cos h} = \frac{\sin f}{\cos g \cos h} = \frac{\sin 2f}{2 \cos f \cos g \cos h};$$

setzt man noch für s dessen Werth $\operatorname{tang} x = \operatorname{tang} \left(\frac{a'-\beta}{2} \right)$, und für p den Werth $\operatorname{tang} \left(\frac{c'-b'}{2} \right)$, $2g = (b'-a')$ und $2f = (a'-c')$, so folgt:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \left(\frac{a'-\beta}{2} \right) &= \operatorname{tang} \left(\frac{c'-b'}{2} \right) \cdot \frac{\sin(b'-a') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')}{\sin(b'-a') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')}, \\ \text{und analog:} \\ \operatorname{tang} \left(\frac{b'-\gamma}{2} \right) &= \operatorname{tang} \left(\frac{a'-c'}{2} \right) \cdot \frac{\sin(c'-b') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(b'-a')}{\sin(c'-b') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(b'-a')}, \\ \operatorname{tang} \left(\frac{c'-\alpha}{2} \right) &= \operatorname{tang} \left(\frac{b'-a'}{2} \right) \cdot \frac{\sin(a'-c') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(c'-b')}{\sin(a'-c') - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(c'-b')}, \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Die dritte der Gleichungen (3.) ist:

$$\operatorname{tang}\left(\frac{a'-\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tang}\left(\frac{a'-\beta}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{c'-b'}{2}\right)^2,$$

womit man aus der ersten der Gleichungen (7.) findet:

$$(8.) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}\left(\frac{a'-\alpha}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{c'-b'}{2}\right) \cdot \frac{\sin(b'-a') - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')}{\sin(b'-a') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')}, \\ \text{und also auch:} \\ \operatorname{tang}\left(\frac{b'-\beta}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{a'-c'}{2}\right) \cdot \frac{\sin(c'-b') - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(b'-a')}{\sin(c'-b') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(b'-a')}, \\ \operatorname{tang}\left(\frac{c'-\gamma}{2}\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{b'-a'}{2}\right) \cdot \frac{\sin(a'-c') - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(c'-b')}{\sin(a'-c') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(c'-b')}, \end{array} \right.$$

Es ist kaum nöthig zu bemerken, daß die durch die Gleichungen (7.) und (8.) bestimmten Winkel die Hälften der 6 an den Spitzen des äußern Dreiecks liegenden Winkel oder deren Complementary sind. Die Winkel des äußern Dreiecks lassen sich auch unmittelbar bestimmen; es ist

$$\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{a'-\alpha}{2} - \frac{a'-\beta}{2}, \text{ also}$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$$

$$\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{c'-b'}{2}\right)}{1 + \operatorname{tang}\left(\frac{c'-b'}{2}\right)^2} \cdot \left\{ \frac{\sin(b'-a') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')}{\sin(b'-a') - \frac{2+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')} - \frac{\sin(b'-a') - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')}{\sin(b'-a') + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')} \right\},$$

und nach einer leichten Reduction:

$$(9.) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cotang}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = - \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(b'-a')^2}{2 \sin(a'-c') \sin(b'-a') \sin(c'-b')}, \\ \text{und analog:} \\ \operatorname{cotang}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right) = - \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(b'-a')^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(c'-b')^2}{2 \sin(a'-c') \sin(b'-a') \sin(c'-b')}, \\ \operatorname{cotang}\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) = - \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(c'-b')^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sin(a'-c')^2}{2 \sin(a'-c') \sin(b'-a') \sin(c'-b')}, \end{array} \right.$$

Aus den Gleichungen (1.) sieht man, daß man die lateinischen Buchstaben mit den gleichnamigen griechischen verwechseln kann. Thut man dieses in den Gleichungen (7.), (8.) und (9.), so hat man die Auflösung des umgekehrten Falls, wenn nemlich das äußere Dreieck gegeben ist und das innere gesucht wird.

Altona, den 25. Februar 1828

30.

Einfacher geometrischer Beweis,

dass wenn R und r die Halbmesser der in und um ein Dreieck beschriebenen Kreise bedeuten und D die Entfernung der Mittelpunkte dieser Kreise von einander bezeichnet,

$$D^2 = R^2 - 2Rr \text{ ist.}$$

(Von dem Herrn Professor Unger zu Erfurt.)

Wird der Bogen AB (Taf. III. Fig. 2.) in E halbt und aus E mit EA ein Kreis beschrieben, so ist, wie sich durch den 22. Satz des 3ten Buches der Elemente von Euclid beweisen lässt, der Bogen ADB der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die sich in die Dreiecke hinein zeichnen lassen, von welchen AB eine Seite ist und die in dem Kreise AGB liegen. Nimmt man also den Punkt D beliebig in dem Bogen ADB an, zieht CD und die Senkrechte DI , so ist für das entsprechende Dreieck DI der Radius des Kreises, der sich hinein zeichnen lässt, CE ist der Radius des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises, und CD ist der Abstand der Mittelpunkte beider von einander. Die Abhängigkeit dieser drei Linien von einander ergibt sich nun wie folgt:

Es ist

$$\begin{aligned} DC^2 &= CK^2 + KD^2 \\ &= (CF - DI)^2 + FI^2 \\ &= CF^2 - 2CF \cdot DI + DI^2 + FI^2, \end{aligned}$$

und weil nach Eucl. Buch 2. Satz 5.

$$FI^2 = AF^2 - AI \cdot IB,$$

so ist

$$\begin{aligned} CD^2 &= CF^2 + AF^2 - 2CF \cdot DI + DI^2 - AI \cdot IB \\ &= CE^2 - 2CF \cdot DI + DI^2 - DI \cdot IL \\ &= CE^2 - 2CF \cdot DI - DI(IL - DI) \end{aligned}$$

Es ist aber

$$IL - DI = 2IH,$$

also ist

$$\begin{aligned} CD^2 &= CE^2 - 2CF \cdot DI - 2DI \cdot IH \\ &= CE^2 - 2(CF + IH) \cdot DI \\ &= CE^2 - 2CE \cdot DI, \end{aligned}$$

nemlich es ist

$$D^2 = R^2 - 2Rr.$$

31.

Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

Lehrsatz, vom Herrn Professor Dr. Grunert zu Brandenburg.

Wenn alle Seiten eines beliebigen Fünfecks $ABCDE$ (Taf. III. Fig. 3.) verlängert werden, bis sie sich in A' , B' , C' , D' , E' treffen; so schneiden die geraden Linien aa' , bb' , cc' , dd' , ee' , welche die Mittelpunkte der beiden Diagonalen eines jeden der Vierecke $ABEA'$, $BACB'$, $CBDC'$, $DCED'$, $EADE'$ mit einander verbinden, sich immer alle in ein- und demselben Punkte O .

Aufgaben von Anderen.

1. Unter den verschiedenen Definitionen der Ebene scheint die von Robert Simson eine der beliebtesten zu sein, nemlich:

„Die Ebene ist eine Fläche von der Art, daß alle gerade Linien zwischen beliebigen Paaren von Puncten der Fläche, ganz in ihr liegen.“

Diese Erklärung scheint aber Voraussetzungen einzuschließen, deren Statthaftigkeit erst bewiesen werden muß. Wenn nemlich z. B. A , B , C (Taf. III. Fig. 4.), drei Puncte einer Ebene und AB , BC und CA gerade Linien, D und E aber Puncte in BC und AB , und AD und CE wiederum gerade Linien sind, so müssen, nach der Definition der Ebene, alle diese gerade Linien in ihr liegen, oder vielmehr, die Ebene muß durch alle diese gerade Linien zugleich gehen. Dabei wird offenbar vorausgesetzt, daß AD die EC , etwa in F schneide und nicht vielleicht über oder unter EC an dieser Linie vorbeigehe; denn wäre dieses der Fall, so könnten es nur zwei verschiedene Flächen sein, in welchen die geraden Linien AD und EC liegen, nicht eine und dieselbe Fläche. Daß aber AD die EC wirklich schneidet, erhellt von selbst weder aus der Natur der geraden Linie, noch aus der Erklärung der Ebene. Es darf also nicht vorausgesetzt werden und erfordert mithin einen Beweis.

Dieser Beweis wäre zu geben oder, wenn er nicht gegeben werden kann, eine andere Definition der Ebene.

2. Man könnte die Ebene wie folgt definiren.

„Sie ist diejenige Fläche, in welcher alle gerade Linien liegen, die mit einer und derselben geraden Linie, in einem und demselben Punct, zu beiden Seiten gleiche Winkel machen.“

Diese Erklärung würde völlig bestimmt und deutlich sein. Es muß aber dann bewiesen werden, daß auch jede andere gerade Linie durch zwei Punkte in der Ebene, die nicht durch die feste Gerade geht, ganz in der Ebene liegt. Dieses kann auf folgende Weise geschehen, in sofern es möglich ist, ohne den Begriff der Ebene zu zeigen, daß Dreiecke mit den nemlichen Seiten congruent sind.

Es sei nemlich XY (Fig. 5) die die Ebene bestimmende feste gerade Linie; AP , BP seien gerade Linien in ihr, so daß $APX = APY = BPX = BPY$ ist. Ferner sei $PX = PY$. Alsdann sind z. B. in den Dreiecken APX und APY zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel dieselben, nemlich $AP = AP$, $PX = PY$ und $APX = APY$. Also sind die Dreiecke congruent, oder vielmehr, wenn man PX in PY legt, während AP an seiner Stelle bleibt, muß nothwendig die gerade AX in die gerade AY fallen, was sich einsehen läßt, auch ohne den Begriff der Ebene. Auf dieselbe Weise werden die Dreiecke BPX und BPY congruent sein. Nun sei AB eine gerade Linie durch A und B , und C ein beliebiger Punkt in ihr: so fragt es sich ob AB ganz in der Ebene liege. Da AB den Dreiecken ABX und ABY gemein ist, so sind alle drei Seiten dieser Dreiecke die nemlichen; denn, wie sich vorhin zeigte, ist $AX = AY$ und $BX = BY$, und AB beiden gemein. Kann man also nun ohne den Begriff der Ebene beweisen, daß zwei Dreiecke gleich sind, wenn sie die nemlichen Seiten haben, so folgt, daß z. B. der Winkel CAX gleich ist dem Winkel CAY . Deshalb sind aber dann wiederum die Dreiecke CAX und CAY gleich, weil sie gleiche Winkel $CAX = CAY$ zwischen den nemlichen Seiten $AX = AY$ und $AC = AC$ haben. Also ist auch $CX = CY$. Mithin haben dann die Dreiecke CPX und CPY die nemlichen drei Seiten; denn außer $CX = CY$ ist $PX = PY$ und $CP = CP$. Also wären sie nach dem postulirten Satze gleich, und es wäre endlich der Winkel CPX gleich dem Winkel CPY . Folglich läge die Gerade CP , die durch den Punkt C in AB geht, und mithin der Punkt C selbst, in der Ebene durch AP und BP . Und da dieses von jedem Punkte C in AB bewiesen werden könnte, so läge die gerade Linie AB ganz in der Ebene durch AP und BP . Da ferner AB jede beliebige Richtung haben kann, so würde folgen, daß jede beliebige, nicht durch P gehende gerade Linie, welche zwei Punkte mit der Ebene durch AP und BP gemein hat, ganz in ihr liegt.

Es fragt sich also, ob sich der Satz, daß drei gerade Linien im

Räume von bestimmter Länge, die sich paarweise schneiden, immer die nemliche Figur bilden, ohne den Begriff der Ebene beweisen lasse.

3. Folgende andere Definition der Ebene, an eine ähnliche der geraden Linie sich anschliessend, ist sehr einfach, nemlich:

Gerade Linien sind die, deren zwei auf keine Weise einen Raum umschliessen können.

Ebenen sind diejenigen Flächen, deren zwei auf keine Weise einen Raum umschliessen können.

Es folgen daraus die Sätze, dass gerade Linien, wenn sie zwei Punkte gemein haben, ganz zusammenfallen; dass durch zwei Punkte nur eine gerade Linie möglich ist; dass gerade Linien, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemein haben, ganz in ihr liegen; dass zwei Ebenen nur in einer geraden Linie sich schneiden können; dass eine gerade Linie und ein Punkt ausser ihr, oder drei Punkte, eine Ebene bestimmen u. s. w., wie leicht zu sehen, fast unmittelbar.

Die Erklärungen würden daher besonders für die Elemente geeignet sein. Es fragt sich, ob und was Erhebliches dagegen einzuwenden sei.

4. Sollte nicht vielleicht folgende Theorie der Parallelen einfach und deutlich sein?

Ein Winkel ist die Neigung zweier gerader Linien gegen einander, die sich schneiden.

Wenn zwei Winkel gleich sind, so können die unbegrenzten Räume zwischen ihren Schenkeln um keinen Winkelraum verschieden sein, sondern nur vielleicht um ganz begrenzte oder um Parallelräume.

Wenn zwei Winkel-Räume um keinen Winkelraum verschieden sind, sondern nur etwa um begrenzte oder Parallelräume, so sind die zugehörigen Winkel gleich.

Der Winkel ACB (Fig. 6.) bleibt z. B. offenbar derselbe, man möge den begrenzten Raum DEC davon abschneiden oder nicht. Die drei Winkel FDA , ACB und BEG machen also zusammen nur zwei Rechte aus, wenn sie gleich, ausser dem Raume an der einen Seite der geraden Linie FG , noch den begrenzten Raum DCE füllen. Nun sei $HEF = ADF$, so ist HE mit AD parallel, das heisst, HE begegnet der AD nicht, so weit man sie auch verlängert. Denn schnitte HE die AD , so wäre HEF nicht gleich ADF (Euclid. I. 16.), gegen die Voraussetzung. Es ist aber die Summe der drei Winkel HEF , HEB und BEG ebenfalls gleich zwei

Rechten, also ist HEB gleich ACB , dafs heifst: Parallelen, wie HE und AC , machen mit einer beliebigen Geraden BC , die sie schneiden, an einerlei Seite gleiche Winkel $HEB = ACB$; und daraus folgt, dafs sich zwei gerade Linien, die mit einer dritten an derselben Seite ungleiche Winkel machen, genugsam verlängert, nothwendig schneiden, denn schnitten sie sich nicht und wären also parallel, so machten sie, wie so eben folgte, mit der dritten gleiche Winkel, gegen die Voraussetzung; und dieses ist das eilfte Euclidische Axiom.

Die Schwierigkeit der Vorstellung liegt darin, dafs die Summe der drei Winkel FDA , ACB und BEG nur gleich zwei Rechten geachtet wird, obgleich die Winkel, aufser dem Raume an der einen Seite der geraden Linie FG , noch den begrenzten Raum DCE füllen; aber die Schwierigkeit ist nur scheinbar; denn eines Theils ändert offenbar der begrenzte Raum DCE an der Neigung der Linien AC und BC gegen einander wie schon gesagt nichts, andern Theils werden ja auch ohne Bedenken Winkel gleich geachtet, wenn ihre Räume sogar um einen unbegrenzten Raum verschieden sind, wie z. B. die Winkel ADF und HEF , deren Räume um den Parallelraum $ADEF$ verschieden sind.

Dafs die Summe der drei Winkel in einem beliebigen ebenen Dreiecke gleich zwei Rechten ist, folgt auf diese Weise unmittelbar; denn da $ADF + ACB + BEG$ gleich zwei Rechten und $ADF = EDC$, $DCB = DCE$ und $BEG = DEC$ ist, so ist auch in dem Dreieck DEC , $EDC + DCE + DEC$ gleich zwei Rechten.

Diese Theorie der Parallelen dürfte um so mehr zu berücksichtigen sein, da das Resultat von der Summe der drei Winkel eines Dreiecks, auf welches sie zunächst führt, das nemliche ist, welches der auf ähnliche Weise sich ergebende Satz von der Summe der drei Winkel eines Kugel-Dreiecks giebt, wenn man den Halbmesser der Kugel unendlich grofs annimmt, wodurch die Kugelfläche zur Ebene wird. Die Summe der drei Winkel eines Kugel-Dreiecks, die durch die Fläche der zugehörigen Kugel-Ausschnitte gemessen werden, ist nemlich bekanntlich gleich zwei Rechten, oder gleich der halben Kugelfläche, plus der zwiefachen Fläche des Dreiecks. Nimmt man nun den Halbmesser der Kugel unendlich grofs, so verschwindet die Fläche des Dreiecks gegen die Kugelfläche und es folgt, dafs die Summe der drei Winkel des Dreiecks gleich zwei rechten Winkeln ist.

32.

Einige Nachrichten von Büchern.

Von dem am Schlusse des vorigen Bandes dieses Journals erwähnten Werke des Herrn Professors C. G. J. Jacobi zu Königsberg in Preussen über die elliptischen Functionen ist nunmehr der erste Theil erschienen, unter dem Titel: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, auct. Dr. Carolo Gustavo Jacobo Jacobi, prof. ord. in univ. regia Regimont. 1829. 4. IV. 188. Es beginnt darin die systematische Zusammenstellung der die Theorie der elliptischen Functionen bildenden Sätze, mit Beziehung auf die dieselben betreffenden früheren schönen Arbeiten des Herrn Verfassers. Über den Werth des Inhalts dieser Schrift hat schon die öffentliche Stimme und insbesondere des würdigen Legendre's Urtheil entschieden. Die fernere Entwicklung des Gegenstandes dieses wichtigen Werkes will der Herr Verfasser die Güte haben, theilweise dem gegenwärtigen Journal zu überliefern. Diese Schrift des Herrn Jacobi gehört unstreitig zu den bedeutendsten mathematischen Productionen in Deutschland neuerer Zeit.

Auch die im vorigen Jahre erwähnten zwei Supplemente Legendre's zur zweiten Auflage seiner *Exercices du calcul intégral* sind erschienen, und berücksichtigen die Arbeiten von Jacobi und Abel über die elliptischen Functionen.

Einen Theil der im vorigen Jahre angekündigten Arbeit von Abel über die elliptischen Functionen findet, man in dem vorigen und gegenwärtigen Hefte dieses Journals. Leider ist der Verfasser, der, so jung noch, schon so große Hoffnungen gab, und dem schon jetzt die Wissenschaft wesentliche Erweiterungen verdankt, durch den Tod abgerufen worden. (Man sehe den Necrolog hier unten.)

Kürzlich hat Herr Plana zu Turin Bemerkungen über die elliptischen Functionen herausgegeben, deren Zweck vorzüglich ist, die von Herrn Jacobi in den astronomischen Nachrichten von Schumacher mitgetheilten allgemeinen Sätze elementar zu entwickeln.

Die *Annales des Mathématiques*, von Herrn Gergonne, und das *Bulletin universel des sciences* des Herrn Baron von Férussac haben erfreulichen Fortgang und behaupten ihren alten Werth.

Auch von den *Exercices des mathématiques* des Herrn Cauchy sind mehrere neue Hefte erschienen.

Von der „Wiener Zeitschrift für Physik und Mathematik, herausgegeben von A. Baumgärtner und A. v. Ettinghausen“ sind bereits 5 Bände erschienen, jeder zu 4 Hefen und jedes Heft 8 bis 9 Bogen stark. Der grössere Theil dieses Werkes ist der Physik gewidmet. Jedoch enthält auch der mathematische Theil interessante Abhandlungen und Aufsätze. Dieses Journal wird unstreitig auch seinerseits zur Verbreitung des Studiums der Mathematik wirksam beitragen.

Von einem anderen neuen, auch der Mathematik gewidmeten Journal, welches zu Brüssel unter dem Titel: „*Correspondance mathématique et physique*“ herauskommt,

sind bis jetzt 4 Bände erschienen, jeder zu 6 Heften, jedes zu 3 bis 4 Bogen, und vom 5ten Bande 2 Hefte. Die ersten beiden Bände sind von den Herren J. G. Garnier und A. Quetelet gemeinschaftlich, die folgenden Bände vom Herrn A. Quetelet allein redigirt. Die Gegenstände dieser Schrift sind ziemlich mannigfaltig. Sie beschäftigt sich mit der reinen und angewandten Mathematik, mit der Astronomie, Physik, Meteorologie, Statistik, practischen Mechanik und theilweise mit der Technologie. Sie giebt Beiträge zur Geschichte dieser Wissenschaften, Nachrichten von den Arbeiten der Gelehrten in denselben, von den Preis-Aufgaben der Academien und den darauf erfolgten Preisschriften, besonders in Belgien und Frankreich, von wichtigen Büchern und Ereignissen, die für ihre Gegenstände Interesse haben. Sie stellt Aufgaben und giebt die eingegangenen Auflösungen. Die mathematischen Arbeiten möchten ziemlich den gröfseren Theil des Raumes dieses Werkes einnehmen. Sie scheinen vorzüglich die weitere Verbreitung mathematischer Kenntnisse und Erörterungen über dieselben zum Gegenstande zu haben. Nur ein Theil davon beschäftigt sich mit der sogenannten höheren Mathematik und der weiteren Entwicklung derselben, der gröfsere Theil mit weiterer Ausbildung und Vervollkommnung schon allgemeiner verbreiteter mathematischer Kenntnisse. Gerade dieser Zweck aber dürfte recht nützlich und verdienstlich sein; denn es ist gewifs eben so wichtig, und es thut fast sogar mehr Noth das Vorhandene zu vervollkommen und weiter zu verbreiten, als gerade Neues zu entdecken. Auch der mathematische Inhalt dieses Werkes ist also von bedeutendem Interesse. Die historischen und anderen Nachrichten sind schätzbar, und daher dürfte auch dieses Unternehmen als recht wichtig für die Verbreitung nützlicher Kenntnisse zu erachten und ihm der beste Fortgang zu wünschen sein.

Druckfehler.

Im zweiten Hefte dieses Bandes Seite 166. Zeile 4. und 5. von oben ist statt „pourvu . . . infinies“ zu lesen „pourvu toutefois que les valeurs de $f(g + \varepsilon)$ et de $f(h + \varepsilon)$ fussent toujours supposées et déterminées.“

33.

Nécrologe.

Mr. Niels Henrik Abel, Norvégien, qui a fait voir un talent si extraordinaire pour les mathématiques et qui, quoique très jeune encore, s'est déjà si éminemment distingué dans cette science, est mort à la fleur de son âge le 6. Avril 1829 à Frolands-Vark près d'Arendal en Norvège, où il s'étoit rendu de Christiania, son séjour ordinaire, pour faire une visite à ses parents.

Mr. Abel naquit le 25. Août 1802 à Frindoë, sur la côte occidentale de Christiansandstift en Norvège. Il n'a donc pas même atteint sa 27^{me} année. Son père étoit ministre protestant de village. En 1803 sa famille fut transférée à Gierrestadt, paroisse voisine, où son père lui donna la première éducation, jusqu'en 1815, où Mr. N. H. Abel entra dans l'école cathédrale de Christiania. Il ne se distinguoit nullement dans les premières années. Mais en 1818, à l'âge de 16 ans, ses talens pour les mathématiques commencèrent subitement à se développer. Il se fit beaucoup remarquer parmi ses condisciples et fit de progrès si rapides, qu'on reconnut bientôt son génie. Mr. Holmboë, alors professeur à cette école, lui donna des leçons en particulier. Ayant rapidement passé les élémens, on lui fit parcourir l'Introduction et les Institutions du calcul diff. et intégr. d'Euler. Dès-lors il commença à marcher seul. Il étudia les ouvrages de Lacroix, Francoeur, Poisson, Gauß et surtout ceux de Lagrange, et fit lui-même quelques essais. Sorti de l'école cathédrale, il entra dans l'université de Christiania. Dénudé de fortune, et son père étant mort, il avoit eu les leçons de l'école gratis, et il jouit à l'université d'une bourse et de secours des professeurs pendant les deux premières années. Les deux années suivantes le gouvernement lui accorda un secours extraordinaire. Il poursuivit sa carrière avec ardeur. Dans cette époque il composa plusieurs mémoires, qui ont été imprimés dans un journal de Christiania qui a pour titre: „*Magazin für die Naturwissenschaften.*” Le premier de ces mémoires a été imprimé en 1820 sous le titre: „*Allgemeine Methode, Functionen einer variablen Gröfse zu finden, wenn eine Eigenschaft dieser Functionen durch eine Gleichung zwischen zwei Variabeln ausgedrückt ist.*” Il s'occupa du problème de la résolution algébrique des équations du 5^{me} degré. Une fois il crut en avoir trouvé la solution, mais ayant remarqué son erreur, il se proposa, ou de la corriger, ou de démontrer l'impossibilité de la résolution générale des équations supérieures. Il réussit dans cette dernière tâche et fit imprimer sa démonstration en 1824 à Christiania, en français. S'étant extraordinairement distingué dans ses études, le gouvernement lui accorda, sur la recommandation des Mrs. les professeurs Rasmussen et Hansteen, les frais de voyage pour continuer ses études en Allemagne, en Italie et en France pendant deux ans. Son plan primitif étoit d'aller directement à Paris, mais il le changea et partit pour Berlin, en s'associant à quelques amis étudiants en d'autres sciences *).

Il arriva à Berlin dans l'été de 1825. Il y resta six mois, pendant lesquels je fis sa connoissance et le vis tous les jours. D'ici il se rendit par Vienne, Venise, Milan et Turin à Paris, où il fit un séjour de 10 mois. Il revient à Berlin et de là à Christiania, après une absence de 20 mois.

*) Ces notices sur la jeunesse et les premières études de Mr. Abel m'ont été fournies par Mr. le professeur Holmboë, nommé ci-dessus.

En arrivant à Berlin pour la première fois, il avoit déjà beaucoup travaillé, mais sans avoir encore rien publié d'important, excepté son mémoire, en forme de dissertation, sur l'impossibilité de la résolution générale des équations algébriques supérieures. Ce mémoire est le même qui a été inséré dans le premier tome du présent Journal, mais refondu par son auteur pendant son séjour à Berlin. J'avois déjà depuis longtems conçu le projet du présent journal, mais ce qui me décida à le mettre en exécution, ce fut surtout l'importance des nombreux mémoires déjà préparés par Mr. Abel, qui consentit à leur publication, et celle des ouvrages de Mr. Steiner, depuis zélé et très distingué collaborateur pour les premiers tomes qui ont paru de ce journal. C'est ainsi en partie à Mr. Abel qu'il doit son existence. Il en est resté jusqu'à sa fin un des collaborateurs les plus assidus et les plus fidèles.

Les mémoires dont il a enrichi ce journal, et quelques autres très importants, insérés dans le journal d'astronomie de Mr. Schumacher, ainsi que ceux qu'il a présentés à l'académie royale de Paris, prouvent que ce jeune géomètre étoit doué d'un talent vraiment supérieur, et que la perte, que les mathématiques viennent d'éprouver par sa mort, est très grande et d'autant plus déplorable qu'il commençoit à peine sa carrière.

Tous les travaux de Mr. Abel portent l'empreinte d'une sagacité et d'une force de tête extraordinaire et souvent vraiment étonnante, même sans considérer la jeunesse de l'auteur. Il pénétoit, pour ainsi dire, souvent jusqu'au fond des choses, avec une force qui sembloit irrésistible, les saisissoit avec une énergie si extraordinaire, il les prenoit de si haut et s'élevoit tellement au dessus de leur état actuel, que les difficultés sembloient s'évanouir devant la puissance victorieuse de son génie. Si l'on se rappelle ce mémoire inséré dans le premier tome de ce journal sur l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations de degrés supérieurs au quatrième, ses travaux sur les fonctions elliptiques, son mémoire sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendentes (tome III.) etc., tous ouvrages par lesquels il a effectivement reculé les bornes de l'analyse: on trouvera que nous n'en avons pas trop dit. Aussi les talens extraordinaires de Mr. Abel ont ils été reconnus généralement dans les derniers tems, et certes, s'il eût été contemporain de Newton, celui-ci auroit dit de lui ce qu'il disoit de Cotes: „s'il avoit vécu plus longtems, nous aurions pu apprendre encore beaucoup de lui.” Les géomètres les plus distingués de notre tems, parmi lesquels il suffit de nommer Mr. Legendre, ce digne vétéran, auteur de la théorie des fonctions elliptiques, ont apprécié également Mr. Abel, en s'honorant par là autant eux mêmes que leur jeune protégé.

Il est remarquable que Mr. Abel et Mr. Jacobi de Königsberg, cet autre jeune géomètre d'un talent extraordinaire, ont toujours marché également et comme de front dans leurs recherches sur les fonctions elliptiques, sans cependant se connoître l'un l'autre non plus que leurs travaux, et sans se rencontrer ni se toucher dans leur route.

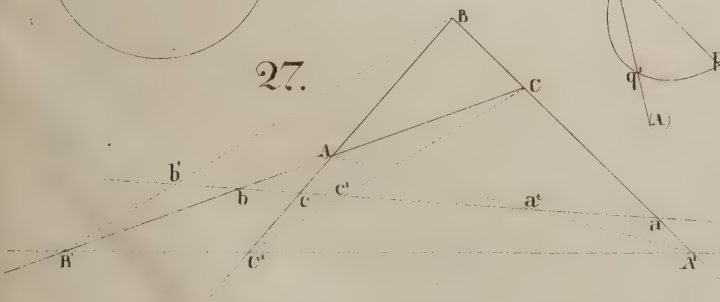
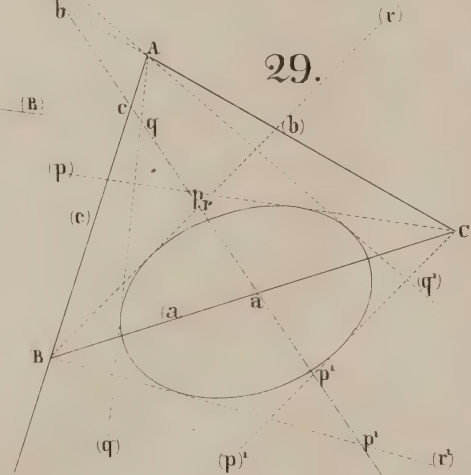
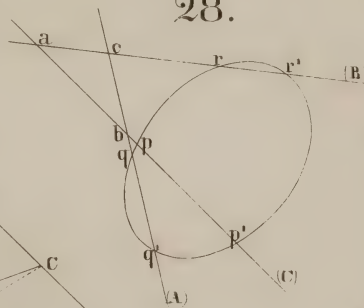
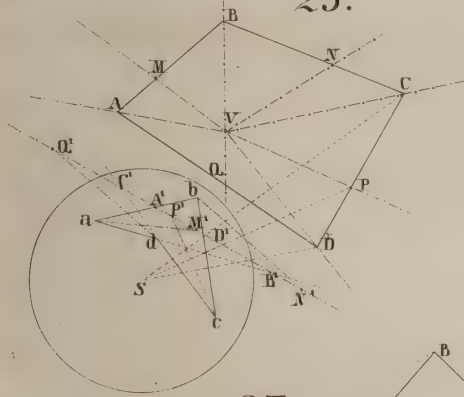
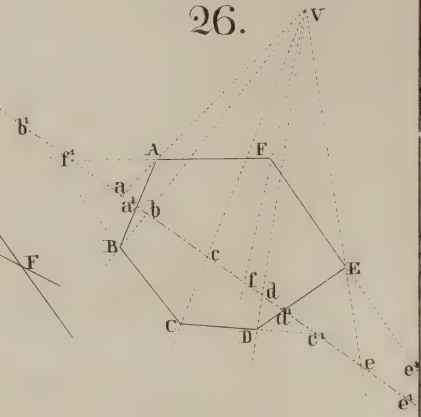
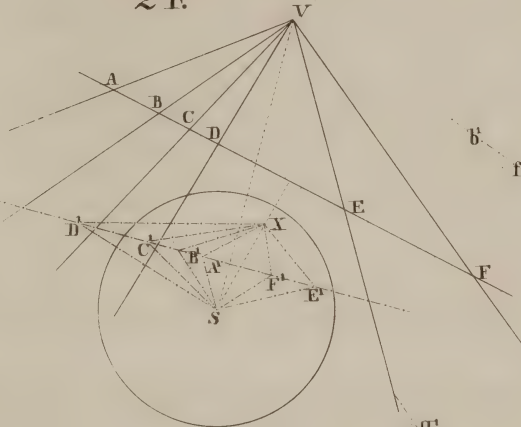
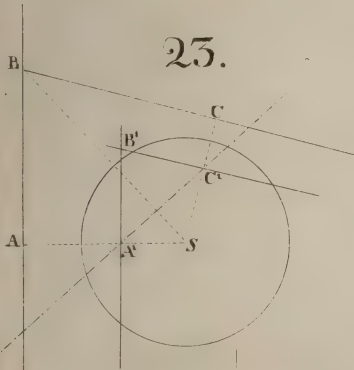
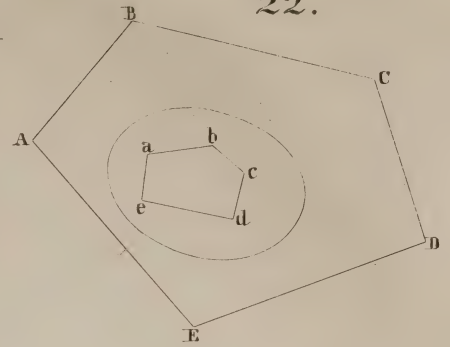
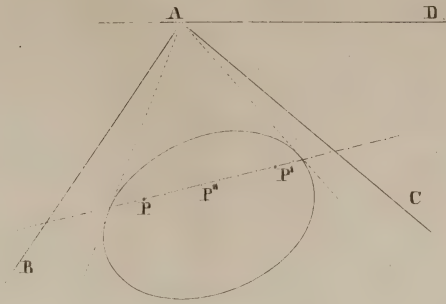
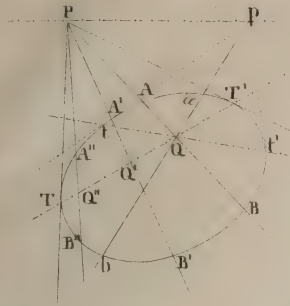
Mr. Abel, de retour dans sa patrie, n'y trouva pas d'abord un emploi convenable: ce ne fut que peu de tems avant sa mort qu'il jouit d'appointemens fixes. En 1827 on le nomma membre de la société royale des sciences à Drontheim. Mais aussitôt que la réputation de son talent et de ses mérites dans les mathématiques eurent percé, on vit les hommes qui aiment les sciences et qui sont à même de les protéger, s'intéresser à son sort. Le gouvernement prussien, attentif à tout ce qui peut faire prospérer les connoissances utiles, et avancer les sciences, songeoit à attirer Mr. Abel à son service, dans le cas où celui-ci l'aurait désiré. En même tems plusieurs membres de l'académie royale des sciences de Paris s'adressèrent au Roi de Suède, pour l'engager à appeler à Stockholm, près de l'académie, cet homme distingué. Le gouvernement de Prusse exécuta le premier le projet d'améliorer le sort de Mr. Abel. J'avois été chargé de m'instruire d'avance si Mr. Abel accepteroit une place à Berlin, dans le cas où elle lui seroit offerte; et sur sa réponse affirma-

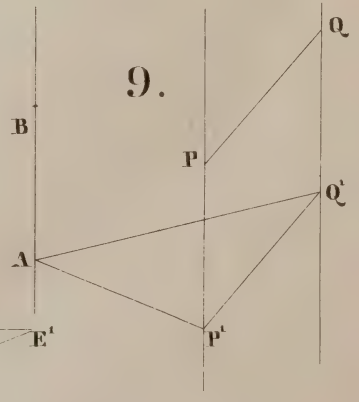
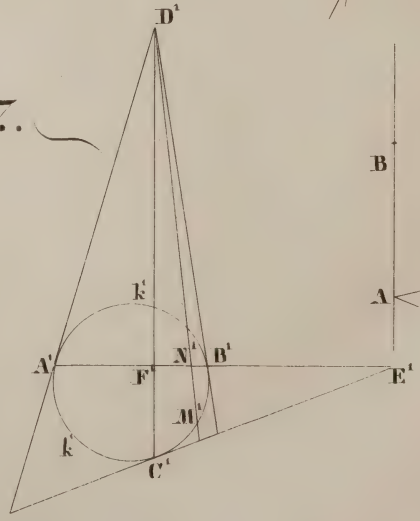
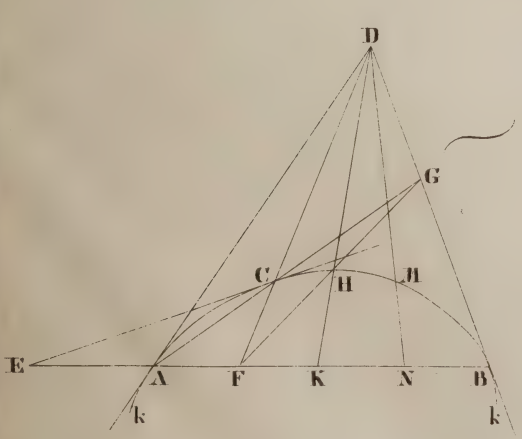
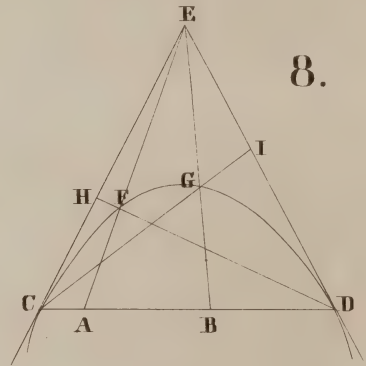
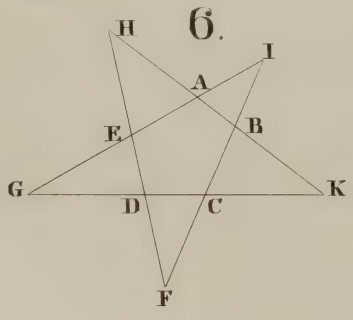
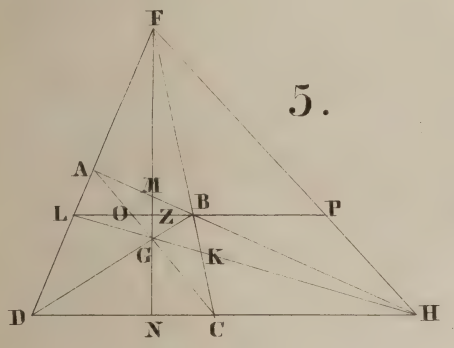
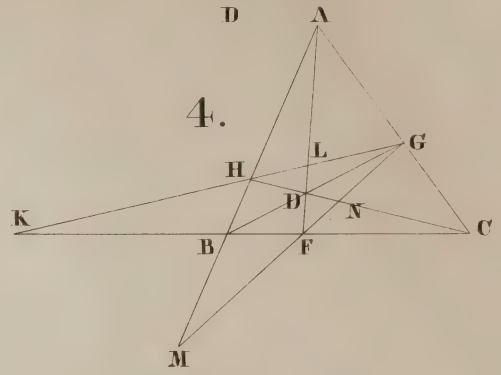
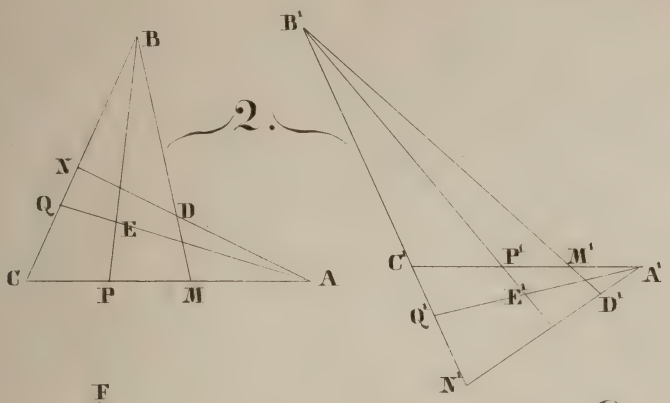
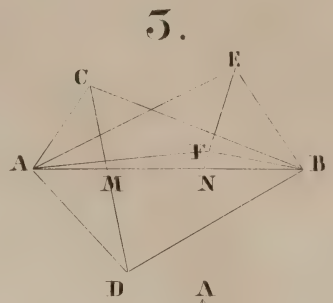
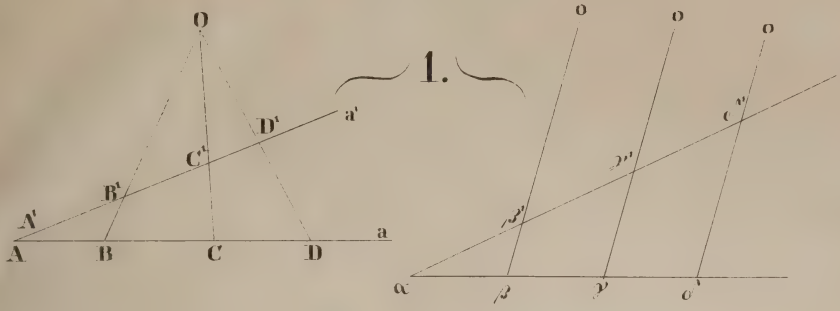
tive, Monseigneur le ministre du culte et de l'instruction publique à Berlin avoit résolu de lui envoyer une invitation honorable. J'avois l'ordre d'écrire au jeune géomètre préalablement, que cette invitation étoit prête à partir. J'exécuta cet ordre à l'heure même. Mais malheureusement il étoit déjà trop tard. La lettre arriva peu de jours après sa mort. Un travail infatigable, joint aux soucis que lui avoit longtems donnés l'incertitude de son avenir, avoient miné sa santé délicate; il étoit tombé malade à la campagne où il se trouvoit alors; son indisposition tourna en une pulmonie, qui dégénéra en phtisie et lui coûta la vie. J'en reçus la nouvelle presque le même jour où l'invitation faite à Mr. Abel venoit d'être expédiée. J'en fis mon rapport. Le digne ministre, qui protège et fait prospérer les sciences dans notre pays avec un zèle et une ardeur au dessus de tout éloge, exprima ses vifs regrets de cette perte prématurée, en m'écrivant „qu'il avoit eu effectivement le dessein d'appeler Mr. Abel „à Berlin, pour lui ouvrir une carrière honorable près de l'université, en lui accordant „des appointemens convenables et ses frais de voyage; qu'il regrettoit d'autant plus „de voir son dessein échoué, qu'il avoit vivement désiré l'admission de Mr. Abel au „service de Prusse, à cause des grandes espérances que ses rares talens avoient „déjà données.”

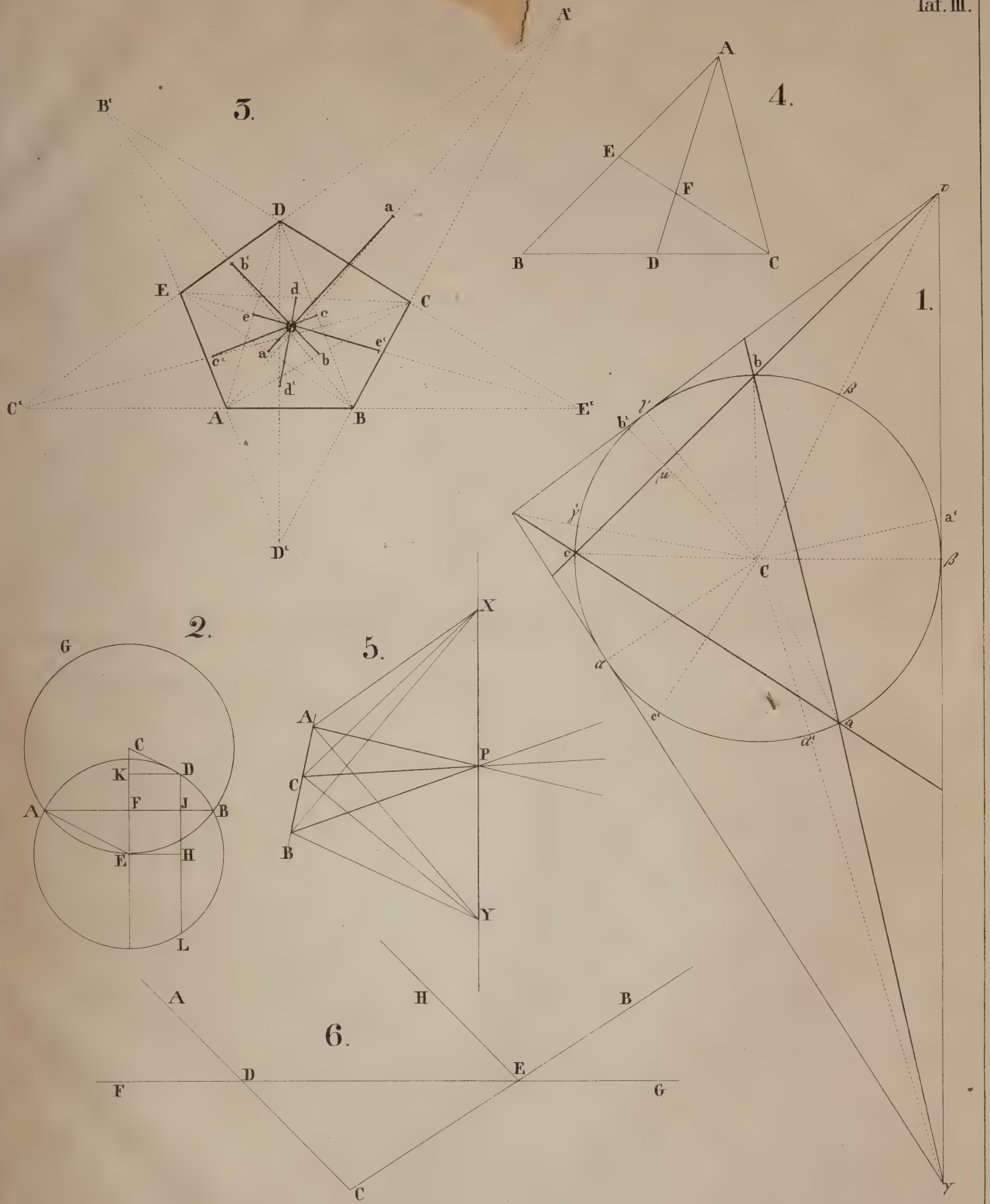
Mais ce ne sont pas les grands talens seuls de Mr. Abel qui le rendoient si respectable et qui feront toujours regretter sa perte. Il étoit également distingué par la pureté et la noblesse de son caractère, et par une rare modestie qui le rendoit aussi aimable, que son génie étoit extraordinaire. La jalousie du mérite d'autrui lui étoit tout à fait étrangère. Il étoit bien éloigné de cette avidité d'argent ou de titres, ou même de renommée, qui porte souvent à abuser de la science en en faisant un moyen de parvenir. Il apprécioit trop bien la valeur des vérités sublimes qu'il cherchoit, pour les mettre à un prix si bas. Il trouvoit la récompense de ses efforts dans leur résultat même. Il se réjouissoit presque également d'une nouvelle découverte, soit qu'elle eût été faite par lui ou par un autre. Les moyens de se faire valoir lui étoient inconnus: il ne faisoit rien pour lui-même, mais tout pour sa science chérie. Tout ce qui a été fait pour lui, provient uniquement de ses amis, sans la moindre coopération de sa part. Peut-être une telle insouciance est-elle un peu déplacée dans le monde. Il a sacrifié sa vie pour la science, sans songer à sa propre conservation. Mais personne ne dira qu'un tel sacrifice soit moins digne et moins généreux que celui qu'on fait pour tout autre grand et noble objet, et auquel on n'hésite pas d'accorder les plus grands honneurs. Gloire donc à la mémoire de cet homme également distingué par les talens les plus extraordinaires et par la pureté de son caractère, d'un de ces êtres rares, que la nature produit à peine une fois dans un siècle!

Berlin le 20. Juin 1829.

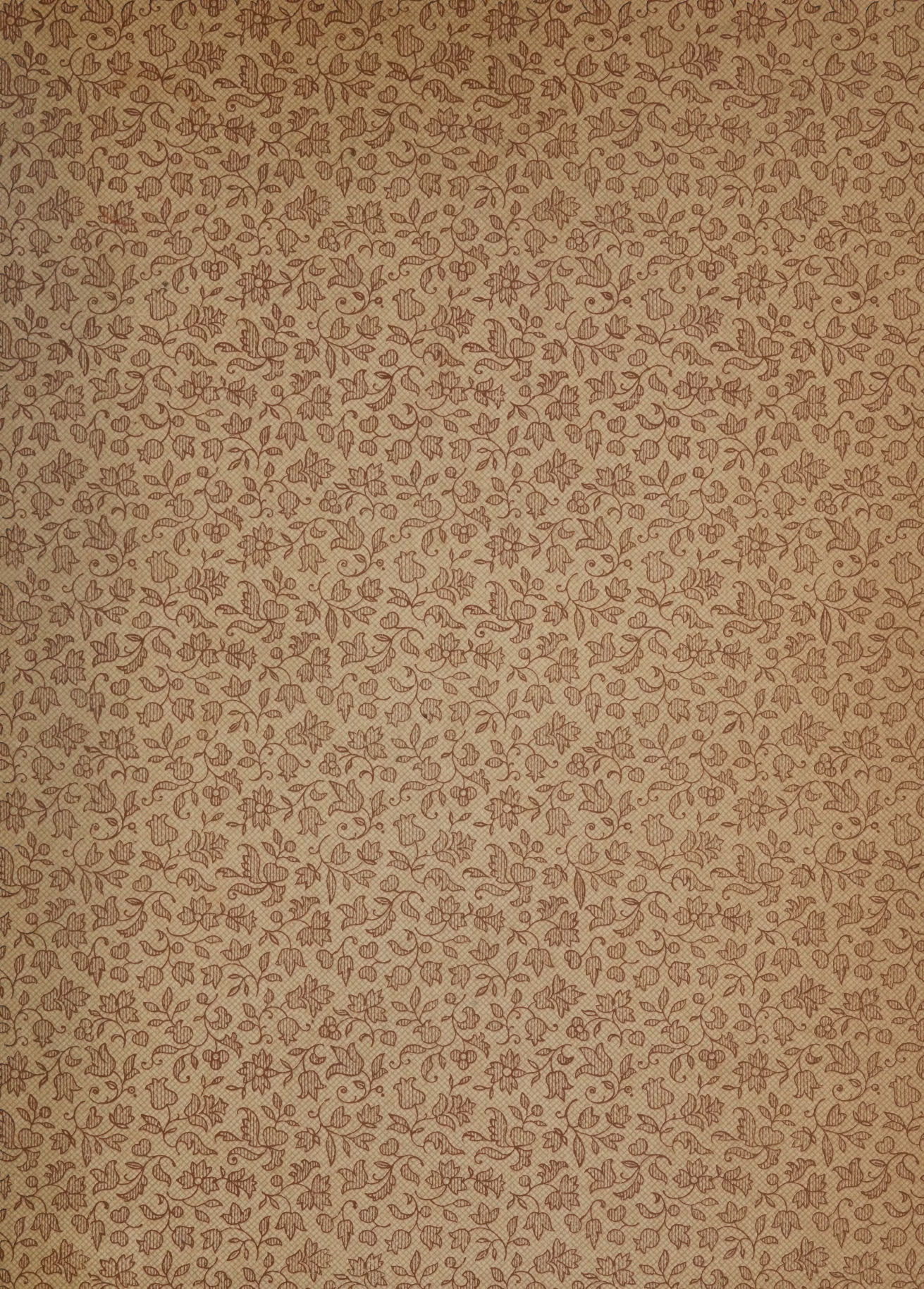
Crelle.











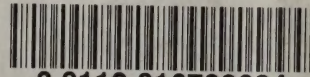
UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA

510.5JR

C001

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MAT

3-4 1828-29



3 0112 016799394